序文

本書は「行列のさまざまな性質を学ぶことにより線形代数学の基礎を理解すること」を目標とする入門書である。高等学校で 数学Ｉを学んだ大学１年生を読者として想定している。数学II：三角関数 および数学Ｂ：複素数 の知識があればなおさら良い。

行列式、基本変形、固有値と固有ベクトルおよびエルミート内積を中心に、行列に関する基本的事項を説明する。特に乗法的性質に重点をおいて、行列の正則性の判定と逆行列の求め方、一次方程式系への応用、行列の対角化などについて述べる。線形空間の一般論は最小限にとどめるよう配慮した。

ここで述べる行列の理論は基本的であり、比較的簡単なものである。その分アルゴリズムがしっかり確立されているという特徴をもつ。例えば

（１） 行列式の計算方法

（２） 基本変形による階数の求め方

（３） 行列の正則性の判定と、正則である場合の逆行列の求め方

（４） 一次方程式系が解を持つか否かの判定と、解を持つ場合それらを全て求める方法

などがある。また高次代数方程式を解くという点を除いてアルゴリズムの存在する例として

（５） 正方行列の正則行列による対角化可能性の判定と、可能なときの実行方法

（６） 正方行列のユニタリ行列による対角化可能性の判定と、可能なときの実行方法

がある。

本書では以上の６項目にテーマをしぼり、これらに関連することを解説する。また (5) の自然な発展として ジョルダン標準形の理論にふれ、数列の一般項を求める方法および微分方程式の解法に応用する。

次に、各章ごとに内容の概略を述べる。

第０章：複素数の基本的な性質についてまとめる。これは高校：数学Ｂの復習である。

第１章：行列およびそれらの和、積を定義する。さらに、正則行列を定義しその意義を説明する。

第２章：行列式を定義し、その性質を調べる。 応用として行列式の具体的な計算法を述べる。

第３章：基本行列、基本変形を導入して、行列の階数を定義する。

第４章：行列式や基本変形を用いて、行列の正則性の判定法および正則行列の逆行列を求める方法を述べる。

第５章：一次方程式系の解法を述べる。またこの解法を線形空間の一般論特に部分空間の基底と次元の理論に応用する。

第６章：固有値と固有ベクトルを導入し、正方行列の正則行列による対角化可能性の判定法および可能な場合の実行方法を述べる。 最後にジョルダン標準形の理論の概略をまとめる。

第７章：ベクトルのノルム、内積を定義する。 また行列のエルミート共役を導入して、ユニタリ行列、正規行列を定義する。さらに正方行列のユニタリ行列による対角化可能性の判定法および可能な場合の実行方法を述べる。

第８章：行列の対角化やジョルダン標準形の理論の応用として、数列の一般項および微分方程式の一般解を求める。

第−１章：集合と写像の理論の必要な部分をまとめる。高校：数学 I の復習およびその続きである。

行列の成分は特にことわらない限り複素数とする。そこで、第０章をおく。ただし成分が複素数であることが本当に必要となるのは第６章以降である。また全般を通じて集合と写像の理論を用いる。そのために第−１章をおく。必要に応じて参照して欲しい。 第２章と第３章はどちらを先に読んでも良いよう配慮した。

目次

注意　第１章第６節、第５章第５節、第６章第４節、第７章第７節および第８章は付録と考えて良い。後に用いられることはない。

参考文献

[1] 岩堀長慶 (編)：線形代数学、裳華房 (1982)
[2] 奥川光太郎：線形代数学入門、朝倉書店 (1966)
[3] 笠原皓司：線型代数と固有値問題、現代数学社 (1972)
[4] 斎藤正彦：線型代数入門、東京大学出版会 (1966)
[5] 斎藤正彦：線型代数演習、東京大学出版会 (1985)
[6] 佐武一郎：線型代数学、裳華房 (1958)
[7] 杉浦光夫：Jordan 標準形と単因子論、岩波書店 (1976)
[8] 三宅敏恒：入門線形代数、培風館 (1991)
[9] 大学数学教育研究会 (編)：大学課程 線形代数、共立出版 (1986)
[10] 守谷良二：Mathematica で数学を －線形代数編－、海文堂 (1993)
[11] 守谷両時：Maple で数学を －線形代数編－、海文堂 (1996)
[12] 西本敏彦：微分積分学講義、培風館 (1996)
[13] 大学数学教育研究会 (編)：大学課程 微分積分学概説、共立出版 (1975)

第０章　複素数

0.1　代数的性質

<u>導入</u>　実数の範囲において１次方程式は常に解ける。実際

$$ax+b=0 \iff x=-\frac{b}{a} \quad (a\neq 0)$$

２次方程式については公式：

$$ax^2+bx+c=0 \iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a\neq 0)$$

があるが、 $b^2-4ac<0$ となることがあるから実数の範囲で常に解けるとはいえない。２乗して -1 になる実数が存在しないというのがその理由である。

<u>定義</u>　２乗して -1 となる新しい数を導入し、これを $\sqrt{-1}$ または i で表す。実数 a,b を用いて

$$a+ib\ (\text{これを } a+bi \text{ と書くこともある；} a+ib=a+bi)$$

と表される数を複素数という。ここで

$$a+ib=c+id \iff a=c \text{ かつ } b=d \quad (a,b,c,d\in\mathbb{R})$$

により複素数の相等を定義する。複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く；

$$\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

これも集合となる。

複素数を $\alpha=a+ib$ と書くとき、 $a=\Re\alpha$ とおき α の実数部分（実部）という。また $b=\Im\alpha$ とおき α の虚数部分（虚部）という。$\alpha=a+ib$ で $b=0$ となるもの、即ち $\alpha=a+i0$ を実数 a と同一視して $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ と考える； $\mathbb{R}=\{\alpha\in\mathbb{C} \mid \Im\alpha=0\}$ 。

<u>和と積</u>　複素数 $\alpha=a+ib, \beta=c+id$ に対して

$$\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$$

により α と β の和を、

$$\alpha\beta=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

により α と β の積を定義する。このとき $i^2=-1$ となることに注意する。また $(-1)\beta=-c+i(-d)$ となるが、これを $-\beta=-c-id$ と書く。従って $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a-c)+i(b-d)$ により差を定義される。商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ についてはもう少しあとで考える。

<u>複素共役</u>　$\alpha=a+ib$ に対し $\overline{\alpha}=a-ib$ とおき α の共役（複素数）という。

<u>性質</u>　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\ \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha\beta},\ \overline{\overline{\alpha}}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \alpha=\overline{\alpha},$
$\Re\alpha=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2},\ \Im\alpha=\dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}.$

<u>絶対値</u>　$\alpha=a+ib$ に対し $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$ とおき α の絶対値という。明らかに $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha},\ |\alpha|=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}=|\overline{\alpha}|$ が成り立つ。

<u>性質</u>　$|\alpha+\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|,\ |\alpha\beta|=|\alpha||\beta|,\ \alpha=0\ \Leftrightarrow\ |\alpha|=0$
よって $\beta\neq 0$ ならば $\beta\cdot\dfrac{\overline{\beta}}{|\beta|^2}=1,$ 即ち $\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\overline{\beta}}{|\beta|^2}$ となる。いいかえると

$$\beta=c+id\neq 0\ \Rightarrow\ \frac{1}{\beta}=\frac{c}{c^2+d^2}+i\frac{-d}{c^2+d^2}\ \in\ \mathbb{C}.$$

従って $\dfrac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\dfrac{1}{\beta}$ により商（ 0 で割ることは除く）も定義される。

以上により複素数の全体 $\mathbb{C}$ において、加減乗除の 4 則が自由にできることが示された。複素数の 4 則演算は i を文字だと思って計算し、i^2 が出て来たら -1 を代入すればよい。

<u>例</u>　$\alpha=-2+3i,\ \beta=1+i$ のとき、
$\alpha+\beta=(-2+1)+(3+1)i=-1+4i$,
$\alpha-\beta=(-2-1)+(3-1)i=-3+2i$,
$\alpha\beta=-2+3i^2+(-2+3)i=-5+i$,
$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{(-2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(-2+3)+(3+2)i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$
複素数の 4 則演算に関して次が成り立つ； $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ に対して

$$\left.\begin{array}{ll}(0.1) & (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\\ (0.2) & \alpha+0=\alpha=0+\alpha\\ (0.3) & (-\alpha)+\alpha=0=\alpha+(-\alpha)\\ (0.4) & \alpha+\beta=\beta+\alpha\end{array}\right\}\ \text{和の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(0.9) & (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)\\ (0.10) & \alpha\cdot 1=\alpha=1\cdot\alpha\end{array}\right\}\ \text{積の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(0.11) & (\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma\\ (0.12) & \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma\end{array}\right\}\ \text{和と積の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(0.14) & \alpha\beta=\beta\alpha\\ (0.15) & \alpha\neq 0\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\alpha}\alpha=1=\alpha\dfrac{1}{\alpha}\end{array}\right\}\ \text{積の性質}$$

注意　番号のとびは無視する。また $(0.14), (0.15)$ を最後に書いた理由は第１章で明らかになる。

0.2　図形的性質

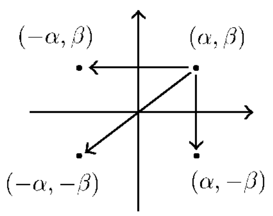
複素数平面　複素数 $\alpha = a + ib$ を平面上の点 (a, b) と同一視して $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ とみなす。ここで $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ を平面と考えている。即ち複素数の全体は平面と考えてよい。$\mathbb{C}$ と同一視した平面を複素数平面という。このとき $x + iy = (x, y)$ と考えて x 軸を実軸、y 軸を虚軸という。

例　$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $|\alpha - \beta|$ は平面上の点 α, β の距離を表す。

例　写像；$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ \alpha & \mapsto & -\alpha \end{array}$ は $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ (a, b) & \mapsto & (-a, -b) \end{array}$ であるから原点に関する（点）対称移動を表す。

また写像；$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ \alpha & \mapsto & \overline{\alpha} \end{array}$ は $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ (a, b) & \mapsto & (a, -b) \end{array}$ であるから実軸に関する（線）対称移動を表す。

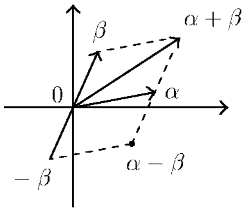
同様に写像；$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ \alpha & \mapsto & -\overline{\alpha} \end{array}$ は $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ (a, b) & \mapsto & (-a, b) \end{array}$ であるから虚軸に関する（線）対称移動を表す。



問　直線 $y = x$ に関する線対称移動はどのような写像；$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ により表されるか。

解　この対称移動は $(a, b) \mapsto (b, a)$ であるから写像 $a + bi \mapsto b + ai$ を考えればよい。$\alpha = a + ib$ とおくと $b + ia = i(a - ib) = i\overline{\alpha}$ となるから求める写像は $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ \alpha & \mapsto & i\overline{\alpha} \end{array}$ である。

和の作図　複素数 α, β に対して和 $\alpha + \beta$ は $0, \alpha, \alpha + \beta, \beta$ が平行４辺形となるような点である。差 $\alpha - \beta$ も同様である。

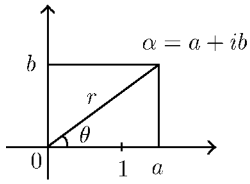


$\alpha+\beta, \alpha-\beta$ は定規とコンパスで作図できる。

次に積の作図をしたい。そのためにひとつ準備をする。

極形式　複素数 $\alpha = a+ib, \alpha \neq 0$ に対して、3点 $1, 0, \alpha$ がつくる角を θ とし、 $r = |\alpha|$ とすれば

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$



となるから

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される。これを α の極形式という。ここで、 $r, r' > 0$ に対し

$$r(\cos\theta+i\sin\theta) = r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \iff r = r', \theta = \theta'+360^\circ\times k \ (k\in\mathbb{Z})$$

となることに。注意する即ち θ は一意的に定まるわけではなく、 360° の整数倍異なっていても同じ複素数を表す。 $\alpha = 0$ に対しては θ が定義されないから極形式は考えない。したがって以下で極形式を考えるときは特にことわることなく $\alpha \neq 0$ と仮定する。

問題　$\alpha \neq 0$ と $r > 0$ に対し、

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff r = |\alpha|, \ \cos\theta = \frac{\Re\alpha}{|\alpha|}, \ \sin\theta = \frac{\Im\alpha}{|\alpha|}$$

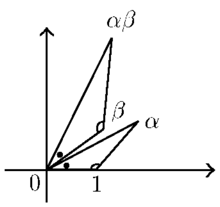
例　$1+i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \sqrt{2}(\cos 405^\circ + i\sin 405^\circ)$ 。

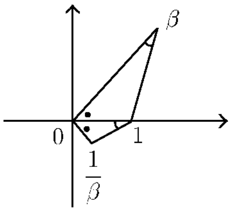
補題 0.1　$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta), \ \beta = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \ (r, r' > 0)$ とすれば $\alpha\beta = rr'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$ となる。

証明　展開して加法定理（数学II）を用いれば、 $\alpha\beta = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta') = rr'\left((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right) = rr'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$ となる。証明終

系　(i) $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$
(ii) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \ n \in \mathbb{Z}$ 。

積の作図　複素数 α, β に対して積 $\alpha\beta$ は、 $0, 1, \alpha$ のつくる3角形と $0, \beta, \alpha\beta$ がつくる3角形が相似になるような点である。 $\beta \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{\beta}$ は3角形 $0, 1, \beta$ と3角形 $0, \dfrac{1}{\beta}, 1$ が相似になるような点である。





$\alpha\beta, \dfrac{1}{\beta}$ は定規とコンパスで作図できる。
従って $\dfrac{\alpha}{\beta}$ も作図できる。

例 0.1　複素数 α を比例定数とする複素数の比例は写像

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ z & \mapsto & \alpha z \end{array}$$

で表される。
(i)　α が正の実数ならば f_α は絶対値を α 倍する写像である。
(i)$'$　α が負の実数ならば f_α は 180° 回転して絶対値を $|\alpha|$ 倍する写像である。

(ii)　$\alpha = i$ ならば f_α は 90° 回転を表す。
(ii)$'$　$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ ならば f_α は θ 回転を表す。
従って一般に $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき、写像 f_α は θ 回転して絶対値を r 倍する写像である。また $f_{\alpha\beta} = f_\alpha \circ f_\beta, (f_\alpha)^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}(\alpha \neq 0)$ も実数の場合と同様である。
例-1.3、例-1.3$'$、例-1.3$''$ をみよ。

例 0.2　与えられた $n \geqq 1,\ \alpha \in \mathbb{C}$ に対して n 次方程式 $z^n - \alpha = 0$ を解く。
$\alpha = 0$ なら $z = 0$ (n 重解) となるから $\alpha \neq 0$ としてよい。
$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ z = \mathrm{R}(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ とおくと、補題 0.1 の系 (ii) より

$$\mathrm{R}^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta) = z^n = \alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる。従って

$$\mathrm{R}^n = r,\ n\Theta = \theta + 360^\circ \times k\ (k \in \mathbb{Z})$$

即ち

$$\mathrm{R} = \sqrt[n]{r},\ \Theta = \frac{\theta + 360^\circ \times k}{n}$$

となる。よって

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 360^\circ \times k}{n} + i\sin\frac{\theta + 360^\circ \times k}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

は解である。ここで $z_k = z_0\left(\cos\dfrac{360^\circ}{n} + i\sin\dfrac{360^\circ}{n}\right)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ に注意すれば $z_n = z_0$ がわかる。同様に $z_{n+k} = z_k$ もわかる。従って

$$z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1}$$

は方程式 $z^n - \alpha = 0$ の解のすべてである； $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = \alpha\} = \{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\}$ 。

以上により方程式 $z^n - \alpha = 0$ は $\alpha \neq 0$ であれば異なる n 個の解を持つことがわかった。これらを α の n 乗根という。α の n 乗根は中心 0、 半径 $\sqrt[n]{|\alpha|}$ の円周を n 等分する n 個の点である。よってこれら n 個の点を順に結べば正 n 角形ができる。

より一般に複素数係数の n 次方程式 $\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0$ $(n \geqq 1,\ \alpha_0 \neq 0)$ を考える。 $n = 1, 2$ ならこの章の冒頭で述べたように解の公式があり、これは複素数でも通用する。 $n = 3, 4$ でも少々複雑だが解の公式がある（１６世紀のイタリア）。 $n \geqq 5$ のときは解の公式は存在しないことが証明されている（アーベル、ガロア、１９世紀）が、次の結果は成り立つ。

定理 0.1　複素数係数の n 次方程式 $\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0$ は $n \geqq 1$ であれば必ず複素数の範囲に解を持つ。即ち

$$\alpha_0\beta^n + \alpha_1\beta^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\beta + \alpha_n = 0$$

をみたす複素数 β が存在する。

系　複素数係数の n 次方程式 $f(z) = \alpha_0 z^n + \cdots + \alpha_n (n \geqq 1)$ は

$$f(z) = \alpha_0 \prod_{i=1}^{s} (z - \beta_i)^{m_i}\ ;\ \beta_1, \cdots, \beta_s \in \mathbb{C},\ m_1 + \cdots + m_s = n$$

と因数分解される。ここで「 $i \neq j \Rightarrow \beta_i \neq \beta_j$ 」である。

２次方程式が無条件で解けるように、数を実数から複素数へと拡張したわけだが、３次以上の方程式を考えてももう数を拡張する必要がないということを定理0.1 は示している。しかしながらこの定理は解を求める具体的な手段を与えているわけではないことに注意する。定理0.1 は第６章で必要となる。

注意　これまでに見た通り、実数から複素数への拡張によりうまくいくことが多いがひとつの重要な性質が失われる。それは大小関係（順序）である。実数においては次の２性質：

$$a \leqq b\ \Rightarrow\ a + c \leqq b + c$$
$$a \leqq b,\ 0 \leqq c\ \Rightarrow\ ac \leqq bc$$

をみたす順序 $\leqq$ が考えられた。下の式に $a = 0,\ b = c$ を代入すると $0 \leqq b^2$ となるから、複素数においてはこのような性質を持つ順序は存在しないことがわかる。

第１章

この章では行列を定義しその基本的な性質を述べる。行列の加法、減法、乗法を定義し除法の可能性をさぐる。また行列を写像とみるみかたを説明する。

1.1　定義と例

定義　m, n を 1 以上の整数とする。mn 個の複素数 $a_{ij}(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ により

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と表されるものを行列という。より詳しくは m 行 n 列の行列あるいは (m, n) 形行列という。上から i 番目にある n 個の数

$$a_{i1} \ \cdots \ a_{in}$$

を A の第 i 行といい、左から j 番目にある m 個の数

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

を A の第 j 列という $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ 。また第 i 行第 j 列にある数 a_{ij} を A の (i, j) 成分といい、(m, n) を A のサイズという。(m, n) 形行列

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と (p, q) 形行列

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

は、$m = p,\ n = q$ かつすべての $i = 1, \cdots, m = p, j = 1, \cdots, n = q$ に対して $a_{ij} = b_{ij}$ となるとき等しいといわれ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ と表される。即ち $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ とは A, B のサイズが等しく、対応する成分がすべて等しいときをいう。

(m, n) 形行列の全体を $\mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{C})$ と書く。$(1, 1)$ 形行列は数と同一視する。即ち $[a] = a$ と書いて $\mathrm{M}(1, 1\ ;\ \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ と考える。すべての成分が実数であるような (m, n) 形行列を実行列といい、その全体を $\mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{R})$ で表す。同様に $\mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{Q})$ や $\mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{Z})$ も定義され

る。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $(2,2)$ 形行列である。 A の $(1,1)$ 成分は a、$(1,2)$ 成分は b、$(2,1)$ 成分は c、$(2,2)$ 成分は d である。

<u>問</u>　上の行列の第１行は何か。第２列は何か。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & d \end{bmatrix}, \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 3 & b \\ c & 5 \end{bmatrix}$ のとき、 $\mathrm{A}=\mathrm{B} \Leftrightarrow a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=5$ 。
また $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ のとき、どのような a_{ij}, b_{kl} に対しても $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ である。

<u>転置</u>　(m,n) 形行列　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ に対して　${}^t\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & a_{ji} & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ とおき、 A の転置行列という。
${}^t\mathrm{A}$ は (n,m) 形行列で、 A の行と列とを取りかえたものである。転置行列を考えることにより、行に関する事柄を列に関する事柄に、また列に関する性質を行に関する性質に変えることができる。${}^t({}^t\mathrm{A})=\mathrm{A}$ にも注目する。転置をとる操作は

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}(m,n\ ;\ \mathbb{C}) & \to & \mathrm{M}(n,m\ ;\ \mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{A} & \mapsto & {}^t\mathrm{A} \end{array}$$

という写像を定義する。これは全単射である。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ならば ${}^t\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ である。

<u>分割</u>（ブロック表示）　(m,n) 形行列 A を $s-1$ 本の横線と $t-1$ 本の縦線とによって st 個の行列に分割する。上から p 番目左から q 番目の行列を $\mathrm{A}_{pq}(1 \leqq p \leqq s,\ 1 \leqq q \leqq t)$ とおき、

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{s1} & \cdots & \mathrm{A}_{st} \end{bmatrix}$$

と表す。これを A のブロック表示という。従って A は行列 A_{pq} を成分とする行列を考えることもできる。 A_{pq} が (m_p, n_q) 形行列であれ

ば $m = m_1 + \cdots + m_s,\ n = n_1 + \cdots + n_t$ となる。逆にこのような $(m_1, \cdots, m_s), (n_1, \cdots, n_t)$ が与えられれば (m, n) 形行列がブロック表示される。

例　$(3,4)$ 形行列　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ に対し、$s = 2, t = 2$ として $\mathrm{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right]$ と分割する。

$$\mathrm{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{22} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}$$

とおけば　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$ と表せる。ここで $m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ n_1 = 3,\ n_2 = 1$ である。

問　上記行列 A を $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1$ に関してブロック表示せよ。

解　$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right]$ より

$$\mathrm{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{13} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}_{21} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{23} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

とおけば $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \end{bmatrix}$ となる。

例 1.1　${}^t\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{A}_{11} & {}^t\mathrm{A}_{12} \\ {}^t\mathrm{A}_{21} & {}^t\mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$

行列のブロック表示は行列に関する議論をより小さい行列に関する議論に帰着させるときに役立つ。特に第 3 節で行列の積を定義するが、ブロック表示は積の計算に関連して役に立つことが多い（補題 1.1、補題 1.4 などを参照のこと）。

次に後々必要となる特別な形の行列をいくつかとりあげる。

縦ベクトル（列ベクトル）　$(m, 1)$ 形の行列を m 項縦ベクトルあるいは m 項列ベクトルという。m 項縦ベクトル $\mathbf{x}$ は

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \ ;\ x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{C}$$

と表せる。この全体を $\mathbb{C}^m$ で表す ； $\mathbb{C}^m = \mathrm{M}(m, 1\ ;\ \mathbb{C})$ 。同様に $\mathbb{R}^m,\ \mathbb{Q}^m,\ \mathbb{Z}^m$ なども定義される。

<u>注意</u>　第０章第２節では $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ と考えたが、以下では $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ と考える。

<u>横ベクトル</u>（行ベクトル）　$(1, n)$ 形の行列を n 項横ベクトルあるいは n 項行ベクトルという。n 項横ベクトル $\mathbf{y}$ は

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}\ ;\ y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{C}$$

と表せる。 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ に対して $\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}$ と書けるので、 n 項横ベクトルの全体を ${}^t\mathbb{C}^n$ で表す； ${}^t\mathbb{C}^n = \mathrm{M}(1, n\ ;\ \mathbb{C})$ 。同様に ${}^t\mathbb{R}^n,\ {}^t\mathbb{Q}^n,\ {}^t\mathbb{Z}^n$ なども定義される。

<u>例 1.2</u>　(m,n) 形行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ の第 j 列をとって $\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m\ (1 \leqq j \leqq n)$ とおくと $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ と表せる。これを A の列ベクトルによる分割という。同様に A の第 i 行をとって $\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \in {}^t\mathbb{C}^n\ (1 \leqq i \leqq m)$ とおくと $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix}$ と表せる。これを A の行ベクトルによる分割という。

<u>正方行列</u>　(n,n) 形行列を n 次正方行列といいその全体を $\mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ で表す； $\mathrm{M}(n;\mathbb{C}) = \mathrm{M}(n,n;\mathbb{C})$ 。同様に $\mathrm{M}(n;\mathbb{R}), \mathrm{M}(n;\mathbb{Q}), \mathrm{M}(n;\mathbb{Z})$ なども定義される。

<u>例</u>　行列 A が ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$ をみたすとき対称行列という。対称行列は正方行列である。特に $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき、 A は対称行列 $\Leftrightarrow b = c$ 。 $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ は対称行列であり、$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ は対称行列ではない。

<u>3角行列と対角行列</u>　n 次正方行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ に対して $a_{ii}(1 \leqq i \leqq n)$ を A の対角成分という。
「 $i > j \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0$ 」となるとき A を上半3角行列といい、「 $i < j \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0$ 」となるとき下半3角行列という。上半3角行列であるかまたは下半3角行列であるものを単に3角行列という。上半3角行列でありかつ下半3角行列であるものを対角行列という。対角行列とは即ち対角成分以外がすべて 0 であるような正方行列である。対角成分がすべて等しい対角行列をスカラー行列という。スカラー行列は $\begin{bmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{bmatrix}$ $(a \in \mathbb{C})$ と書ける。

<u>性質</u>　(i)　スカラー行列 $\Rightarrow$ 対角行列 $\Rightarrow$ 3角行列 $\Rightarrow$ 正方行列。
(ii)　A は上半3角行列 $\Leftrightarrow$ ${}^t\mathrm{A}$ は下半3角行列。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ は上半3角行列で、対角成分は $1, 4, 6$ である。
$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ は対角行列であるがスカラー行列ではない。対角成分は $1, 2, 3$ である。

正方行列に対する分割は $s = t$ かつ $m_1 = n_1, \ \cdots, \ m_s = n_t$ となるものが重要である。このようなものを対称分割という。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$ は対称分割であり、$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$ は対称分割ではない。

<u>トレース</u>　正方行列 A の対角成分の和を A の固有和またはトレースといい、 $tr\mathrm{A}$ で表す。即ち、

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ のとき } tr\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

これにより写像 $tr \ : \ \mathrm{M}(n \, ; \, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ が定義されたことになる。$tr({}^t\mathrm{A}) = tr\mathrm{A}$ が成り立つ。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ のとき、 $tr\mathrm{A} = 1 + 5 + 9 = 15$ となる。

<u>例</u>　$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対角分割とするとき、 $tr A = tr A_{11} + tr A_{22}$ となる。

1.2　和とスカラー倍

定義　(m,n) 形行列 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ に対して

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

とおき A と B の和という。 $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ も (m,n) 形行列である。 A と B の和は A, B のサイズが同じでないときには定義されない。

例　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき A+B は定義されない。$\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき $\mathrm{A}+\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 1+7 & 2+8 \\ 3+9 & 4+10 \\ 5+11 & 6+12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$ である。

例　$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$ である。

定義　複素数 α と (m,n) 形行列 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ に対して $\alpha\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$ とおき A の α 倍という。 $\alpha\mathrm{A}$ も (m,n) 形行列である。同様に $\mathrm{A}\alpha=\begin{bmatrix} a_{11}\alpha & \cdots & a_{1n}\alpha \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\alpha & \cdots & a_{mn}\alpha \end{bmatrix}$ とおけば明らかに $\alpha\mathrm{A}=\mathrm{A}\alpha$ である。

注意　スカラー倍のスカラーとはこの場合複素数のことである。

例　$\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha \\ c\alpha & d\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\alpha$

特に $\alpha=-1$ のとき $-\mathrm{A}=(-1)\mathrm{A}$ と書く。

零行列　成分がすべて 0 であるような (m,n) 形行列を O_{mn} と書き零行列という；

$$\mathrm{O}_{\mathrm{mn}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{C})$$

サイズを特に明示する必要のないときは O_{mn} は単に O と書かれる。

<u>性質</u>　$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{C}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ。

$$\left.\begin{array}{ll} (1.1) & (\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C}) \\ (1.2) & \mathrm{A}+\mathrm{O} = \mathrm{A} = \mathrm{O}+\mathrm{A} \\ (1.3) & (-\mathrm{A})+\mathrm{A} = \mathrm{O} = \mathrm{A}+(-\mathrm{A}) \\ (1.4) & \mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{B}+\mathrm{A} \end{array}\right\} \text{和の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1.5) & (\alpha+\beta)\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{A} \\ (1.6) & \alpha(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \alpha\mathrm{A}+\alpha\mathrm{B} \\ (1.7) & (\alpha\beta)\mathrm{A} = \alpha(\beta\mathrm{A}) \\ (1.8) & 1\cdot\mathrm{A} = \mathrm{A} \end{array}\right\} \text{スカラー倍の性質}$$

<u>注意</u>　$\mathrm{A}-\mathrm{B} = \mathrm{A}+(-\mathrm{B})$ により差も定義できる。

<u>例 1.3</u>　行列 A, B が同じサイズの分割により
$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{s1} & \cdots & \mathrm{A}_{st} \end{bmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \cdots & \mathrm{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{B}_{s1} & \cdots & \mathrm{B}_{st} \end{bmatrix}$ とブロック表示され
ているとき、$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}+\mathrm{B}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1t}+\mathrm{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{s1}+\mathrm{B}_{s1} & \cdots & \mathrm{A}_{st}+\mathrm{B}_{st} \end{bmatrix}$
となる。

<u>例 1.4</u>　行列 A, B のサイズが同じであれば ${}^{t}(\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}) = \alpha{}^{t}\mathrm{A}+\beta{}^{t}\mathrm{B}$ 。

<u>例 1.5</u>　A, B が同じ次数の正方行列であれば $tr(\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}) = \alpha tr\mathrm{A}+\beta tr\mathrm{B}$ 。

1.3　積

<u>定義</u>　(ℓ, m) 形行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix}$ と (m, n) 形行列 $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ とに対して $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} (1 \leqq i \leqq l,\ 1 \leqq j \leqq n)$ とおいて $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix}$ と書き、 A と B の積という。 AB は (l, n) 形行列である。 A と B の積は A の列の数と B の行の数が一致しないときには定義されない。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 11 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 12 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 11 & 3 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 10 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 11 & 5 \cdot 9 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 30 & 33 \\ 61 & 68 & 75 \\ 95 & 106 & 116 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき AC は定義されない。

<u>例</u>　$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} & y_1 a_{12} + y_2 a_{22} \end{bmatrix}$

<u>例 1.6</u>　i, j を固定して、 (i, j) 成分だけ 1 、その他の成分がすべて 0 であるような行列を考える。このとき

$$\begin{array}{rc} \text{第 } i \text{ 行} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \text{第 } j \text{ 列} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & 0 & \end{bmatrix} \text{第 } i \text{ 行},$$

即ち第 i 行に A の第 j 行が並ぶ。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{cl} \text{第 } j \text{ 列} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{第 } i \text{ 行} \end{array} = \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{bmatrix} & a_{1i} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{mi} & \end{bmatrix} \end{array},$$

即ち第 j 列に A の第 i 列が並ぶ。
たとえば

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

単位行列　対角成分がすべて 1 、その他の成分がすべて 0 であるような n 次正方行列を E_n と書き単位行列という；

$$\mathrm{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(n\,;\,\mathbb{C})$$

サイズを明示する必要のないときは E_n は単に E と書かれる。 E はスカラー行列である。逆に任意のスカラー行列は $\alpha\mathrm{E}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ と表せる。一般に

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

とおいてクロネッカーの δ (デルタ) という。 E の (i,j) 成分は δ_{ij} である。

性質　和、積が定義されるとき

$$\left.\begin{array}{ll} (1.9) & (\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC}) \\ (1.10) & \mathrm{AE} = \mathrm{A} = \mathrm{EA} \end{array}\right\} \text{積の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1.11) & (\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C} = \mathrm{AC} + \mathrm{BC} \\ (1.12) & \mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} \end{array}\right\} \text{和と積の関係}$$

$$(1.13) \quad (\alpha\mathrm{A})\mathrm{B} = \alpha(\mathrm{AB}) = \mathrm{A}(\alpha\mathrm{B}) \qquad \text{スカラー倍と積の関係}$$

注意　(1.13) より α 倍と $\alpha\mathrm{E}$ 倍は同じであることがわかる。よってスカラー倍は行列の積の特別な場合と考えられる。

例　$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

注意　積 AB が定義されても BA が定義されるとは限らない。また AB, BA が共に定義されても $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ が成り立つとは限らない。さらに $\mathrm{AB} = 0$ であっても $\mathrm{A} = 0$ または $\mathrm{B} = 0$ となるとは限らない。従って複素数の積の性質 (0.14) 及び (0.15) の類似は行列では成立しない。

例　(i) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ のとき、 AB は定義されるが BA は定義されない。

(ii) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ のとき、$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$, $\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$ 。よって $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$ となる。
(iii) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{O}$ となる。

例 1.6′　A を n 次正方行列とするとき、
A はスカラー行列 $\Leftrightarrow$ すべての n 次正方行列 B に対して $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ が成り立つ。

証　$\Rightarrow$ ： $\mathrm{A} = \alpha\mathrm{E}$ と書ける。 (1.10), (1.13) より $\mathrm{AB} = (\alpha\mathrm{E})\mathrm{B} = \alpha(\mathrm{EB}) = \alpha(\mathrm{BE}) = \mathrm{B}(\alpha\mathrm{E}) = \mathrm{BA}$ 。
$\Leftarrow$：A の (i,j) 成分を a_{ij} とおく。例 1.6 よりすべての $i, j (1 \leqq i,\ j \leqq n)$ に対して

$$\begin{array}{c} \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} & 0 & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & 0 & \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & a_{1i} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{ni} & \end{bmatrix} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

となる。よって $a_{ii} = a_{jj},\ i \neq j \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0$ がわかる。従って A はスカラー行列となる。

補題 1.1　A を (ℓ, m) 形行列、 B を (m, n) 形行列とする。 $\ell = \ell_1 + \cdots + \ell_r,\ m = m_1 + \cdots + m_s,\ n = n_1 + \cdots + n_t$ とし、これらによって決まる分割により A, B をブロック表示する；

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overleftrightarrow{m_1} & \cdots & \overleftrightarrow{m_s} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{r1} & \cdots & \mathrm{A}_{rs} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow\ \ell_1 \\ \vdots \\ \updownarrow\ \ell_r \end{array}, \quad \mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overleftrightarrow{n_1} & \cdots & \overleftrightarrow{n_t} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \cdots & \mathrm{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{B}_{s1} & \cdots & \mathrm{B}_{st} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow\ m_1 \\ \vdots \\ \updownarrow\ m_s \end{array}$$

このとき $\mathrm{C}_{pq} = \displaystyle\sum_{w=1}^{s} \mathrm{A}_{pw}\mathrm{B}_{wq} (1 \leqq p \leqq r,\ 1 \leqq q \leqq t)$ とおけば

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rt} \end{bmatrix}$$

となる。即ち行列を成分とする行列の乗法は通常の数を成分とする行列の乗法と全く同様に実行される。

証明　上の右辺の行列を C とおいて、 $\mathrm{AB} = \mathrm{C}$ を示す。まず A_{pw} は (ℓ_p, m_w) 形、 B_{wq} は (m_w, n_q) 形だから $\mathrm{A}_{pw}\mathrm{B}_{wq}$ は (ℓ_p, n_q) 形、即ち C_{pq} は (ℓ_p, n_q) 形となることに注意する。よって C は (ℓ, n) 形とな

り AB と同じサイズであることがわかる。

任意の (i,j), $1 \leqq i \leqq \ell$, $1 \leqq j \leqq n$ をとれば、 $i = \ell_1 + \cdots + \ell_{p-1} + u$, $j = n_1 + \cdots + n_{q-1} + v$ となる p, u, q, v が存在する。このとき C の (i,j) 成分は C_{pq} の (u,v) 成分に等しい。

$\mathrm{A}_{pw}\mathrm{B}_{wq}$ の (u,v) 成分は $\displaystyle\sum_{k=m_1+\cdots+m_{w-1}+1}^{m_1+\cdots+m_{w-1}+m_w} a_{ik}b_{kj}$ であるから c_{pq} の (u,v) 成分は $\displaystyle\sum_{w=1}^{s} \sum_{k=m_1+\cdots+m_{w-1}+1}^{m_1+\cdots+m_{w-1}+m_w} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ となる。これは AB の (i,j) 成分に等しい。従って $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ がわかる。

証明終

例 1.2′ (ℓ, m) 形行列 A の行ベクトルによる分割を $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix}$ とし、 (m,n) 形行列 B の列ベクトルによる分割を $\mathrm{B} = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n]$ とする。ここで $\mathbf{a}_i \in {}^t\mathbb{C}^m$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$, $\mathbf{b}_j \in \mathbb{C}^m$ $(1 \leqq j \leqq n)$ である。このとき

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_\ell\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_\ell\mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathrm{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_\ell\mathrm{B} \end{bmatrix} = [\mathrm{A}\mathbf{b}_1 \cdots \mathrm{A}\mathbf{b}_n]$$

となる。また $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathrm{B}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$$

となる。

例 1.7 $\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{22} \\ \mathrm{A}_{21}\mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{21}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{22} \end{bmatrix}$

となる。特に

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ 0 & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{11} & \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{22} \\ 0 & \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{22} \end{bmatrix}$$

となる。これより

(1.14) A, B が上半３角行列 $\Rightarrow$ AB も上半３角行列

がわかる。さらに

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{22} \end{bmatrix}$$ も成り立つ。

たとえば

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}[5] \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$ となる。

$(1.17)'$

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{AB}=\begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\beta_n \end{bmatrix}$$

となる。

例 $1.4'$ A を (ℓ, m) 形行列、B を (m, n) 形行列とするとき、${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}{}^t\mathrm{A}$ 。

証明 AB は (ℓ, n) 形だから ${}^t(\mathrm{AB})$ は (n, ℓ) 形。一方 ${}^t\mathrm{B}$ は (n, m) 形かつ ${}^t\mathrm{A}$ は (m, ℓ) 形だから ${}^t\mathrm{B}{}^t\mathrm{A}$ は (n, ℓ) 形。よってこれらのサイズは等しい。${}^t\mathrm{A}$ の (k, j) 成分を a'_{kj}, ${}^t\mathrm{B}$ の (i, k) 成分を b'_{ik} とすれば $a'_{kj} = a_{jk}$, $b'_{ik} = b_{ki}$ となる。よって ${}^t\mathrm{B}{}^t\mathrm{A}$ の (i, j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} b'_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki}$ でこれは AB の (j, i) 成分、即ち ${}^t(\mathrm{AB})$ の (i, j) 成分に等しい。

証明終

例 $1.5'$ A, B を n 次正方行列とする。
(i) $tr(\mathrm{AB}) = tr\mathrm{A} \cdot tr\mathrm{B}$ は一般には成り立たない。
(ii) $tr(\mathrm{AB}) = tr(\mathrm{BA})$ は成り立つ。

証明 (i) $n \geqq 2$, $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{E}$ のとき $tr(\mathrm{AB}) = tr(\mathrm{E}) = n$, $tr\mathrm{A} \cdot tr\mathrm{B} = n^2$ となるから $tr(\mathrm{AB}) \neq tr\mathrm{A} \cdot tr\mathrm{B}$ である。
(ii) AB の (i, i) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$ 、 BA の (j, j) 成分は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$ であるから $\displaystyle tr(\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right) = tr(\mathrm{BA})$ となる。

証明終

問題 $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{E}$ となる正方行列 A, B は存在しないことを示せ。

解答　存在すると仮定して両辺のトレースをとれば例 1.5 より $0 = tr(\mathrm{AB} - \mathrm{BA}) = tr\mathrm{E} = n$ となり矛盾する。

解答終

累乗　A が正方行列ならば積 AA も正方行列である。 $\mathrm{A}^2 = \mathrm{AA}$ と書く。同様に A の n 個の積 A^n が定義される。このとき、 $m, n \geqq 1$ に対して

$$(1.15) \qquad \mathrm{A}^{m+n} = \mathrm{A}^m\mathrm{A}^n\ ,\ \mathrm{A}^{mn} = (\mathrm{A}^m)^n \qquad \text{（指数法則）}$$

が成り立つ。

例　正方行列 A, B に対し $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ が成り立てば、任意の $n \geqq 1$ に対して $(\mathrm{AB})^n = \mathrm{A}^n\mathrm{B}^n\ ,\ (\mathrm{A}+\mathrm{B})^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \mathrm{A}^r\mathrm{B}^{n-r}$ （２項定理）が成り立つ。

例 1.8　A が n 次の上半３角行列で対角成分がすべて 0 ならば $\mathrm{A}^n = 0$ となる；

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C}) \ \Rightarrow\ \mathrm{A}^n = 0$$

証明　A^ℓ の (i,j) 成分を $a_{ij}^{(\ell)}$ とおく $(\ell = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 。 (1.14) より A^ℓ は上半３角行列となるから「 $i > j \ \Rightarrow\ a_{ij}^{(\ell)} = 0$ 」となる。仮定より $a_{ii}^{(1)} = 0$ が成り立つ。

$a_{ij}^{(2)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ であるから、$a_{ii}^{(2)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} a_{ik}a_{ki+1} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki+1} = 0,$ $a_{ii+1}^{(2)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} a_{ik}a_{ki+1} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki+1} = 0$ を得る。同様に $a_{ii}^{(3)} = a_{ii+1}^{(3)} = a_{ii+2}^{(3)} = 0$ を得る。あとはこれをくり返して $a_{ij}^{(n)} = 0$ 、即ち $\mathrm{A}^n = 0$ がわかる。

証明終

注意　この証明はつまり

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\cdots, \ \mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ということを示している。

1.4　正則行列

これまでにみて来た和、積について振り返ってみよう。 A を (m,n) 形行列、 B を (p,q) 形行列をするとき、

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{A}+\mathrm{B} \text{ が定義される} & \Leftrightarrow & m=p \text{ かつ } n=q \\
\mathrm{A\,B} \text{ が定義される} & \Leftrightarrow & n=q \\
\mathrm{B\,A} \text{ が定義される} & \Leftrightarrow & m=p
\end{array}
$$

であった。よって

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}\ ,\ \mathrm{AB} \text{ が共に定義される} \ \Leftrightarrow\ m=n=p=q$$

となり、このとき A − B も BA も定義される。従って集合 $\mathrm{M}(n\ ;\ \mathbb{C})$ には加減乗の３則が存在する。この節では除法の可能性について考える。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ とするとき $\mathrm{XA}=\mathrm{E}$ となる X も $\mathrm{AY}=\mathrm{E}$ となる Y も存在しない。即ち A による除法は不可能である。

<u>定義</u>　n 次正方行列 A が正則であるとは $\mathrm{XA}=\mathrm{E}=\mathrm{AY}$ となる n 次正方行列 X,Y が存在するときをいう。n 次正方行列の全体を $\mathrm{GL}(n\ ;\ \mathbb{C})$ で表す。

<u>注意</u>　$\mathrm{XA}=\mathrm{E}=\mathrm{AY}\ \Rightarrow\ \mathrm{X}=\mathrm{Y}$

実際、 $\mathrm{X}=\mathrm{XE}=\mathrm{X(AY)}=\mathrm{(XA)Y}=\mathrm{EY}=\mathrm{Y}$ となる（証明終）。従って

$$\mathrm{A} \text{ は正則 } \Leftrightarrow\ \mathrm{XA}=\mathrm{E}=\mathrm{AX} \text{ となる X が存在する}$$

といいかえられる。さらにこのような X は存在するならただひとつであることも上の注意よりわかる。そこで $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}$ と書き A の逆行列という。即ち正則行列とは逆行列を持つ正方行列のことである。 A による除法が常に可能であるための必要十分条件は A が正則となることである。

<u>例</u>　単位行列 E は正則で $\mathrm{E}^{-1}=\mathrm{E}$ である。零行列 O は正則ではない。

<u>例</u>　$\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$ は正則、 $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ は正則でない。

与えられた正方行列 A が正則であるか否かの判定及び正則であるとき逆行列 A^{-1} を求める具体的方法は重要な課題である。これらは第４章において２通りの方法により解決される。以下ではそのための準備を行う。

<u>補題 1.2</u>　A, B を正方行列とする。
(i)　A, B が共に正則 $\Rightarrow$ AB も正則で $(\mathrm{AB})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$ 。

(ii) A が正則 $\Rightarrow$ A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$ 。

<u>証明</u> (i) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$,
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$ よりわかる。
(ii) $A^{-1}A = E = A^{-1}A$ より A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$ となる。

証明終

<u>補題 1.3</u> A を正方行列とする。
(i) A は正則 $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ は正則。このとき $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ 。
(ii) A のひとつの行が 0 ベクトル $\Rightarrow$ A は正則ではない。
(iii) A のひとつの列が 0 ベクトル $\Rightarrow$ A は正則ではない。

<u>証明</u> (i) $XA = E = AX \Rightarrow {}^tA{}^tX = E = {}^tX{}^tA$ よりわかる。
(ii) $\begin{bmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & * & \end{bmatrix}$ とすると任意の Y に対して $AY = \begin{bmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & * & \end{bmatrix} \neq$
E となる。
(iii) は (i) と (ii) より明らか。

証明終

<u>補題 1.4</u> $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対称分割とするとき、
A_{11}, A_{22} が共に正則 $\Rightarrow$ A も正則。このとき $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

<u>証明</u> 例 1.7 を思い出す。

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{11} & A_{11}^{-1}A_{12} - A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}A_{22} \\ 0 & A_{22}^{-1}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = E \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = E$$

証明終

以下では補題 1.4 に関連する結果を 3 つ述べる。

<u>補題 1.4′</u> $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対称分割とするとき、
A は正則 $\Leftrightarrow$ A_{11}, A_{22} が共に正則。このとき $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

証明　補題 1.4 より $\Rightarrow$ のみを示せばよい。 $A^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$
とおくと
$$E = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}X_{11} & A_{11}X_{12} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{bmatrix}$$ より
$E = A_{11}X_{11},\ E = A_{22}X_{22}$ を得る。また
$$E = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}A_{11} & X_{12}A_{22} \\ X_{21}A_{11} & X_{22}A_{22} \end{bmatrix}$$ より
$E = X_{11}A_{11},\ E = X_{22}A_{22}$ を得る。従って A_{11}, A_{22} は正則である。
証明終

補題 1.4″ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ を対称分割とし、 A_{11} が正則であるとする。このとき A は正則 $\Leftrightarrow$ A_{22} は正則。

証明　前と同様、 $\Rightarrow$ のみを示せばよい。 A^{-1} も前と同様に分割するとき
$$E = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}X_{11} + A_{12}X_{21} & A_{11}X_{12} + A_{12}X_{22} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{bmatrix}$$
より $A_{22}X_{22} = E$ を得る。また
$$E = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}A_{11} & X_{11}A_{12} + X_{12}A_{22} \\ X_{21}A_{11} & X_{21}A_{12} + X_{22}A_{22} \end{bmatrix}$$
より $X_{21}A_{11} = 0,\ X_{21}A_{12} + X_{22}A_{22} = E$ を得る。 A_{11} は正則だから $X_{21} = 0$ 。従って $X_{22}A_{22} = E$ となり A_{22} が正則であることがわかる。
証明終

系　(i)　A が３角行列のとき、A は正則 $\Leftrightarrow$ 対角成分はすべて０でない。
(ii)　A が正則な上半３角行列 $\Rightarrow$ A^{-1} も上半３角行列。
(iii)　A が正則な下半３角行列 $\Rightarrow$ A^{-1} も下半３角行列。

補題 1.4‴ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対称分割とし、 A_{11} が正則であるとする。
(i)　A が正則 $\Leftrightarrow$ $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ が正則。
(ii)　A が正則のとき、
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$
となる。

証明　(i)　$A'_{22} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ とおくと、
$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$
となる。例 1.1 より ${}^t\begin{bmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & {}^t(-A_{21}A_{11}^{-1}) \\ 0 & E \end{bmatrix}$ 。 補

題 1.4 よりこれは正則。
補題 1.3,(i) より $\begin{bmatrix} \mathrm{E} & 0 \\ -\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1} & \mathrm{E} \end{bmatrix}$ も正則となる。従って補題 1.2 と補題 1.4″ より

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\ \text{:正則} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}'_{22} \end{bmatrix} \text{:正則} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{A}'_{22}\ \text{:正則} \end{aligned}$$

(ii) (1.16) より $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & 0 \\ -\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1} & \mathrm{E} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}'_{22} \end{bmatrix}$ 、よって
$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}'_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{E} & 0 \\ -\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1} & \mathrm{E} \end{bmatrix}$
補題 1.4 より
$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}^{-1} & -\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}'^{-1}_{22} \\ 0 & \mathrm{A}'^{-1}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{E} & 0 \\ -\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1} & \mathrm{E} \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}^{-1} + \mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}'^{-1}_{22}\mathrm{A}_{21}^{-1}\mathrm{A}_{11}^{-1} & -\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}'^{-1}_{22} \\ -\mathrm{A}'^{-1}_{22}\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1} & \mathrm{A}'^{-1}_{22} \end{bmatrix}$ がわかる。

証明終

問題 (i) 補題 1.4 及び補題 1.4″ と同様の結果を $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$ に対して導け。
(ii) A_{22} を正則として、補題 1.4′ 及び補題 1.4″ と同様の結果を導け。

注意 (i) 正則性の定義に関して、実は次の 2 性質が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\mathrm{XA} = \mathrm{E}\ \text{となる}\ \mathrm{X}\ \text{が存在する} \ \Rightarrow\ \mathrm{A}\ \text{は正則} \\ &\mathrm{AY} = \mathrm{E}\ \text{となる}\ \mathrm{Y}\ \text{が存在する} \ \Rightarrow\ \mathrm{A}\ \text{は正則} \end{aligned}$$

これらについては補題 3.1 の系または問題 4.1 を参照のこと。
(ii) 補題 1.2 に関連して、実は「 AB が正則 $\Rightarrow$ A も B も正則」も成り立つ。
(i) を認めればこれは次のようにして示せる：
$\mathrm{X}(\mathrm{AB}) = \mathrm{E}$ となる X がある。即ち $(\mathrm{XA})\mathrm{B} = \mathrm{E}$ 。よって (i) より B は正則。同様に
$(\mathrm{AB})\mathrm{Y} = \mathrm{E}$ となる Y がある。即ち $\mathrm{A}(\mathrm{BY}) = \mathrm{E}$ 。よって (i) より A は正則。

証明終

逆に (ii) から (i) が導けることは明らか
(iii) 補題 1.4 に関して、実は「 A が正則 $\Rightarrow$ A_{11}, A_{22} は共に正則」も成り立つ。
これも (i) を認めれば次のようにして示せる：
$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ \mathrm{X}_{21} & \mathrm{X}_{22} \end{bmatrix}$ とおけば $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E} = \mathrm{AA}^{-1}$ より

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{bmatrix} X_{11}A_{11} & X_{11}A_{12}+X_{12}A_{22} \\ X_{21}A_{11} & X_{21}A_{12}+X_{22}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} A_{11}X_{11}+A_{12}X_{21} & A_{11}X_{12}+A_{12}X_{22} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{bmatrix}$ 。従って

$X_{11}A_{11} = E$, $A_{22}X_{22} = E$ となる。 (i) より A_{11}, A_{22} は正則となる。

証明終

従って (i) が示されれば、補題 1.4′ 、補題 1.4″ は不必要となる。

例 1.5″ A を n 次正方行列、P を n 次正則行列とすれば $tr(P^{-1}AP) = tr A$ となる。

証明 例 1.5′ の (ii) より $tr(P^{-1}AP) = tr\,(P^{-1}(AP)) = tr\,((AP)P^{-1}) = tr\,(A(PP^{-1})) = tr A$ となる。

証明終

注意 A が正則行列のとき、 $A^0 = E$, $A^{-n} = (A^{-1})^n$ $(n \geqq 1)$ とおけば任意の整数 m に対して A^m が定義される。しかも指数法則 (1.15) は整数 m, n に対して成り立つ。

次に (2,2) 形行列に対する正則性を調べる。

定理 1.1 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき、

(i) A は正則である $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

(ii) A が正則であるとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

となる。

証明 (i) $\Rightarrow$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}$ とおくと $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{cases}$, $\begin{cases} au+bv=0 \\ cu+dv=1 \end{cases}$ となる。このとき、$(ad-bc)(xv-yu) = adxv + bcyu - bcxv - adyu = (axdv + bycu + axcu + bydv) - (aucx + bvdy + bvcx + audy) = (ax+by)(cu+dv) - (au+bv)(cx+dy) = 1$ となる。よって $ad-bc \neq 0$ がわかる。

$\Leftarrow$: $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ であるから、もし $ad-bc \neq 0$ ならば $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ となり A は正則となる。
(ii) もこの式より明らかである。

証明終

<u>注意</u> この定理の一般化を第４章で行う。そのためには $ad-bc$, $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ の一般化が必要である。これを第２章で行う。

1.5　写像としての行列

ここでは行列を写像とみて第－１章第２節との関連を考える。

(m,n) 形行列 A に対して定義される写像

$$(1.17)\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^m \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathrm{A}\mathbf{x} \end{array} \qquad (f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x})=\mathrm{A}\mathbf{x})$$

は次の性質をみたす；

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x})+f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}') \quad &, \quad \mathbf{x},\mathbf{x}' \in \mathbb{C}^n \\ f_{\mathrm{A}}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}) \quad &, \quad \alpha\in\mathbb{C}, \mathbf{x}\in\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

実際、(1.12) より $f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathrm{A}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathrm{A}\mathbf{x}+\mathrm{A}\mathbf{x}'=f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x})+f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}')$ となり、 (1.13) より $f_{\mathrm{A}}(\alpha\mathbf{x})=\mathrm{A}(\alpha\mathbf{x})=\alpha(\mathrm{A}\mathbf{x})=\alpha f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x})$ となる。

この性質を抽象して線形写像という概念を導入する：

<u>定義</u>　写像 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ が線形であるとは

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = f(\mathbf{x})+f(\mathbf{x}') \quad &, \quad \mathbf{x},\mathbf{x}' \in \mathbb{C}^n \\ f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \quad &, \quad \alpha\in\mathbb{C}, \mathbf{x}\in\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

が成り立つときをいう。

<u>補題 1.5</u>　(i)　任意の線形写像 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ に対して $f=f_{\mathrm{A}}$ となるような (m,n) 形行列 A が唯ひとつ存在する。
(ii)　A を (ℓ,m) 形行列、 B を (m,n) 形行列とすれば、線形写像 $f_{\mathrm{B}}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$, $f_{\mathrm{A}}:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^\ell$ が定義される。このとき $f_{\mathrm{AB}}=f_{\mathrm{A}}\circ f_{\mathrm{B}}$ が成り立つ。
(iii)　正方行列 A に対して「 A は正則 $\Leftrightarrow$ f_{A} は全単射」である。このとき $(f_{\mathrm{A}})^{-1}=f_{\mathrm{A}^{-1}}$ となる。

<u>証明</u>　(i)　$\mathbf{e}_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ 第 i 行　；　$\mathbf{e}_i\in\mathbb{C}^n$ に対し $f(\mathbf{e}_i)=\mathbf{a}_i\in\mathbb{C}^m (1\leqq i\leqq n)$ とおき、$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\in\mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ とすれば $\mathrm{A}\mathbf{e}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}\mathbf{e}_i=\mathbf{a}_i$ より $f_{\mathrm{A}}=f$ となる。
(ii)　(1.9) より $(f_{\mathrm{A}}\circ f_{\mathrm{B}})(\mathbf{x})=f_{\mathrm{A}}(f_{\mathrm{B}}(\mathbf{x}))=f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}\mathbf{x})=\mathrm{A}(\mathrm{B}\mathbf{x})=(\mathrm{AB})\mathbf{x}=f_{\mathrm{AB}}(\mathbf{x})$ となる。
(iii)　$\Rightarrow$ ：　$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{E}=\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}$, $f_{\mathrm{E}}=id$ 及び (ii) より $f_{\mathrm{A}^{-1}}\circ f_{\mathrm{A}}=f_{\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}}=id=f_{\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}}=f_{\mathrm{A}}\circ f_{\mathrm{A}^{-1}}$ となる。よって f_{A} は全単射となる。
$\Leftarrow$ ：(i) より $(f_{\mathrm{A}})^{-1}=f_{\mathrm{B}}$ とおける。このとき $f_{\mathrm{B}}\circ f_{\mathrm{A}}=id=f_{\mathrm{A}}\circ f_{\mathrm{B}}$ 。 (ii) より $\mathrm{BA}=\mathrm{E}=\mathrm{AB}$ となるから A は正則である。

証明終

(i) より A と f_{A} を同一視し得る。即ち行列

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ を写像

$$(1.17)' \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ \Cup & & \Cup \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}_n \\ \vdots \\ a_{m1}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{x}_n \end{bmatrix} \end{array}$$

を表す記号と考える。このとき零行列は値 0 の定値写像（例-1.1）となり単位行列は恒等写像（例-1.2）となる。

<u>例</u>　$(2,2)$ 形行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は写像

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

を表す。

この同一視のもと、補題 1.5 は次のようにいいかえられる。

<u>補題 1.5′</u>　(i)　行列とは線形写像のことである。
(ii)　行列の積とは線形写像の合成のことである。
(iii)　正方行列に対しては、行列の正則性と線形写像が全単射となることは同値である。このとき逆行列とは逆写像のことである。

<u>比例の一般化</u>　(1.17) において $\mathbf{y} = f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}) = \mathrm{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ とおけば

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

即ち

$$(1.17)'' \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{x}_n \end{cases}$$

となる。ここで $m = n = 1$ とおくと $y_1 = a_{11}x_1$ と書ける。これは複素数の正比例である（記号は異なるが例 0.1 を参照のこと。実数の場合は例-1.3 をみよ）。従って次のようにも考えられる。

線形写像とは正比例の一般化であり、行列とは比例実数の一般化で

ある；

$y = ax$ において $x, y \in \mathbb{C}$ を $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,\ \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ に一般化すると、
$a \in \mathbb{C}$ は $\mathrm{A} \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ に一般化されて $\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$ となる。

このことは $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ にかえても成り立つ。同様に補題 1.5 も $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ にかえて成立する。特に（実）線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $\mathrm{A} \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{R})$ とは同一視してよい。

<u>複素数平面と実 $(2,2)$ 行列</u>　ここでは $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ として $m = n = 2$ の場合を考える。

<u>例</u>　写像 : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ \alpha & \mapsto & \overline{\alpha} \end{array}$ は $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} \end{array}$ と表せた。

$\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ であるから、線形写像：$\alpha \ \mapsto\ \overline{\alpha}$ は行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ で表される。同様に写像 $\alpha \ \mapsto\ -\overline{\alpha}$ は行列 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表され、写像 $\alpha \ \mapsto\ i\overline{\alpha}$ は行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ で表される。原点に関する対称移動：$\alpha \ \mapsto\ -\alpha$ はもちろん行列 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ で表される。

<u>例 1.10</u>　例 0.1 で扱った写像 $f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を行列で表す。$w = \alpha z = f_\alpha(z)$ とおいて $\alpha = a + ib,\ z = x + iy,\ w = u + iv$ を代入すると、$u + iv = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$ となる。よって

$$\begin{cases} u = ax - by \\ v = bx + ay \end{cases} \quad \text{即ち} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

となる。従って求める行列は $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ である。

複素数の比例 $w = \alpha z$ において $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ に同一視するとき、比例定数 $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ は $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{R})$ と同一視される。一方極形式により $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表せば $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ と書けるから <u>例 0.1</u> より

(1.18)

行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は平面 $\mathbb{R}^2$ において θ 回転させる写像を表す

ことがわかる。

問題　写像　：
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathrm{M}(2;\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup \\ a+bi & \mapsto & \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \end{array}$$
は単射かつ和と積を保つこと、即ち $\cdots$ を示せ。

1.6　４元数

ここでは複素数をさらに拡張することを考える。第２章以下ではこの節の結果は用いない。

$$
\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j \end{cases} \tag{1.19}
$$

をみたす新しい数 i, j, k を導入し、

$$
a + bi + cj + dk \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})
$$

と表される数を４元数という。ここで

$$
\begin{aligned}
& a_1 + b_1 i + c_1 j + d_k = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k \\
& \Leftrightarrow\ a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2,\ d_1 = d_2
\end{aligned}
$$

により４元数の相等を定義する。４元数の全体を $\mathbb{H}$ と書く；

$$
\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}
$$

これも集合となる。 $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ と考えられる。

<u>和と積</u>　４元数 $\xi_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k,\ \xi_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ に対して

$$
\xi_1 + \xi_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k
$$

により ξ_1 と ξ_2 の和を定義する。また

$$
\begin{aligned}
\xi_1 \xi_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\
&+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k
\end{aligned}
$$

により ξ_1 と ξ_2 の積を定義する。これは (1.19) の一般化である。複素数の場合と同様に、 -1 倍も定義されるから差も定義されたことになる。

<u>共役</u>　$\xi = a + bi + cj + dk$ に対し $\overline{\xi} = a - bi - cj - dk$ とおき ξ の共役という。

<u>性質</u>　$\overline{\xi_1 + \xi_2} = \overline{\xi_1} + \overline{\xi_2},\ \overline{\xi_1 \xi_2} = \overline{\xi_1}\ \overline{\xi_2},\ \overline{\overline{\xi}} = \xi,\ \xi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi = \overline{\xi}$

<u>絶対値</u>　$\xi = a + bi + cj + dk$ に対し $|\xi| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ とおき ξ の絶対値という。明らかに $|\xi|^2 = \xi\overline{\xi},\ |\xi| = \sqrt{\xi\overline{\xi}} = |\overline{\xi}|$ が成り立つ。

<u>性質</u>　$|\xi_1+\xi_2| \leqq |\xi_1|+|\xi_2|,\ |\xi_1\xi_2| = |\xi_1||\xi_2|,\ \xi=0 \Leftrightarrow |\xi|=0$
よって $\xi \neq 0$ ならば $\dfrac{\overline{\xi}}{|\xi|^2}=1$ 、即ち $\xi^{-1}=\dfrac{\overline{\xi}}{|\xi|^2}$ となる。従って商も定義されることがわかる。

以上により４元数の全体 $\mathbb{H}$ において加減乗除の４則が自由にできることが示された。４元数の４則演算は i,j,k を文字だと思って計算し、$i^2, j^2, k^2, ij, ji, jk, kj, ki, ik$ が出てきたら (1.19) を用いて簡単にして行けばよい。実数や複素数と異なる点は乗法の交換法則が成り立たないことである。

<u>４元数と実 $(4,4)$ 形行列</u>

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ と $a+bi+cj+dk \in \mathbb{H}$ とを同一視して $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ と考える。
このとき比例定数が $\alpha \in \mathbb{H}$ である４元数の比例 $w=\alpha z$ がどのような行列で表されるかを調べる。$\alpha = a+bi+cj+dk,\ z=u+vi+xj+yk \in \mathbb{H}$ とおくと

$$\begin{aligned} w &= \alpha z-(a+bi+cj+dk)(u+vi+xj+yk) \\ &= (au-bv-cx-dy)+(bu+av-dx+cy)i \\ &+ (cu+dv+ax-by)j+(du-cv+bx+ay)k \end{aligned}$$

となるから w は $\begin{bmatrix} au-bv-cx-dy \\ bu+av-d+cy \\ cu+dv+ax-by \\ du-cv+bx+ay \end{bmatrix}$ と同一視される。ここで

$$\begin{bmatrix} au-bv-cx-dy \\ bu+av-d+cy \\ cu+dv+ax-by \\ du-cv+bx+ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

に注意すれば、求める行列が

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

であることがわかる。

<u>問題</u>　写像：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathrm{M}(4;\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup \\ a+bi+cj+dk & \mapsto & \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \end{array}$$

は単射であり、和と積を保つことを示せ。

<u>４元数と複素 $(2,2)$ 形行列</u>　$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ と考えることもできる。ここで $\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ と $w+jz \in \mathbb{H}$ とを同一視して $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$ と考える。このとき比例定数が $\alpha+\beta j \in \mathbb{H}$ である４元数の比例がどのような行列で表されるかを調べる。任意の $w,z \in \mathbb{C}$ に対して、 $\alpha j = j\overline{\alpha}$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta j)(w+jz) &= \alpha w + \alpha jz + \beta jw + \beta j^2 z \\ &= (\alpha w - \beta z) + j(\overline{\beta} w + \overline{\alpha} z) \end{aligned}$$

となるから、これは行列 $\begin{bmatrix} \alpha w - \beta z \\ \overline{\beta} w + j\overline{\alpha} \end{bmatrix}$ と同一視される。ここで

$$\begin{bmatrix} \alpha w - \beta z \\ \overline{\beta} w + j\overline{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$$

に注意すれば、 $\alpha+\beta j$ 倍するという線形写像が行列 $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$ で表されることがわかる。

<u>注意</u>　$\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ と $w+zj \in \mathbb{H}$ とを同一視すると $\alpha+\beta j$ 倍する写像は行列で表されなくなる。

<u>問題</u>　写像：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ \alpha+\beta_j & \mapsto & \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{即ち} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathrm{M}(2;\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ a+bi+cj+dk & \mapsto & \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix} \end{array}$$

は単射であり、和と積を保つことを示せ。

最後に２次方程式の４元数解について考える。 $x=i,j,k$ は２次方程式 $x^2+1=0$ の解である。即ち少なくとも３個の解を持つ。より一

般に次が成り立つ。

例　写像：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}^2 & \to & \{x \in \mathbb{H} \mid x^2+1=0\} \\ \cup & & \cup \\ \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} & \mapsto & x = bi+cj+dk \end{array}$$

は全単射である。ここで $\mathrm{S}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b^2+c^2+d^2=1 \right\}$ である。従って 2 次方程式 $x^2+1=0$ は無限に多くの 4 元数解を持つことがわかる。

証明　一般に $(a+bi+cj+dk)^2 = (a^2-b^2-c^2-d^2)+2abi+2acj+2adk$ が成り立つから、 $x = a+bi+cj+dk \in \mathbb{H}$ に対して、

$$\begin{aligned} x^2+1=0 &\Leftrightarrow a^2-b^2-c^2-d^2=-1,\ ab=ac=ad=0 \\ &\Leftrightarrow a=0, b^2+c^2+d^2=1 \end{aligned}$$

となる。従って上記写像が全単射であることが示せた。

（証明終）

第２章

この章では行列式の定義とその基本的な性質を述べ、余因子行列を導入する。定理 1.1 の一般化のための準備が目標のひとつである。行列式は $(2,2)$ 形行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対する $ad-bc$ の一般化であり、余因子行列は $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ の一般化である。従って行列式と余因子行列を用いることにより定理 1.1 の一般化が可能となる（定理 4.1）。

2.1　順列とその符号

ここでは行列式の定義（第２節）のための準備として、順列とその符号について述べる。

n を１以上の整数とし、$1,2,\cdots,n$ の並べかえを考える。第－１章第２節の言葉を用いれば、このような並べかえは全単射；$\{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$ に他ならない。従って写像の合成や逆写像として、並べかえの合成や逆の並びかえが考えられる。また恒等写像として何もかえない並べかえも考えられる。これを e と書く；$e = id\{1,2,\cdots,n\}$ 。$1,2,\cdots,n$ の並べかえの全体を S_n で表す；$\mathrm{S}_n = \mathrm{S}(\{1,2,\cdots,n\})$ 記号等については第－１章第２節、特に最後の部分を参照のこと。

補題-1.1 で $\mathrm{X} = \{1,2,\cdots,n\}$ とおけば次を得る：

<u>補題 2.1</u>　(i)　$q \in \mathrm{S}_n$ を固定するとき

写像：$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_n & \to & \mathrm{S}_n \\ \cup & & \cup \\ p & \mapsto & p \circ q \end{array}$ 及び $\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_n & \to & \mathrm{S}_n \\ \cup & & \cup \\ p & \mapsto & q \circ p \end{array}$ は共に全単射である。

(ii)　写像：$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_n & \to & \mathrm{S}_n \\ \cup & & \cup \\ p & \mapsto & p^{-1} \end{array}$ も全単射である。

$1,2,\cdots,n$ の並べかえ p は $p : \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$ という全単射であるから、$1,2,\cdots,n$ の順列 $p(1),\cdots p(n)$ が定まる。逆に $1,\cdots,n$ の順列 $p_1,\cdots,p_n$ があれば $p(i) = p_i (1 \leqq i \leqq n)$ とおくことにより全単射 $p : \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$ が定まる。これを $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ と表す。この表示は $(2,n)$ 形行列とみなせるが、行列として扱うわけではない。順列 $p_1,\cdots,p_n$ を全単射 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ とは同一視できるから S_n は $n!$ 個の要素より成る有限集合であることがわかる（数学Ｉ）。

<u>例</u>　$n=4$ のとき、順列 2 3 4 1 と同一視される全単射 p は $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ で表される。$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ も明らか。

例2.1　$\mathrm{S}_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{S}_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$,

$\mathrm{S}_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\right.$

$\left.\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$ である。

$1,2,\cdots,n$ の中の特定の 2 個の数を交換し、他の $n-2$ 個の数をかえない並びかえを互換という。

例　$n=3$ のとき $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ は互換であり $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ は互換でない。S_3 には互換は 3 個ある。一般に S_n には $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の互換がある（数学 I ）。

ここでは証明しないが次が成り立つ。

補題2.2　(i)　任意の $p\in\mathrm{S}_n$ は有限個の互換の積として表される。
(ii)　$\sigma_1,\cdots,\sigma_s,\ \tau_1,\cdots,\tau_t$ を互換とするとき、

$$\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_s=\tau_1\circ\cdots\circ\tau_t\ \Rightarrow\ s-t\,\text{は偶数}$$

が成り立つ。

定義　$p\in\mathrm{S}_n$ が互換の積として $p=\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_s$ と表されるとき、$sgn(p)=(-1)^s$ とおき、p の符号という。これにより写像 $sgn:\mathrm{S}_n\to\{1,-1\}$ が定義されたことになる。

性質　(i)　$p,q\in\mathrm{S}_n$ に対し $sgn(p\circ q)=sgn(p)\cdot sgn(q)$
(ii)　$sgn(e)=1$
(iii)　$p\in\mathrm{S}_n$ に対し $sgn(p)=sgn(p^{-1})$

符号に関して第 2 節以下で用いられるのは上記の性質の他には次の結果だけである。

補題2.3　$n=3$ のとき、

$sgn\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=1,\ sgn\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=1,\ sgn\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=1,$

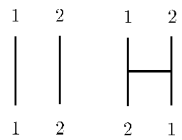
$sgn\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=-1,\ sgn\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=-1,\ sgn\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=-1$

<u>証明</u>　性質 (ii) より $sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = sgne = 1$ となる。また $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ より $sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1$ となる。同様に $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ より $sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1$ となる。残りの 3 つはすべて互換だから符号は -1 になる。

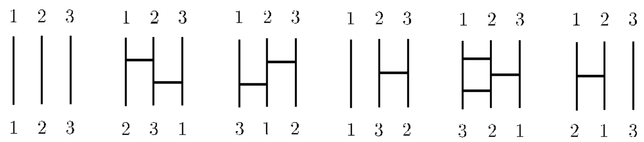
証明終

<u>あみだくじ</u>　順列はすべてあみだくじで表される。

<u>例</u>　$n = 2$ のとき、



$n = 3$ のとき、



順列 P をあみだくじで表すとき、横棒の数を s とすれば $sgn(\mathrm{P}) = (-1)^s$ となる。
このことからも補題2.3 が再確認できる。

2.2　行列式の定義

<u>定義</u>　n 次正方行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ に対して

$$\det \mathrm{A} = \sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

とおき A の行列式という。これにより写像 $\det : \mathrm{M}(n;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ が定義される。

行列式の計算は第 2 章の重要な課題である。はじめに $n = 1, 2, 3$ の場合を考える。

<u>例</u>　(i)　$n = 1$ のとき、$\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$

(ii)　$n = 2$ のとき、$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 、即ち $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ 。

(iii)　$n = 3$ のとき、$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$

<u>証明</u>　(i)　$\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $sgn \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ よりわかる。

(ii)　$\mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$, $sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$ より

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき $sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} = a_{11}a_{22}$ ，$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} = -a_{12}a_{21}$ となる。これらを加えて求める式を得る。

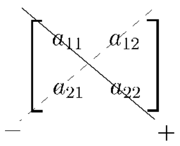
(iii)　$n = 3$ のとき、例 2.1 と補題 2.3 より

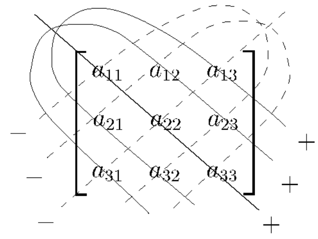
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = a_{11}a_{22}a_{33},$$
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = a_{12}a_{23}a_{31},$$
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = a_{13}a_{21}a_{32},$$
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = -a_{11}a_{23}a_{32},$$
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = -a_{13}a_{22}a_{31},$$
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = -a_{12}a_{21}a_{33},$$

となる。これらをすべて加えて求める式を得る。

証明終

<u>覚え方</u>　（サラスの方法）　$n=1$ についてはよいであろう。

$n=2$ ：


$n=3$ ：


<u>注意</u>　$n \geqq 4$ の場合にこのような方法を適用してはならない。$n \geqq 4$ のときの行列式の計算方法は第 3 節で説明する（補題 2.6 など）。

<u>補題 2.4</u>　A を正方行列とするとき $\det({}^t\mathrm{A}) = \det \mathrm{A}$ となる。即ち行列の行と列をとりかえても行列式は変わらない。

<u>証明</u>　複素数の積は交換可能だから任意の $q \in \mathrm{S}_n$ に対して $a_{1p(1)} \cdot \cdots \cdot a_{np(n)} = a_{q(1)pq(1)} \cdot \cdots \cdot a_{q(n)pq(n)}$ となる。特に $q = p^{-1}$ とすれば $a_{1p(1)} \cdot \cdots \cdot a_{np(n)} = a_{q(1)1} \cdot \cdots \cdot a_{q(n)n}$ となる。符号の性質 (iii) より $sgn(p)a_{1p(1)} \cdot \cdots \cdot a_{np(n)} = sgn(q)a_{q(1)1} \cdot \cdots \cdot a_{q(n)n}$ となる。補題 2.1, (ii) より $\det \mathrm{A} = \det({}^t\mathrm{A})$ がわかる。

証明終

<u>補題 2.5</u>　$\mathrm{A}_{11}, \mathrm{A}_{22}$ を正方行列とするとき、

$$\det \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix} = \det \mathrm{A}_{11} \cdot \det \mathrm{A}_{22} = \det \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$$

<u>証明</u>　補題 2.4 より左の等号を示せば十分である。$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$ とおく。A を n 次、A_{11} を r 次とすれば A_{22} は $n-r$ 次となる。A の (i,j) 成分を a_{ij} とおけば、「$r+1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq r \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0$」が成り立つ。従って $p \in \mathrm{S}_n$ に対し、もし $p(r+1), \cdots, p(n)$ の中に r 以下の数があれば $a_{1p(1)} \cdot \cdots \cdot a_{np(n)} = 0$ となる。よって $\det \mathrm{A}$ の定義式において $\{p(r+1), \cdots, p(n)\} = \{r+1, \cdots, n\}$ となる $p \in \mathrm{S}_n$ についてだけ加えればよい。このとき $\{p(1), \cdots, p(r)\} = \{1, \cdots, r\}$ となるから、p の制限写像は $\{1, \cdots, r\} \to \{1, \cdots, r\}$ という全単写及び $\{r+1, \cdots, n\} \to \{r+1, \cdots, n\}$ という全単射をひきおこす。これらをそれぞれ σ, τ と書けば $\sigma \in \mathrm{S}_r,\ \tau \in \mathrm{S}_{n-r}$ と考えられ、

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{A} &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} \sum_{\tau \in \mathrm{S}_{n-r}} sgn(\sigma) sgn(\tau) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r\sigma(r)} \cdot a_{r+1}\tau(r+1) \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} ss \cdots a_{r\sigma(r)} \sum_{\tau \in \mathrm{S}_{n-r}} sgn(\tau) a_{r+1}\tau(r+1) \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \det \mathrm{A}_{11} \cdot \det \mathrm{A}_{22}
\end{aligned}$$

となる。

<u>系</u>　A が 3 角行列 $\Rightarrow$ $\det \mathrm{A} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_n$ ：対角成分の積となる。特に $\det \mathrm{O} = 0,\ \det \mathrm{E} = 1$ である。

2.3　多重線形性と交代性

ここでは行列を縦ベクトルにより分割して行列式の性質を調べる。

<u>定理 2.1</u>　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}'_j, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ；

(i)　$\det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}'_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}'_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

(ii)　$\det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \alpha\mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

即ちひとつの列が和になれば行列式も和になり、ひとつの列が α 倍されれば行列式も α 倍される。

<u>証明</u>　(i)　補題 2.4 より左辺$= \displaystyle\sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) a_{p(1)1} \cdots (a_{p(j)j} + a'_{p(j)j}) \cdots a_{p(n)n}$

$= \displaystyle\sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) a_{p(1)1} \cdots a_{p(j)j} \cdots a_{p(n)n} + \sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) a_{p(1)1} \cdots a'_{p(j)j} \cdots a_{p(n)n} =$ 右辺となる。

(ii)　同じく補題 2.4 より左辺$= \displaystyle\sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) a_{p(1)1} \cdots (\alpha a_{p(j)j}) \cdots a_{p(n)n}$

$= \alpha \displaystyle\sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) a_{p(1)1} \cdots a_{p(j)j} \cdots a_{p(n)n} =$ 右辺となる。

証明終

<u>系</u>　(i)　ひとつの列がすべて 0 なら行列式も 0 である。

(ii)　A が n 次正方行列、$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \det(\alpha \mathrm{A}) = \alpha^n \det \mathrm{A}$

<u>定理 2.2</u>　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^n,\ q \in \mathrm{S}_n$ に対して $\det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{q(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{q(n)} \end{bmatrix} = sgn(q) \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ が成り立つ。即ち列を並べかえると行列式はその符号倍される。

<u>証明</u>　$b_{ij} = a_{iq(j)}\ (1 \leqq i, j \leqq n)$ とおけば

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{q(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{q(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

となる。従って行列式の定義、符号の性質 (i)、補題 2.1, (i) より

$\det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{q(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{q(n)} \end{bmatrix} = \displaystyle\sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) b_{1p(1)} \cdots b_{np(n)}$

$= \displaystyle\sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) a_{1qp(1)} \cdots a_{nqp(n)} = sgn(q) \sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(q \circ p) a_{1q\circ p(1)} \cdots a_{nq\circ p(n)}$

$= sgn(q) \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ となる。

証明終

<u>系</u>　(i)　$i \neq j \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$
$= -\det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

(ii)　$i \neq j,\ \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = 0$

(iii)　$i \neq j \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j + \alpha\mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

$= \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

<u>証明</u>　(i)　定理2.2 で q を i と j をとりかえる互換とすればよい。
(ii)　は (i) より明らか。
(iii) 定理2.1 及び系 (ii) より左辺$= \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} =$ 右辺となる。

証明終

定理 2.1 の性質を多重線形性といい、定理 2.2 の性質を交代性という。ここでは縦ベクトルによる分割、即ち列に関する性質として考えて来たが、補題 2.4 により横ベクトルによる分割、即ち行に関する性質としても全く同様のことが成り立つ。

<u>例</u>　n 次単位行列の第 i 行と第 j 行をとりかえた行列を $\mathrm{P}_n(i,j)$ とおくと $\det \mathrm{P}_n(i,j) = -1$ となる。

以上の性質を用いれば $n \geqq 4$ の場合の行列式の計算が実行できる。これについては「定理2.1 、定理2.2 及びその系を用いて補題2.5 が使える形に変形して、より小さいサイズの行列式の計算に帰着させ、最終的には $n \leqq 3$ の場合に帰する」というのが定跡である。まとめておこう。

<u>補題2.6</u>　行列式の計算は次のようにすればより小さいサイズの計算に帰着し得る；

n 次正方行列 A が与えられる。

*step*1.　$\mathrm{A} = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A} = 0$ なら $\det \mathrm{A} = 0$ である（END）。
$\mathrm{A} \neq 0$ なら次に進む。

*step*2.　$a_{ij} \neq 0$ となる $i, j (1 \leqq i, j \leqq n)$ が存在する。行や列のとりかえにより、これを $(1,1)$ 成分に移動する。即ち
$\mathrm{A}_1 = \left[\begin{array}{c|c} a_{ij} & * \\ \hline * & \end{array}\right]$ 形にする。このとき $\det \mathrm{A} = \pm \det \mathrm{A}_1$ である。

*step*3.　第 1 行の何倍かを他の行に加えることにより
$\mathrm{A}_2 = \left[\begin{array}{c|c} a_{ij} & * \\ \hline 0 & \mathrm{A}' \end{array}\right]$ 形に変形する。このとき $\det \mathrm{A}_1 = \det \mathrm{A}_2 = a_{ij} \det \mathrm{A}'$
ここで A' は $n-1$ 次正方行列である。 $\det \mathrm{A} = \pm a_{ij} \det \mathrm{A}'$（符号は *step*2 で決まる）であるから A の行列式の計算が A' の行列式の計算に帰着された。

<u>注意</u>　(i)　*step*2 で a_{ij} を $(1,1)$ 成分に移動したが、 (n,n) 成分に移してもよい。
(ii)　*step*3 で行を列にかえてもよい。
(iii)　$a_{ij} = 1$ となるものかあったらそれを $(1,1)$ 成分または (n,n) 成分に移すとよい。

例　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ に対し $\det A$ を計算する。

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{第 2 行に第 4 行の -1 倍を加えた}}{\overset{\longrightarrow}{=}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{補題 2.5}}{\overset{\longrightarrow}{=}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで $n = 3$ の公式を用いてもよいが、さらに

$$\underset{\text{第 1 行に第 3 行の -1 倍を加えた}}{\overset{\longrightarrow}{=}} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

例　$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ に対し $\det A$ を計算する。

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{第 1 行と第 2 行をとりかえた}}{\overset{\longrightarrow}{=}} -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\longrightarrow}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -1 & -14 \\ 0 & -11 & -5 & -6 \\ 0 & 11 & 9 & 17 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -11 & -1 & -14 \\ -11 & -5 & -6 \\ 11 & 9 & 17 \end{bmatrix}$$

第 2 行に第 1 行の -3 倍を加え、
第 3 行に第 1 行の -2 倍を加え、
第 4 行に第 1 行の 3 倍を加えた。

$$\underset{\text{第 1 列の } -11 \text{ を前に出した}}{\overrightarrow{=}} 11\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 1 & -5 & -6 \\ -1 & 9 & 17 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{第 2 行に第 1 行の } -1 \text{ 倍を加え、} \\ \text{第 3 行に第 1 行を加えた。}}}{\overrightarrow{=}} 11\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 11\det\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = 11 \times (-12 - 64) = -836$$

<u>例 2.2</u>　$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ を計算する。

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{第 2 行に第 1 行の } -a \text{ 倍を加え、} \\ \text{第 3 行に第 1 行の } -a^2 \text{ 倍を加えた。}}}{\overrightarrow{=}} \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{補題 2.5}}{\overrightarrow{=}} \det\begin{bmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{第 1 列の } b \cdot a \text{ を前に出し、} \\ \text{第 2 列の } c \cdot a \text{ を前に出した。}}}{\overrightarrow{=}} (b-a)(c-a)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

<u>注意</u>　このように多重線形性と交換性を用いれば行列式の具体計算が可能となる。のみならずこの 2 性質は行列式を特徴づける。即ち次ぎが成り立つ；写像 $f : \mathrm{M}(n;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ が多重線形性と交代性及び $f(\mathrm{E}) = 1$ をみたせば $f = \det$ となる。証明は略す。

<u>定理 2.3</u>　A, B を n 次正方行列とするとき $\det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B}$ となる。

<u>証明</u>　A の (i,j) 成分を a_{ij} 、 B の (i,j) 成分を b_{ij} とすれば、積の定義より AB の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ となる。ここで列ベクトルに関する多重線形性を適用するために、第 j 列の和に関する添字は k のかわりに k_j を用いる。よって

$$\det(\mathrm{AB}) = \det\begin{bmatrix} \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1}b_{k_11} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_n}b_{k_nn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k_1=1}^{n} a_{nk_1}b_{k_11} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n}b_{k_nn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} b_{k_11}\cdots b_{k_nn}\det\begin{bmatrix} a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk_1} & \cdots & a_{nk_n} \end{bmatrix}$$

ここでもし $k_1, \cdots, k_n$ の中に同じものがあったあら交代性の系より $\det\begin{bmatrix} a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk_1} & \cdots & a_{nk_n} \end{bmatrix} = 0$ となるから、和 : $\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}(\quad)$ は $k_1, \cdots, k_n$ がすべて異なるものについて加えればよい。このとき $k_1, \cdots, k_n$ は $1, \cdots, n$ の順列であるから $\mathrm{P}(i) = k_i (1 \leqq i \leqq n)$ と定義すれば $\mathrm{P} \in \mathrm{S}_n$ となる。従って交代性より

$\det(\mathrm{AB}) = \sum_{p\in\mathrm{S}_n} b_{p(1)1}\cdots b_{p(n)n}\det\begin{bmatrix} a_{1p(1)} & \cdots & a_{1p(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{np(1)} & \cdots & a_{np(n)} \end{bmatrix}$

$= \sum_{p\in\mathrm{S}_n} b_{p(1)1}\cdots b_{p(n)n} sgn(p)\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$= \det\mathrm{A}\cdot\sum_{p\in\mathrm{S}_n} sgn(p) b_{p(1)1}\cdots b_{p(n)n} = \det\mathrm{A}\cdot\det({}^t\mathrm{B})$ となる。最後に補題 2.4 を用いれば $\det(\mathrm{AB}) = \det\mathrm{A}\cdot\det\mathrm{B}$ がわかる。

証明終

系　$\det(\mathrm{A}^m) = (\det\mathrm{A})^m,\ m \geqq 1$

例　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対称分割とし、A_{11} が正則であるとする。このとき $\det\mathrm{A} = \det\mathrm{A}_{11}\cdot\det(\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12})$ となる。

証明　$\mathrm{A}'_{22} = \mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12}$ とおくと (1.16) 、補題 2.5 とその系及び定理 2.3 より $\det\mathrm{A} = \det\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}'_{22} \end{bmatrix} = \det\mathrm{A}_{11}\cdot\mathrm{A}'_{22}$ となる。

証明終

これを用いても補題 2.6 と同様のことができる。

補題 2.6′　行列式の計算は次のようにしてもより小さいサイズの計算に帰着できる：与えられた n 次正方行列 A に対して、
$step1, step2$ は補題 2.6 と同じとする。従ってはじめから $a_{11} \neq 0$ としてよい。このとき、

$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \hline \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{array}\right]$ とすれば、$\det \mathrm{A} = \left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)^{n-2} \det(a_{11}\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{12})$
ここで $a_{11}\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{12}$ は $n-1$ 次正方行列である。

例　$(ax+by)(cu+dv)-(au+bv)(cx+dy)=(ad-bc)(xv-yu)$ 、特に $(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ となることを定理 2.3 を用いて示す。上の式は定理 1.1 の証明に用いたものである。

証明　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}$ とおくと
$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{bmatrix}$ となるから
左辺 $= \det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B} =$ 右辺となる。この式に $c=-b,\ d=a,\ u=-y,\ v=x$ を代入すれば下の式になる。

証明終

注意　例 1.10 を思い出して $\alpha = a+ic,\ z = x+iy$ とおくと $|\alpha z|^2 = |\alpha|^2|z|^2$ 即ち $|\alpha z| = |\alpha||z|$ がわかる。但し $a,c,x,y \in \mathbb{R}$ とする。

2.4　余因子行列

<u>定義</u>　n 次正方行列 A に対し、 A の第 i 行と第 j 列を取り去って得られる $(n-1)$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを A の (i,j) 余因子と呼び Δ_{ij} と表す。即ち

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} a_{11} \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots\ a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \cdots} & \boxed{a_{ij}} & \boxed{\cdots\ a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots\ a_{nn} \end{bmatrix} \text{第 } i \text{ 行をトル} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

第 j 列をトル

さらに

$$\tilde{\mathrm{A}} = {}^t\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

とおいて A の余因子行列という。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき、

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{bmatrix} = d\ ,\ \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{bmatrix} = -c\ ,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} \cancel{a} & b \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{bmatrix} = -b\ ,\ \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} a & \cancel{b} \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{bmatrix} = a$$

となる。よって

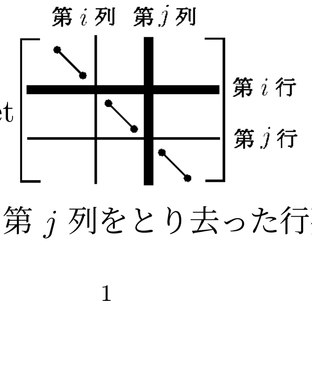
$$\tilde{\mathrm{A}} = {}^t\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

がわかる。

<u>例 2.3</u>　A が上半 3 角行列ならば $\tilde{\mathrm{A}}$ も上半 3 角行列となる。

<u>証明</u>　$i < j$ とする。

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det$$



であった。 A から第 i 行、第 j 列をとり去った行列は上半 3 角行列であり、その対角成分は

$$a_{11}, \cdots, a_{i-1\ i-1}, a_{i+1\ i}, \cdots, a_{j\ j-1}, a_{j+1\ j+1}, \cdots, a_{nn}$$

である。ここで $a_{i+1\ i} = \cdots = a_{j\ j-1} = 0$ に注意すれば $\Delta_{ij} = 0$ がわかる。従って $\tilde{\mathrm{A}}$ は上半3角行列となる。

証明終

補題2.7　A を n 次正方行列とするとき、任意の $i, j (1 \leqq i, j \leqq n)$ に対して

$$\det \mathrm{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj} a_{kj}$$

が成り立つ。

証明　はじめに次の式を示す；

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a_{ij} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{ij}\Delta_{ij}$$

左辺$= (-1)^{i-1} \det \begin{bmatrix} 0 & \cdots 0 & a_{ij} & 0 \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$　行をひとつづつとりかえて第 i 行を1番上に移動した。

$= (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \det \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{ij} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$　列をひとつづつとりかえて第 j 行を1番右に移動した。

$= (-1)^{i+j} a_{ij} \det \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] = a_{ij}\Delta_{ij}$　；即ち右辺である。

これを用いれば、多重線形性より

$$
\det \mathrm{A} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
= \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
= a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} \text{ となる。}
$$

$\det \mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj} a_{kj}$ も同様にできるので略。

証明終

注意　これを行列式の余因子展開という。補題 2.6 や補題 2.6′ と同様 n 次正方行列の行列式の計算を $(n-1)$ 次正方行列の行列式の計算に帰着させる公式である。

定理 2.4　A を正方行列とするとき、 $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{E} = \mathrm{A}\tilde{\mathrm{A}}$ となる。

証明　はじめに「 $i \neq j \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = 0$ 」を示す。 A の第 j 行を第 i 行におきかえた行列を A' とする。即ち

$$
\mathrm{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ このとき } \det \mathrm{A}' = 0 \text{ である。}
$$

A' の (i,j) 成分を a'_{ij} 、 (i,j) 余因子を Δ'_{ij} とおくと $a'_{jk} = a_{ik}$, $\Delta'_{jk} = \Delta_{jk}$ となる。A' に補題 2.7 を適用すれば

$$
0 = \det \mathrm{A}' = \sum_{k=1}^{n} a'_{jk}\Delta'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk}
$$

となる。

補題 2.7 と上の結果を合せて書けば

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = (\det \mathrm{A})\delta_{ij}$$

となる。このとこは $\mathrm{A}\tilde{\mathrm{A}} = (\det \mathrm{A})\mathrm{E}$ を示している。全く同様に $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{E}$ もわかる。

証明終

<u>例</u>

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

となる。

これは定理 1.1 の証明に用いた式である。

第３章

この章では行列の左右から正則行列をかけてなるべく簡単な形（成分に 0 が多い形）に変形することを考える。そのための手段として用いるのが基本変形であり、結果として生ざされるのが階数である。

3.1　基本行列と基本変形

この節の目標は「与えられた (m,n) 形行列 A に対して m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q をうまく選んで PAQ を簡単な形にすること」である。 A に対して P, Q をどうとるかが問題であるが、次のような特別な形の正則行列を導入することから始める。

<u>基本行列</u>　(i,j) 成分が $\alpha(\neq 0)$ 、その他の対角成分がすべて 1 である n 次対角行列を $\mathrm{P}_n(i;\alpha)$ と書き、第１基本行列という；

$$\mathrm{P}_n(i;\alpha) = \begin{array}{c@{}l} \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \alpha & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{bmatrix} & \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } i \text{ 列} & \end{array} ,\ \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$$

(i,j) 成分 $(i \neq j)$ だけが α で他の成分がすべて 0 である n 次正方行列に n 次単位行列を加えた行列を $\mathrm{P}_n(i,j;\alpha)$ と書き、第２基本行列という；

$$\mathrm{P}_n(i,j;\alpha) = \begin{array}{c@{}l} \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & \\ \cdots & \ddots & \cdots & \alpha & \cdots \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & \ddots & \\ & & & \vdots & 1 \end{bmatrix} & \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 列} & \end{array} ,\ i \neq j,\ \alpha \in \mathbb{C}$$

これらは共に n 次正則行列であり、

$$\mathrm{P}_n(i;\alpha)^{-1} = \mathrm{P}_n\left(i;\frac{1}{\alpha}\right),\ \mathrm{P}_n(i,j;\alpha)^{-1} = \mathrm{P}_n(i,j;-\alpha)$$

となる。即ち第１基本行列の逆行列は第１基本行列であり、第２基本行列の逆行列は第２基本行列である。

<u>例</u> $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>例</u>　n 次単位行列の第 i 行と第 j 行を交換した行列を $\mathrm{P}_n(i,j)$ とおく $(i \neq j)$ ；

$$
\mathrm{P}_n(i,j) = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
\cdots & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \\
 & & \vdots & 1 & \vdots & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
\cdots & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \\
 & & \vdots & & \vdots & 1 & \\
 & & & & & & \ddots \\
 & & \vdots & & \vdots & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{第}\,i\,\text{行} \\ \\ \\ \\ \text{第}\,j\,\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array} \\
\text{第}\,i\,\text{列} \quad \text{第}\,j\,\text{列}
\end{array}
\quad ,\ i \neq j
$$

このとき $\mathrm{P}_n(i,j)^2 = \mathrm{E}$ 、即ち $\mathrm{P}_n(i,j)^{-1} = \mathrm{P}_n(i,j)$ でありかつ

$$\mathrm{P}_n(i,j) = \mathrm{P}_n(i,j;1)\mathrm{P}_n(i;-1)\mathrm{P}_n(j,i;1)\mathrm{P}_n(i,j;-1)$$

となる。即ち $\mathrm{P}_n(i,j)$ は第１、第２基本行列の積として表される。

<u>証明</u>　前半は明らか。後半は $n=2,\ i=1,\ j=2$ として示す。このとき

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

<u>証明終</u>

<u>注意</u>　この例で両辺の転置行列を考えれば

$$\mathrm{P}_n(i,j) = \mathrm{P}_n(j,i;-1)\mathrm{P}_n(i,j;1)\mathrm{P}_n(i;-1)\mathrm{P}_n(j,i;1)$$

となる。従って表し方は一意的でない。また $\mathrm{P}_n(i,j)$ は３個以下の第１、第２基本行列の積では表せないことが証明されている。

$\mathrm{P}_n(i,j)$ は第１、第２基本行列の積として表されるので基本行列と呼ぶのは少々抵抗があるが、

$\mathrm{P}_n(i,j)$ は簡単な形である
$\mathrm{P}_n(i,j)$ は第５章で特別な役割をになう

という理由によりこれを第３基本行列と呼び、基本行列の仲間に入れることとする。第１、第２、第３基本行列を総称して基本行列という。

<u>例</u>　２次基本行列は次の通り：

第１基本行列は $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$ という２種類

第２基本行列は $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ という２種類

第３基本行列は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ただひとつ。

問　上の例に習って３次基本行列をすべて書きあげよ。

解

第１基本行列は $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$，$\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$ という３種類。

第２基本行列は $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$，$\alpha \in \mathbb{C}$ という６種類。

第３基本行列は $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ という３個。

例 3.1　A が第３基本行列の積 $\Rightarrow$ ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}^{-1}$ 。

証明　$\mathrm{A} = \mathrm{Q}_1 \cdots \mathrm{Q}_r$ で各 Q_i が第３基本行列であれば、${}^t\mathrm{Q}_i = \mathrm{Q}_i = \mathrm{Q}_i^{-1}$ より ${}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{Q}_r \cdots {}^t\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_r^{-1} \cdots \mathrm{Q}_1^{-1} = \mathrm{A}^{-1}$ となる。

証明終

次に行列に基本行列をかけたらどうなるかを調べる。

例　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ とおく。このとき

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 & \alpha b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$；第 2 行を α 倍する（$\alpha \neq 0$）。

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \alpha a_1 + c_1 & \alpha a_2 + c_2 & \alpha a_3 + c_3 & \alpha a_4 + c_4 \end{bmatrix}$
; 第 3 行に第 1 行の α 倍を加える。

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$；第 1 行と第 3 行を交換する。

これを一般化する。

例 3.2　(i)　(m,n) 形行列を行ベクトルにより分割して考える。 $\mathbf{b}_i \in {}^t\mathbb{C}^n (1 \leqq i \leqq m)$, $i<j$ とするとき

$$\mathrm{P}_m(i;\alpha)\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_i\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \alpha\mathbf{b}_i\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}$$

；第 i 行を α 倍する（ $\alpha \neq 0$ ）。

$$\mathrm{P}_m(i,j;\alpha)\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_i\\ \vdots\\ \mathbf{b}_j\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_i+\alpha\mathbf{b}_j\\ \vdots\\ \mathbf{b}_j\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}$$

；第 i 行に第 j 行の α 倍を加える（ $i \neq j$ ）。

$$\mathrm{P}_m(i,j)\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_i\\ \vdots\\ \mathbf{b}_j\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_j\\ \vdots\\ \mathbf{b}_i\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}$$

；第 i 行と第 j 行とを交換する（ $i \neq j$ ）。

(ii)　同じく列ベクトルにより分割して考える。 $\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^m, (1 \leqq j \leqq n)$, $i<j$ とするとき

$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\mathrm{P}_n(i;\alpha)=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \alpha\mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$ ；第 i 列を α 倍する（ $\alpha \neq 0$ ）。

$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\mathrm{P}_n(i,j;\alpha)=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j+\alpha\mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$
；第 j 列に第 i 列の α 倍を加える（ $i \neq j$ ）。

$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\mathrm{P}_n(i,j)=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$
；第 i 列と第 j 列とを交換する（ $i \neq j$ ）。

証明　例 1.6 より明らか。

（証明終）

例 3.3　A を正方行列とするとき

(i)　A は対角行列 $\Leftrightarrow$ すべての第 1 基本行列 B に対して AB = BA となる。

(ii)　A はスカラー行列 $\Leftrightarrow$ すべての第 2 基本行列 B に対して AB = BA となる。
$\Leftrightarrow$ すべての正則行列 B に対して AB = BA となる。
$\Leftrightarrow$ すべての正方行列 B に対して AB = BA となる。

<u>証明</u>　(i) $\Rightarrow$: は第１基本行列が対角行列であることより明らか。
$\Leftarrow$: $\mathrm{B} = \mathrm{P}(i;2)(1 \leqq i \leqq n)$ とおく。 $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ より

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 2a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 2a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 2a_{i1} & \cdots & 2a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

となる。よって $i \neq j \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0$ がわかる。
(ii) 「すべての第２基本行列と交換可能 $\Rightarrow$ A はスカラー行列」のみを示せばよい。 (i,j) 成分だけ 1 で他の成分がすべて 0 であるような n 次正方行列を $In(i,j)$ をすれば $i \neq j$ のとき $\mathrm{B} = In + In(i,j)$ は第２基本行列である。 $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ より $\mathrm{A}In(i,j) = In(i,j)\mathrm{A}$ を得る。例 1.6 及び例 $1.6'$ より A はスカラー行列となる。

証明終

<u>基本変形</u>　行列に関する次の３種類の操作を行に関する基本変形という；
（行１）　ある行に 0 でない数をかける。
（行２）　ある行に他の行のスカラー倍を加える。
（行３）　異なる２つの行を交換する。
同様に次の３種類の操作を列に関する基本行列という；
（列１）　ある列に 0 でない数をかける。
（列２）　ある列に他の列のスカラー倍を加える。
（列３）　異なる２つの列を交換する。

行に関する基本変形、列に関する基本変形をあわせて単に基本変形と呼ぶ。（行１）は第１基本行列を左からかけることにより、（行２）は第２基本行列を左からかけることにより、（行３）は第３基本行列を左からかけることにより生ずることが例 3.2 よりわかる。同様に列に関する基本変形は基本行列を右からかけることにより生ずる。基本行列の逆行列はまた基本行列であるから、行列 A が行列 B に基本変形でうつれば B は A に基本変形でうつる。

<u>例</u>　(i) （行３）は（行１）、（行２）を４回くり返せば得られる。列についても同様。
(ii) 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とは次のように４回の基本変形で移りあう：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{(\text{行}2)}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{(\text{行}2)}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{(\text{行}1)}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{(\text{行}2)}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同様に $\mathrm{P}_n(i,j)$ と E_n とは（行１）１回、（行２）３回で移りあう。

<u>問題</u>　上の例の (i) と (ii) の関係を考えよ。

<u>補題 3.1</u>　(m, n) 形行列 A は適当な基本変形を有限回行うことにより $\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $0 \leqq r \leqq \min\{m, n\}$ という形になる。

<u>証明</u>　以下のような段階をふんで示す。

*step*1.　$\mathrm{A} = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A} = 0$ なら $r = 0$ として求める形である（END)。
もし $\mathrm{A} \neq 0$ なら次に進む。

*step*2.　$a_{ij} \neq 0$ となる $i, j (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ が存在する。このとき（行３)、(列３）を行い、 a_{ij} を $(1, 1)$ 成分に移動する。

*step*3.　第１行に $\dfrac{1}{a_{ij}}$ をかける、即ち（行１）を行うことにより $(1, 1)$ 成分を 1 にできる。従って A は
$\left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline * & * \end{array}\right]$ 形に変形される。

*step*4.　第１行の何倍かを他の行に加える、即ち（行２）を $m - 1$ 回行うことにより
$\left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$ 形に変形する。

*step*5.　第１列の何倍かを他の列に加える、即ち（列２）を $n - 1$ 回行うことにより
$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{A}' \end{array}\right]$ 形に変形する。

*step*1′.　$\mathrm{A}' = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A}' = 0$ なら $r = 1$ として求める形である（END)。
もし $\mathrm{A}' \neq 0$ なら次に進む。

*step*2′.　A' の成分で 0 でないものを $(2, 2)$ 成分に移動する。

*step*3′.　$(2, 2)$ 成分を 1 とする。

*step*4′.　$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right]$ 形にする。

*step*5′.　$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{A}'' \end{array}\right]$ 形にする。

*step*1″.　$\mathrm{A}'' = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A}'' = 0$ なら $r = 2$ として求める形である（END)。
もし $\mathrm{A}'' \neq 0$ なら次に進む。 ……

あとはこれをくり返せばよい。行列のサイズがひとつずつ減るからこの手順は必ず有限回で止まる。

証明終

<u>系</u>　A を正方行列とするとき、

A は正則 $\Leftrightarrow$ A は有限個の基本行列の積となる。
$\Leftrightarrow$ A は行に関する基本変形だけで E に移る。
$\Leftrightarrow$ A は列に関する基本変形だけで E に移る。
$\Leftrightarrow$ $XA = E$ となる正方行列 X が存在する。
$\Leftrightarrow$ $AY = E$ となる正方行列 Y が存在する。

<u>証明</u>　まず補題 1.3 , (ii) より「$B = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき、 B ：正則 $\Leftrightarrow$ $B = E$ 」に注意する。

① 正則 $\Rightarrow$ 基本行列の積；補題 3.1 より $P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = B$ と書ける。ここで $P_i,\ Q_j$ は基本行列である。 A は正則だから補題 1.2 より B も正則となる。よって $B = E$ 。このとき $A = P_1^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ となる。即ち A はき本行列の積である。

② 基本行列の積 $\Rightarrow$ 行に関する基本変形だけで E に移る；
$A = P_1 \cdots P_s$ ；各 P_i は基本行列 $\Rightarrow$ $(P_s^{-1} \cdots P_1^{-1})A = E$ 。

③ 行に関する基本変形だけで E に移る $\Rightarrow$ 正則；
$(P_s \cdots P_1)A = E$ $\Rightarrow$ $A = P_1^{-1} \cdots P_s^{-1}$ は正則。

②、③で行を列にかえても同様である。

④ $XA = E$ $\Rightarrow$ A は正則；背理法で示す。もし A が正則でないと $PAQ = B$ において $r \leqq n-1$ となる。$AQ = P^{-1}B$ より $Q = (XA)Q = X(AQ) = X(P^{-1}B) = (XP^{-1})B$ となる。ここで

$$XP^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ r & n-r \end{matrix} & \end{array}$$
と表せば $Q = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{bmatrix}$ となる。これは Q の正則性に矛盾する。

④$'$ $AY = E$ $\Rightarrow$ A は正則； $AY = E$ $\Rightarrow$ ${}^tY{}^tA = E$ 。④より ${}^tA$ は正則。補題 1.3 , (i) より A も正則となる。

証明終

<u>補題 3.2</u>　$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を共に (m,n) 形行列とする。
$P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる m 次正方行列 P 及び n 次正方行列 Q が存在すれば $r = s$ となる。

<u>証明</u>　$r \leqq s$ としてよい。$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \end{matrix}$, $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{matrix}$ と対称分割する。このとき、$P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q =$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12} \\ \mathrm{P}_{21} & \mathrm{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_{11} & \mathrm{Q}_{12} \\ \mathrm{Q}_{21} & \mathrm{Q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_{11}\mathrm{Q}_{11} & \mathrm{P}_{11}\mathrm{Q}_{12} \\ \mathrm{P}_{21}\mathrm{Q}_{11} & \mathrm{P}_{21}\mathrm{Q}_{12} \end{bmatrix}$$ となるから

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P}_{11}\mathrm{Q}_{11} & \mathrm{P}_{11}\mathrm{Q}_{12} \\ \mathrm{P}_{21}\mathrm{Q}_{11} & \mathrm{P}_{21}\mathrm{Q}_{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{E}_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow s \\ \\ \end{array}$$

となる。よって $\mathrm{P}_{11}\mathrm{Q}_{11} = \mathrm{E}_r$, $\mathrm{P}_{21}\mathrm{Q}_{11} = 0$ 。補題3.1 の系より Q_{11} は正則。よって $\mathrm{P}_{21} = \mathrm{P}_{21}\mathrm{Q}_{11}\mathrm{Q}_{11}^{-1} = 0$ 。このことは $\mathrm{P}_{21}\mathrm{Q}_{12} = 0$ を示すから $r = s$ がわかる。

証明終

補題 3.1 と補題 3.2 をまとめて次を得る。

定理 3.1　任意の (m, n) 形行列 A に対して、 m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q をうまくとれば、

$$\mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ 0 \leqq r \leqq \min\{m, n\}$$

となる。しかもこの r は P, Q の選び方にはよらず、 A だけから一意的に定まる。

以上によりこの節の冒頭で述べた目標が達成された。特に「簡単な形」についても明らかとなった。

3.2　階数とその性質

ここでは行列の階数を定義して、その簡単な性質を述べる。

<u>定義</u>　(m, n) 形行列 A に対して、定理 3.1 により定まる r を A の階数といい $rank\mathrm{A}$ と表す。従って $0 \leqq rank\mathrm{A} \leqq \min\{m, n\}$ である。従って $\ell = \min\{m, n\}$ とするとき、

$$rank : M(m, n; \mathbb{C}) \ \rightarrow \ \{0, 1, 2, \cdots, \ell\}$$

という写像を得る。

補題 3.1 は行列の階数を求める具体的な手段を与えていることに注意する。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = 0 \ \Leftrightarrow \ rank\mathrm{A} = 0$ 。また $rank\mathrm{E}_n = n$ 。

<u>補題 3.3</u>　(m, n) 形行列 A, B に対して

$rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B} \ \Leftrightarrow$ $\mathrm{PAQ} = \mathrm{B}$ となる m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する。

$\Leftrightarrow$ A に適当な基本変形を有限回行うと B になる。

<u>証明</u>　① $rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B} \ \Rightarrow \ \mathrm{PAQ} = \mathrm{B}$; $\mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{P}_2\mathrm{BQ}_2$ となるから $\mathrm{P}_2^{-1}\mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1\mathrm{Q}_2^{-1} = \mathrm{B}$ となる。

② $\mathrm{PAQ} = \mathrm{B} \ \Rightarrow$ 有限回の基本変形で A は B に移る；補題 3.1 の系より P, Q は基本行列の積で表される。よって A を有限回基本変形すれば B になる。

③ 有限回の基本変形で A は B に移る $\Rightarrow \ rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B}$ ； B が有限回の基本変形で $\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ になれば A も同様である。

証明終

<u>例</u>　$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の階数を求める。

$$rank \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 1 行と第 2 行をとりかえた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 3 行に第 1 行の 2 倍を加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

第 2 行を $\dfrac{1}{2}$ 倍し、第 3 行を $\dfrac{1}{3}$ 倍した。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

第１列のスカラー倍を他の列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

第３行に第２行の -1 倍を加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第２列のスカラー倍を第３列、第４列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

<u>例</u> $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ の階数を求める。

$$rank \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

第１列と第２列をとりかえた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

第２行に第１行の -2 倍を加え、
第３行に第１行の -1 倍を加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第１列のスカラー倍を他の列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第２行を -1 倍した。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第２列のスカラー倍を第３列、第４列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第３行を $\dfrac{1}{2}$ 倍した。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

第３列の -1 倍を第４列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

例 3.4　$rank(^t\mathrm{A}) = rank\mathrm{A}$

証明　$\mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t\mathrm{Q}{}^t\mathrm{A}{}^t\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ よりわかる。

証明終

補題 3.4　A, B を行列、 $\mathbf{b}$ を縦ベクトルとするとき、

(i)　$rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} = rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B}$

(ii)　$rank\mathrm{A} \leqq rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \leqq rank\mathrm{A}+1$ 。特に $rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \end{bmatrix}$

証明　(i)　$r = rank\mathrm{A},\ s = rank\mathrm{B}$ として $\mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathrm{P}_2\mathrm{BQ}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする。
このとき

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{P}_2\mathrm{BQ}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \mathrm{E}_s & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。あとは行、列のとりかえにより E_s の 1 を上、左に移動させればよい。
(ii)　$r,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{Q}_1$ を上と同様とする。このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_1 \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1\mathrm{A} & \mathrm{P}_1\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1 & \mathrm{P}_1\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 & \mathbf{b}_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。このとき、$rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = rank\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathbf{b}_2 = 0$ 。そうでないときは $rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = rank\mathrm{A} + 1$ となる。

証明終

系　$rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ 0 \end{bmatrix} = rank\mathrm{A}$

証明　$rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ 0 \end{bmatrix} = rank^t \begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ 0 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{A} & 0 \end{bmatrix} = rank(^t\mathrm{A}) =$ $rank\mathrm{A}$ となる。

証明終

補題 3.5　行列 A, B の積が定義されるとき、 $rank(\mathrm{AB}) \leqq rank\mathrm{A}$, $rank(\mathrm{AB}) \leqq rank\mathrm{B}$ となる。即ち、

$$rank(\mathrm{AB}) \leqq \min\{rank\mathrm{A},\ rank\mathrm{B}\}$$

証明　$r = rank\mathrm{A},\ \mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする。$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \end{bmatrix} \updownarrow r$ とおけば

$$\mathrm{PAB} = \mathrm{PAQQ}^{-1}\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。補題 3.3, 3.4 より $rank(\mathrm{AB}) = rank(\mathrm{PAB}) = rank\begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = rank\mathrm{B}_1 \leqq r$ となる。同様に $s = rank\mathrm{B},\ \mathrm{PBQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とし、

$\mathrm{AP}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\overleftrightarrow{\quad s \quad}}{\mathrm{A}_1} & \mathrm{A}_2 \end{bmatrix}$ とおけば

$$\mathrm{ABQ} = \mathrm{AP}^{-1}\mathrm{PBQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{E}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

よって $rank(\mathrm{AB}) = rank(\mathrm{ABQ}) = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \end{bmatrix} = rank\mathrm{A}_1 \leqq s$ となる。

証明終

例 3.5　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix},\ a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{C} \Rightarrow rank\mathrm{A} \leqq 1$

証明　$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ とおくと $\mathrm{A} = \mathbf{ab}$ となる。よって $rank\mathrm{A} \leqq \min\{rank\mathbf{a}, rank\mathbf{b}\} \leqq 1$ となる。

証明終

次の補題は第 1 章第 5 節のつづきである。

補題 3.6　(m, n) 形行列 A を、写像 $\mathrm{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ とみるとき、
(i)　A は全射 $\Leftrightarrow\ m = rank\mathrm{A}$
(ii)　A は単射 $\Leftrightarrow\ n = rank\mathrm{A}$
(iii)　A は全単射 $\Leftrightarrow\ m = n = rank\mathrm{A}$

証明　一般に $\mathrm{PAQ} = \mathrm{B}$; P, Q は正則のとき、

A：単射 $\Leftrightarrow$ B：単射、A：全射 $\Leftrightarrow$ B：全射、$rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B}$

が成り立つから $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{E}_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ としてよい。このとき $r=rank\mathrm{A}$ である。

(i) $\Rightarrow$: 対偶を示す。$r \leqq m-1$ とする。このとき任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$ に対し $\mathrm{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}*\\ \vdots\\ *\\ 0\end{bmatrix}$ 形となるから $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^m$ は A の像に属さない。よって A は全射でない。

$\Leftarrow$: $m=rank\mathrm{A}\leqq n$ だから $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{E}_m & 0\end{bmatrix}$ となる。このとき任意の $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^m$ に対して $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{y}\\ 0\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^n$ とおけば $\mathrm{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathrm{E} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{y}\\ 0\end{bmatrix}=\mathrm{E}\mathbf{y}+0\cdot 0=\mathbf{y}$ となる。よって A は全射である。

(ii) $\Rightarrow$: 対偶を示す。$r\leqq n-1$ と仮定する。$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ とおくと $\mathbf{x}\neq 0$ かつ $\mathrm{A}\mathbf{x}=0$ となるから A は単射でない。

$\Leftarrow$: $n=rank\mathrm{A}\leqq m$ だから $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{E}_n\\ 0\end{bmatrix}$ となる。このとき $\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathrm{A}\mathbf{x}' \Rightarrow \begin{bmatrix}\mathrm{E}\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathrm{E}\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{x}' \Rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}'\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{x}'$ 。よって A は単射である。

(iii) は (i) と (ii) より明らか。

証明終

<u>系</u> n 次正方行列を、写像 A : $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ とみるとき、

$$\mathrm{A}\text{ は全射} \Leftrightarrow \mathrm{A}\text{ は単射} \Leftrightarrow \mathrm{A}\text{ は全単射}$$

<u>注意</u> これは例-1.4 の類似である。さらに補題 1.5 より、「A は全単射 $\Leftrightarrow$ A は正則」となることを思い出す。

第４章

この章では行列の正則性の判定と、正則であるとき逆行列を求める具体的な方法について述べる。また行列式と階数の関係を調べる。

4.1　行列式による方法

ここでは定理 2.3 及び定理 2.4 を用いて定理 1.1 の一般化を行う。定理 1.1 と次の定理 4.1 の関連については第２章の冒頭を参照のこと。

定理 4.1　A を正方行列とするとき
(i)　A は正則である。 $\Leftrightarrow$ $\det \mathrm{A} \neq 0$
(ii)　A が正則であるとき、

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \tilde{\mathrm{A}}$$

となる。

証明　(i)　$\Rightarrow$：　$\mathrm{XA} = \mathrm{E}$ となる X が存在するから定理 2.3 より $\det \mathrm{X} \cdot \det \mathrm{A} = 1$ となる。よって $\det \mathrm{A} \neq 0$
$\Leftarrow$：定理 2.4 より $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{E} = \mathrm{A}\tilde{\mathrm{A}}$ となる。よって $\det \mathrm{A} \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{\det \mathrm{A}} \tilde{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E} = \mathrm{A} \cdot \frac{1}{\det \mathrm{A}} \tilde{\mathrm{A}}$$

となるから A は正則である。これより (ii) も示された。

証明終

系　A が正則ならば $\det(\mathrm{A}^m) = (\det \mathrm{A})^m,\ m \in \mathbb{Z}$ 。

注意　行列式が計算できれば $\tilde{\mathrm{A}}$ は求まる（第２章第４節）。従って定理 4.1 は「行列式が計算できれば、正則性の判定ができ、また正則であるとき逆行列を求め得る」ことを示している。

問題 4.1　定理 2.3 と定理 4.1 を用いて次を示せ。
(i)　$\mathrm{XA} = \mathrm{E}$ となる X が存在する $\Rightarrow$ A は正則。
(ii)　$\mathrm{AY} = \mathrm{E}$ となる Y が存在する $\Rightarrow$ A は正則。
(iii)　AB が正則 $\Rightarrow$ A も B も正則。

解答　(i)　$\mathrm{XA} = \mathrm{E} \Rightarrow \det \mathrm{X} \cdot \det \mathrm{A} = 1 \Rightarrow \det \mathrm{A} \neq 0 \Rightarrow$ A は正則。
(ii)　$\mathrm{AY} = \mathrm{E} \Rightarrow \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{Y} = 1 \Rightarrow \det \mathrm{A} \neq 0 \Rightarrow$ A は正則。
(iii)　AB が正則 $\Rightarrow \det(\mathrm{AB}) \neq 0 \Rightarrow \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B} \neq 0 \Rightarrow \det \mathrm{A} \neq 0$ かつ $\det \mathrm{B} \neq 0 \Rightarrow$ A は正則かつ B は正則。

解答終

例 4.1　A が正則な上半３角行列ならば A^{-1} も上半３角行列。

証明　例 2.2 より $\tilde{\mathrm{A}}$ は上半３角行列である。定理 4.1, (ii) より A^{-1} も上半３角行列となる。

証明終

例　A が n 次正方行列ならば $\det\tilde{\mathrm{A}} = (\det\mathrm{A})^{n-1}$ となる。

証明　定理 2.4 より $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det\mathrm{A})\mathrm{E}$ 。よって $\det\tilde{\mathrm{A}}\cdot\det\mathrm{A} = (\det\mathrm{A})^{n}$ 。もし $\det\mathrm{A} \neq 0$ ならば $\det\tilde{\mathrm{A}} = (\det\mathrm{A})^{n-1}$ となる。もし $\det\mathrm{A} = 0$ ならば $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = 0$ となる。ここで $\tilde{\mathrm{A}}$ が正則であると仮定すれば $\mathrm{A} = 0$ 、即ち $\tilde{\mathrm{A}} = 0$ となり矛盾。よって $\tilde{\mathrm{A}}$ は正則ではないから定理 4.1 より $\det\tilde{\mathrm{A}} = 0 = (\det\mathrm{A})^{n-1}$ となる。

証明終

例　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

解　$\det\mathrm{A} = 2 \neq 0$ より A は正則である。さらに

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -4$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = 1$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = 1$$

となるから

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\tilde{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\,{}^{t}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

がわかる。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

<u>解</u>　$\det \mathrm{A} = 19 \neq 0$ より A は正則である。さらに

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 8$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -4$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -5$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = -1$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 7$$

となるから

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\tilde{\mathrm{A}} = \frac{1}{19}\ {}^t\!\begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 8 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

がわかる。

<u>例 4.2</u>　A を正則行列とするとき、
(i)　A の成分がすべて実数 $\Rightarrow$ A^{-1} の成分もすべて実数
(ii)　A の成分がすべて有理数 $\Rightarrow$ A^{-1} の成分もすべて有理数
証明は定理 4.1 より明らか。

<u>注意</u>　A が正則のとき、「A の成分がすべて整数 $\Rightarrow$ A^{-1} の成分もすべて整数」は成り立たないが、次のように修正できる：

<u>例 4.2′</u>　成分がすべて整数であるような正方行列 A に対して

$$\det \mathrm{A} = \pm 1 \iff \mathrm{A}\text{ は正則で }\mathrm{A}^{-1}\text{の成分もすべて整数}$$

<u>証明</u>　$\Rightarrow$:　$\tilde{\mathrm{A}}$ の成分がすべて整数となることと $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathrm{A}}\tilde{\mathrm{A}}$ より明らか。
$\Leftarrow$:　$\det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{A}^{-1} = \det \mathrm{E} = 1$ より $\det \mathrm{A} = \pm 1$ となる。

証明終

4.2　基本変形による方法

定理 4.2　A を n 次正方行列とするとき
(i)　A は正則である $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = n$
$\Leftrightarrow$ 行に関する基本変形を何回か行うと $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ 形になる。
(ii)　A が正則であるとき、(i) の記号で $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ となる。

証明　(i)　まず「A：正則 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = n$」を示す。
$\Rightarrow$：$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}$ 及び補題 3.5 より $n = rank(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}) \leqq \min\{rank\mathrm{A}^{-1},\ rank\mathrm{A}\} \leqq rank\mathrm{A} \leqq n$ 。よって $rank\mathrm{A} = n$ がわかる。
$\Leftarrow$：$rank\mathrm{A} = n = rank\mathrm{E}$ 及び補題 3.3 より $\mathrm{PAQ} = \mathrm{E}$ となる正則行列 P, Q が存在する。このとき $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Q}^{-1}$ となるから A は正則である。

注　これは補題 1.5 と補題 3.6 を用いてもできる。また補題 1.3 と定理 3.1 から示すこともできる。
次に「A：正則 $\Leftrightarrow$ 行に関する基本変形だけで $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ 形になる」を示す。
$\Rightarrow$：$\mathrm{A}^{-1}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} & \mathrm{A}^{-1}\mathrm{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{A}^{-1} \end{bmatrix}$ となる。
$\Leftarrow$：$\mathrm{P}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ と書けるから $\begin{bmatrix} \mathrm{PA} & \mathrm{PE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$、即ち、$\mathrm{PA} = \mathrm{E},\ \mathrm{P} = \mathrm{B}$ となる。
よって A は正則で $\mathrm{B} = \mathrm{P} = \mathrm{A}^{-1}$ となる。つまり (ii) も同時に示された。

証明終

注意　適当な基本変形を有限回行えば階数が求まる（補題 3.1）。従って定理 4.2 は「適切な基本変形の実行により正則性の判定ができ、また正則であるとき逆行列を求め得る」ことを示している。

問題　(i)「A は正則 $\Leftrightarrow$ 列に関する基本変形を何回か行うと $\begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{E} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{B} \end{bmatrix}$ 形になる」を示せ。このとき $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ となることも定理 4.2 と同様である。
(ii)「AB が正則 $\Rightarrow$ A も B も正則」を補題 3.5 と定理 4.2 より導け。

解答　(i)　$\Rightarrow$：$\begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{E} \end{bmatrix}\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{AA}^{-1} \\ \mathrm{EA}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{A}^{-1} \end{bmatrix}$ となる。
$\Leftarrow$：$\begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{E} \end{bmatrix}\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{B} \end{bmatrix}$ より $\mathrm{AQ} = \mathrm{E},\ \mathrm{Q} = \mathrm{B}$ がわかるから $\mathrm{B} = \mathrm{Q} = \mathrm{A}^{-1}$ となる。
(ii)　$n = rank(\mathrm{AB}) \leqq \min\{rank\mathrm{A},\ rank\mathrm{B}\} \leqq n$ より $rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B} = n$、即ち A, B は正則となる。

解答終

<u>例</u>　$A=\begin{bmatrix}7&2&1\\6&5&2\\6&8&3\end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

$$\begin{bmatrix}A & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2&1&1&0&0\\6&5&2&0&1&0\\6&8&3&0&0&1\end{bmatrix}$$

第1行に第2行の (−1) 倍を加え、
第3行に第2行の (−1) 倍を加えた。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&-1&1&-1&0\\6&5&2&0&1&0\\0&3&1&0&-1&1\end{bmatrix}$$

第2行に第1行の −6 倍を加えた。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&-1&1&-1&0\\0&23&8&-6&7&0\\0&3&1&0&-1&1\end{bmatrix}$$

第1行に第3行を加え、
第2行に第3行の −8 倍を加えた。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&-2&1\\0&-1&0&-6&15&-8\\0&3&1&0&-1&1\end{bmatrix}$$

第2行を −1 倍した。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&-2&1\\0&1&0&6&-15&8\\0&3&1&0&-1&1\end{bmatrix}$$

第3行に第2行の −3 倍を加えた。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&-2&1\\0&1&0&6&-15&8\\0&0&1&-18&44&-23\end{bmatrix}$$

よって A は正則で $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\6&-15&8\\-18&44&-23\end{bmatrix}$ である。

<u>例</u>　$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&-3&-4\\2&2&4\end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

$$\begin{bmatrix}A & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\-2&-3&-4&0&1&0\\2&2&4&0&0&1\end{bmatrix}$$

第2行に第1行の 2 倍を加え、
第3行に第1行の −2 倍を加えた。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&2&1&0\\0&-2&-2&-2&0&1\end{bmatrix}$$

第1行に第2行の −2 倍を加え、
第3行に第2行の 2 倍を加えた。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&-3&-2&0\\0&1&2&2&1&0\\0&0&2&2&2&1\end{bmatrix}$$

第1行に第3行の $\frac{1}{2}$ 倍を加え、
第2行に第3行の −1 倍を加えた。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-2&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&-1&-1\\0&0&2&2&2&1\end{bmatrix}$$

第3行を $\frac{1}{2}$ 倍した。

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-2&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&-1&-1\\0&0&1&1&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

よって A は正則で $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&-1&\frac{1}{2}\\0&-1&-1\\1&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-4&-2&1\\0&-2&-2\\2&2&1\end{bmatrix}$ で

ある。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の第 3 列はすべて 0 なので行に関するどのような基本変形をしても $\begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ 形には決してならない。よって A は正則でない。

<u>注意</u>　A を n 次正方行列とする。$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ 形に直すことを目標に行に関する基本変形を繰り返すとき、もし途中で第 j 列 $(1 \leqq j \leqq n)$ がすべて 0 になったら A は正則でない。逆に A が正則でないとき、基本変形の途中で第 j 列 $(1 \leqq j \leqq n)$ がすべて 0 となる。

4.3　行列式と階数の関係

次の補題は第６章で必要となる。

補題 4.1　A を n 次正方行列とするとき、

$\det \mathrm{A} = 0 \ \Leftrightarrow\ rank\mathrm{A} \leqq n-1 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ をみたす n 項縦ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在する。

証明　「 $\det \mathrm{A} = 0 \ \Leftrightarrow\ rank\mathrm{A} \leqq n-1$ 」は定理 4.1 と定理 4.2 より明らか。
「 $rank\mathrm{A} \leqq n-1 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ の存在」は補題 3.6 を用いれば「 $rank\mathrm{A} \leqq n-1 \ \Leftrightarrow$ A は単射でない $\Leftrightarrow\ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ の存在」により示される。

証明終

従って n 次正方行列 A に対して

$$\det \mathrm{A} \neq 0 \ \Leftrightarrow\ rank\mathrm{A} = n \tag{4.1}$$

となることがわかる。次にこれを一般化する。そのためには準備がひとつ必要である。

小行列式　A を (m,n) 形行列とし $0 \leqq r \leqq \min\{m,n\}$ とする。A の r 個の行と列とを任意に取り出してつくった正方行列を A の r 次小行列といい $\left(\text{これは一般に} \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \text{個存在する}\right)$、その行列式を A の r 次小行列式という。

例　A を n 次正方行列とする。第２章第４節で定義した A の (i,j) 余因子 Δ_{ij} に対し $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ は A の $n-1$ 次小行列式である。

次の結果は (4.1) の一般化である。

命題　A を (m,n) 形行列とするとき、

$r = rank\mathrm{A} \Leftrightarrow r$ 次小行列式で 0 でないものが存在し、 $r+1$ 次以上の小行列式はすべて 0 である。

この命題は階数が行列式で表されるということを示している。以下ではこれを用いないので証明は省略する。

行列式を基本変形　基本行列は

$$\det \mathrm{P}_n(i;\alpha) = \alpha \neq 0,\ \det \mathrm{P}_n(i,j;\alpha) = 1,\ \det \mathrm{P}_n(i,j) = -1$$

を満たすから、定理 2.3 より n 次正方行列 A に対して

$$
\begin{aligned}
&\det(\mathrm{P}_n(i,\alpha)\mathrm{A}) = \alpha \det \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}\mathrm{P}_n(i,\alpha)) \\
(4.2) \qquad &\det(\mathrm{P}_n(i,j;\alpha)\mathrm{A}) = \det \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}\mathrm{P}_n(i,j;\alpha)) \\
&\det(\mathrm{P}_n(i,j)\mathrm{A}) = -\det \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}\mathrm{P}_n(i,j))
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これらは

A のひとつの行（列）を α 倍すると行列式も α 倍される

A のひとつの行（列）に他の行（列）のスカラー倍を加えても行列式はかわらない

A のふたつの行（列）をとりかえると行列式の符号がかわる

ということを示している。即ち定理 2.1 、定理 2.2 及びその系の一部が再確認された。ただしこれは別証明とはいえない。何故なら定理 2.3 の証明に定理 2.1 及び定理 2.2 を用いているからである。補題 3.1 と (4.2) は「適切な基本変形の実行により行列式の具体計算が可能である」ということを示している。補題 2.6 はそのひとつの実例にすぎない。

問題　補題 3.1 の系、定理 4.1 及び (4.2) だけを用いて定理 2.3 ; $\det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B}$ を証明せよ。

解答　B が正則でなければ AB も正則でない（補題 3.1 の系）から、定理 4.1 より $\det(\mathrm{AB}) = 0 = \det \mathrm{A} \det \mathrm{B}$ となる。 B が正則のとき、補題 3.1 の系より $\mathrm{B} = \mathrm{Q}_1 \cdots \mathrm{Q}_s$ （ Q_1, $\cdots$, Q_s は基本行列）と書ける。このとき (4.2) より $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{AQ}_1 \cdots \mathrm{Q}_s) = \det(\mathrm{AQ}_1 \cdots \mathrm{Q}_{s-1}) \det \mathrm{Q}_s = \cdots = \det \mathrm{A} \det(\mathrm{Q}_1 \cdots \mathrm{Q}_s) = \det \mathrm{A} \det \mathrm{B}$ がわかる。

解答終

第５章

この章では１次方程式系（連立１次方程式ともいう）の解法について述べる。
方程式の数が m 、未知数の数が n の１次方程式系は一般に

$$
(\#) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}
$$

と表される。ここで

$$
(5.1) \qquad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{C}),
$$

$$
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m,\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n
$$

とおけば $(\#)$ は

$$
\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

と書けるから、これまでに述べて来た行列の理論が１次方程式系の解法に応用できる。

5.1　行列式を用いる解法

ここでは $m = n$ かつ A が正則である場合の $(\#)$ の解法を述べる。次が成り立つ；

定理 5.1　$m = n$ かつ A が正則であるとき、$(\#)$ は唯一の解 $\mathbf{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}$ を持つ。
この解は

$$
x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \mathrm{A}} \quad (1 \leqq j \leqq n)
$$

と表される。ここで分子の行列は A の第 j 列を $\mathbf{b}$ におきかえたものである。

証明　「 $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}$ 」より、 $\mathbf{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}$ が (#) の唯一の解となることは明らか。
また定理 4.1 より

$$\mathbf{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\tilde{\mathrm{A}}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

となるから

$$x_j = \frac{\Delta_{1j}b_1 + \cdots + \Delta_{nj}b_n}{\det \mathrm{A}} \quad (1 \leqq j \leqq n)$$

を得る。 j を固定して行列

$$\mathrm{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

に補題 2.7 を適用すれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}b_j = \det \mathrm{A}'$ となる。よって $x_j = \dfrac{\det \mathrm{A}'}{\det \mathrm{A}}$ がわかる。

証明終

これをクラメルの公式という。 $m = n = 1$ の場合の１次方程式の解法；

$$ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

の最も単純な一般化といえる。

注意　定理 5.1 は「 $m = n$ かつ A が正則である場合、行列式が計算できれば (#) の解が求まる」ことを示している。

例　１次方程式系 $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}\right.$ を解く。

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと $\det \mathrm{A} = 12 \neq 0$ より定理 4.1 が使える。

$$\det\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 8,\ \det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 28,$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = 60,\ \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 24$$

であるから $x_1 = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3},\ x_2 = \dfrac{28}{12} = \dfrac{7}{3},\ x_3 = \dfrac{60}{12} = 5,\ x_4 = \dfrac{24}{12} = 2$ がわかる。

例 5.1　1次方程式系 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ に対し

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}\ ,\ x_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$$

が成り立つ。いいかえると

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\ ,\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

例 5.1′　鶴と亀があわせて a ひき、鶴の足と亀の足があわせて b 本あるとき鶴と亀はそれぞれ何びきいるか、という問題を鶴亀算という。この問題に解があるための必要十分条件が「 b は偶数かつ $2a \leqq b \leqq 4a$ 」であることを示す。

解　鶴の数を x 、亀の数を y とすると

$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + 4y = b \end{cases}$ となる。例 5.1 より $\begin{cases} x = \dfrac{4a-b}{2} = 2a - \dfrac{1}{2}b \\ y = \dfrac{b-2a}{2} = -a + \dfrac{1}{2}b \end{cases}$

となるから

$$\begin{aligned} x, y \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow b \text{ は偶数} \\ x, y \geqq 0 &\Leftrightarrow 2a - \frac{1}{2}b \geqq 0,\ -a + \frac{1}{2}b \geqq 0 \ \Leftrightarrow\ 2a \leqq b \leqq 4a \end{aligned}$$

がわかる。

解答終

注意　鶴も亀も少なくともいっぴきいることを仮定するなら、即ち $x, y \geqq 1$ とするなら $2a \leqq b \leqq 4a$ を $2a + a \leqq b \leqq 4a - 2$ に直せばよい。

<u>例 5.2</u>　a, b, c を互いに異なる複素数として、１次方程式系；

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right.$$ を解く。

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$ である。例 2.2 より $\det \mathrm{A} = (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ となるから

$$\begin{aligned} x &= \frac{(d-b)(b-c)(c-d)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(d-b)(c-d)}{(a-b)(c-a)}, \\ y &= \frac{(a-d)(d-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)}, \\ z &= \frac{(a-b)(b-d)(d-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(b-d)(d-a)}{(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

を得る。

5.2　基本変形を用いる解法

ここでは m, n, A に何も条件をつけることなく方程式系 (#) の解法を考える。

この場合は定理 5.1 のように簡単にはいかない。というのは (#) は解を持たないこともあるし、2つ以上の解を持つこともあるからである。

<u>例</u>

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{は解を持たない。}$$

$$(5.2)' \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{は解を無限にたくさん持つ。}$$

与えられた方程式系 (#) の解の有無を判定し、ある場合には解をすべて求めることが以下の目標である。

１次方程式系 (#) の解の全体を Z(#) と書いて (#) の解空間という；

$$\mathrm{Z}(\#) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

第－１章第２節の記号を用いれば $\mathrm{Z}(\#) = \mathrm{A}^{-1}(\{\mathbf{b}\})$ と書くこともできる。上の例の (5.2) では $\mathrm{Z}(\#) = \phi$ であり、 $(5.2)'$ では Z(#) は無限集合である。 $\mathrm{Z}(\#) = \phi$ か否かの判定も含めて Z(#) を決定することが方程式系 (#) を解くということである。

<u>定理 5.2</u>　１次方程式系 (#) に対して

(i)　(#) が解を持たない $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} + 1 = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

(ii)　(#) がただひとつの解を持つ $\Leftrightarrow$ $n = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

(iii)　(#) が少なくとも２つの解を持つ $\Leftrightarrow$ $n - 1 \geqq rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

このとき $r = rank\mathrm{A}$ とおき、 $\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r} \in \mathbb{C}^n$ をうまく選べば (#) の解 $\mathbf{x}$ はすべて

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \; (c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{C})$$

と一意的に表される。

<u>証明</u>　はじめに３つ程準備をしておく。

$\boxed{1}$　一般に任意の m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q に対して、$\mathbf{x}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{d} = \mathrm{P}\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ とおけば

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{PA}\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{PAQ}\mathbf{x}' = \mathbf{d}$$

となる。よって方程式系

$$(\#)' \qquad \mathrm{PAQ}\mathbf{x}' = \mathbf{d}$$

を考えれば、 Q は解空間のあいだの全単射をひきおこす。即ち

$$(5.3) \qquad \mathrm{Q} \ : \ \mathrm{Z}(\#)' \ \rightarrow \ \mathrm{Z}(\#) \text{ は全単射となる。}$$

特に補題 3.1 より

$$(5.4) \qquad \mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ r = rank\mathrm{A}$$

となる P,Q が存在する。以下ではこのような P,Q を固定して考える。
$\boxed{2}$ 方程式系 $(\#)'$ について考える。

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_r' \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

とおけば (5.4) より

$$\mathrm{PAQ}\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_r' \\ x_{r+1}' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_r' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \updownarrow \ \text{m - r}$$

となるから $(\#)'$ は

$$(5.5) \qquad \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_r' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

と書きなおせる。
$\boxed{3}$ 行列 $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ の階数について考える。補題 3.4, (ii) と同様に

$$
\mathrm{P}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{PA} & \mathrm{P}\mathbf{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{PAQ} & \mathrm{P}\mathbf{b} \end{bmatrix}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c|c} & & d_1 \\ \mathrm{E}_r & 0 & \vdots \\ & & d_r \\ \hline & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & d_m \end{array}\right]
$$

となるから

(5.6)

$$
rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = rank\left[\begin{array}{c|c|c} & & d_1 \\ \mathrm{E}_r & 0 & \vdots \\ & & d_r \\ \hline & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & d_m \end{array}\right] = rank\left[\begin{array}{c|c|c} & & 0 \\ \mathrm{E}_r & 0 & \vdots \\ & & 0 \\ \hline & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & d_m \end{array}\right]
$$

がわかる。

以上の準備のもと定理 5.2 を示す。

(5.3), (5.5), (5.6) より

(5.7)

$$
\mathrm{Z}(\#) = \phi \Leftrightarrow Z(\#)' = \phi \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = r+1
$$

がわかる。従って (i) が示された。

次に (#) が解を持つ場合を考える。(i) と同様に (5.3), (5.5), (5.6) より

(5.8)

$$
\mathrm{Z}(\#) = \phi \Leftrightarrow Z(\#)' = \phi \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = r
$$

を得る。このとき $(\#)'$ 即ち (5.5) はさらに

$$(\#)'' \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}$$

と書き直せる。従って

$$(5.9) \qquad \mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)'$$

が成り立つ。 $x'_{r+1}, \cdots, x'_n$ とは無関係に $(\#)''$ は解を持つから

$$(5.10) \qquad (\#)'' \text{ の解はただひとつ } \Leftrightarrow \ r = n$$

となる。よって (ii) が示された。このとき $n \leqq m$ であり、 $(\#)''$ 即ち $(\#)'$ の唯一の解は

$$(5.11) \qquad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

である；

$$\mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)' = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \right\} \quad \text{；ひとつの要素より成る集合}$$

このことを (5.3) より $(\#)$ の唯一の解は

$$(5.12) \qquad \mathbf{x} = \mathrm{Q}\mathbf{x}' = \mathrm{Q} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \qquad (r = n \text{ のとき})$$

と表される；

$$\mathrm{Z}(\#) = \left\{ \mathrm{Q} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \right\} \quad \text{；ひとつの要素より成る集合}$$

また (5.10) より

$$(5.10)' \qquad (\#)'' \text{ の解が少なくとも 2 つ } \Leftrightarrow \ r \leqq n - 1$$

もわかるから (iii) の前半が示された。 (iii) の後半を示す。 $r \leqq n-1$ のとき $(\#)''$ の解は $x'_{r+1},\ \cdots,\ x'_n$ に任意の複素数値を代入し $x'_1 = d_1,\ \cdots,\ x'_r = d_r$ とおけば求まる。即ち $(\#)''$ の解はすべて

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \quad (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C}) \tag{5.13}$$

と一意的に表される。ここで

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$$

に注意すれば

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$$

と変形できることから (5.9) より

$$\mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)' = \left\{ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \middle|\ c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C} \right\}$$

これで $(\#)''$ と $(\#)'$ が解けた。最後に $(\#)$ を解く。 (5.3) より $(\#)$ の解はすべて

(5.14)
$$\mathbf{x} = \mathrm{Q}\mathbf{x}' = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \ (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$$
と一意的に表される。ここで

(5.15)
$$\mathbf{a} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ \in\ \mathbb{C}^n$$

とおき、さらに行列 $\mathrm{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}$ をブロック表示により

(5.16)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \ (\mathbf{x}_1,\ \cdots,\ \mathbf{x}_{n-r}\ \in\ \mathbb{C}^n)$$

と表せば (5.14) は

(5.17)
$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \ (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$$

と書ける；

$$\mathrm{Z}(\#) = \left\{\ \mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \,\middle|\, c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C}\ \right\}.$$

従って (iii) の後半が示された。

証明終

<u>系</u>　方程式系 (#) が解を持つ $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

<u>証明</u>　すでに (5.8) で示している。

(証明終)

<u>注意 5.1</u>　(#) が解を持つ場合、即ち $rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ のとき、(5.11) と (5.13) 及び (5.12) と (5.14) を比較する。(5.13) で $r = n$ のとき (5.11) を表すものと約束すれば、(5.14) で $r = n$ のとき (5.12) を表す。よって定理 5.2 の (ii) は (iii) の特別な場合と考えられる。これに従って解 $\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ は $r = n$ のとき唯一の解 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ を表すものとする。

<u>注意 5.2</u>　(#) において「$m=n$ かつ A が正則 $\Rightarrow$ $n = rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$」が成り立つから定理 5.1 は定理 5.2, (ii) の特別な場合と考えられる。即ち定理 5.1 は $m=n$ かつ A が正則の場合に定理 5.2 (ii) の唯一の解を行列式を用いて表す公式といえる。

次に方程式系 (#) $\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ と、 $\mathbf{b}$ を 0 におきかえた方程式系

$$(\#)_0 \qquad \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbb{O}$$

との関係を考える。

<u>補題 5.1</u>　方程式系 (#), $(\#)_0$ に対して、
(i)　(#) に解があるとき、定理 4.2 で求めた解 (5.17) $\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ において、 $\mathbf{a}$ は (#) の解であり、 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$ は $(\#)_0$ の解である。
(ii)　写像 $\begin{array}{ccc} \mathrm{Z}(\#)_0 & \to & \mathrm{Z}(\#) \\ \Cup & & \Cup \\ \mathbf{x}_0 & \mapsto & \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \end{array}$ 及び $\begin{array}{ccc} \mathrm{Z}(\#) & \to & \mathrm{Z}(\#)_0 \\ \Cup & & \Cup \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} - \mathbf{a} \end{array}$ は共に全単射であり、互いに他の逆写像である。

<u>証明</u>　(5.15) より $\mathbf{a} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \updownarrow \text{ n - r} \\ \\ \end{array}$ であったから

$$\mathrm{PA}\mathbf{a} = \mathrm{PAQ}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \updownarrow \text{ m - r} \\ \\ \end{array} = \mathbf{d} =$$

$\mathrm{P}\mathbf{b}$ より $\mathrm{A}\mathbf{a}=\mathbf{b}$ を得る。また (5.16) より $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}$ であったから $\mathrm{PA}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{PAQ}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} = 0$ 、よって $\mathrm{A}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = 0$ 即ち $\mathrm{A}\mathbf{x}_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq n-r)$ がわかる。
(ii) は (i) より明らか。

<u>例</u>　(#) が少なくとも２つの解を持つ $\Leftrightarrow$ (#) は無限にたくさんの解を持つ。
$\Leftrightarrow$ $(\#)_0$ は 0 でない解を持ち (#) は解を持つ。

<u>証明</u>　上の $\Leftrightarrow$ は明らか。よってあとは (#) が解を持つとき「(#) が少なくとも２つ解を持つ $\Leftrightarrow$ $(\#)_0$ は 0 でない解を持つ」を示せばよい。
$\Rightarrow$: $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ を (#) の解とすれば $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} = \mathrm{A}\mathbf{y}$ より $\mathrm{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq 0$ がわかる。
$\Leftarrow$: $\mathbf{x}_0 \neq 0$ を $(\#)_0$ の解とすれば $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a} + \mathbf{x}_0$ は (#) の２つの解となる。

（証明終）

定理 5.2 を用いて具体的に与えられた方程式を解こうとしてもなかなかうまく行かない。 $(\#)'$ は簡単に解けるが Q を求めておかないと (#) の解は求まらない。つまり Q として任意の正則行列を考えると $(\#)'$ は簡単になるが、 $(\#)'$ の解から (#) の解を構成する所が面倒になる（列に関する基本変形をすべて記憶しておかないとできない）。そこで Q に制限を加えて $(\#)'$ は少々複雑になってもよいから $(\#)'$ の解から (#) の解を求める部分を簡単にしようというのが以下の発想である。最も極端なものとして Q を単位行列に限る、即ち基本変形を行に関するものだけに限るという立場がある（参考文献 [8]）。このとき $(\#)'$ の解と (#) の解は同じものとなる。ここではもう少し広く、第３基本行列の積として表される Q を考える（参考文献 [1],[4],[9] 文献など）。従って基本変形は (行１)、(行２)、(行３)、(列３) を用いることになる。

<u>補題 5.2</u>　(m, n) 形行列 A は行に関する基本変形と列の交換、即ち (行１)、(行２)、(行３)、(列３) を有限回行うことにより

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & \mathrm{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} \text{ は } (r,\ n-r) \text{ 形行列}$$

という形になる。このとき $r = rank\mathrm{A}$ である。

<u>証明</u>　方針は補題 3.1 と同様であるからこれを思い出す。 (列１)、(列２) を用いないために $\mathrm{B} = 0$ とはできないところが相異点である。
*step*1.　$\mathrm{A} = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A} = 0$ なら $r = 0$, $\mathrm{B} = 0$ とみて求める形である (END) 。もし $\mathrm{A} \neq 0$ なら次に進む。
*step*2, *step*3, *step*4 は補題 3.1 と全く同じとする。従って A は
$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{B}' \\ 0 & \mathrm{A}' \end{bmatrix}$ 形に変形される。
*step*1′.　$\mathrm{A}' = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A}' = 0$ なら $r = 1$, $\mathrm{B} = \mathrm{B}'$ とみて求める形である (END) 。もし $\mathrm{A}' \neq 0$ なら次に進む。
*step*2′, *step*3′, *step*4′ は補題 3.1 と全く同じとする。従って A は

$\begin{bmatrix} \mathrm{E}_2 & \mathrm{B}'' \\ 0 & \mathrm{A}'' \end{bmatrix}$ 形に変形される。

*step*1$''$. $\mathrm{A}''=0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A}''=0$ なら $r=2,\ \mathrm{B}=\mathrm{B}''$ とみて求める形である (END) 。もし $\mathrm{A}''\neq 0$ なら次に進む。

あとはこれをくり返せばよい。 $r=rank\mathrm{A}$ は明らか。

証明終

これを用いて定理 5.2 の別証明ができる。しかもこの証明は次の定理 5.3 につながる。概略を述べておこう。

<u>定理 5.2 の別証明</u>　前の証明とほとんど同様であるから番号もあえてかえないことにする。

$\boxed{1}$ $(\#)'$, (5.3) は同じ。

特に補題 5.2 より

$$(5.4)\qquad \mathrm{PAQ}=\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & \mathrm{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ r=rank\mathrm{A}\ ,\ \ \mathrm{B}\ \text{は}\ (r,\ n-r)\ \text{形行列}$$

となる m 次正則行列と第 3 基本行列の積として表される n 次正則行列 Q が存在する。このとき $x'_1,\ \cdots,\ x'_n$ は $x_1,\ \cdots,\ x_n$ を並べかえたものである。以下ではこのような P,Q を固定して考える。

$\boxed{2}$ $\mathbf{x}',\ \mathbf{d}$ は同じとする。このとき (5.4) より

$$\mathrm{PAQ}\mathbf{x}'=\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix}+\mathrm{B}\begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるから $(\#)'$ は

$$(5.5)\qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix}+\mathrm{B}\begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}\quad \text{かつ}\quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

と書きなおせる。

$\boxed{3}$

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c} & & d_1 \\ \mathrm{E}_r & \mathrm{B} & \vdots \\ & & d_r \\ \hline & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & d_m \end{array}\right]\quad \text{となるから}$$

(5.6)

$$rank\left[\begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = rank\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{E}_r & \mathrm{B} & \begin{matrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{matrix} \end{array}\right] = rank\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{E}_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{matrix} \end{array}\right]$$

がわかる。

以上の準備のもと定理 5.2 を示す。

(i) (5.5) の左の式には常に解があることに注意すれば前の証明と全く同じことが成り立つ。

次に (#) が解を持つ場合を考える。 (5.8) も同じでよい。このとき $(\#)'$ 即ち (5.5) はさらに

$$(\#)'' \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} + \mathrm{B}\begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}$$

と書き直せる。従って

$$(5.9) \qquad \mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)'$$

が成り立つ。(5.10), (5.11), (5.12), $(5.10')$ も前と同じでよい。よって (ii) 及び (iii) の前半が示された。 (iii) の後半を示す。 $r \leqq n-1$ のとき $(\#)''$ の解を求める。 $(\#)''$ において $\begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ に任意の値 $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$ を代入して移植すれば $\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} - \mathrm{B}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$ となる。よって

(5.13)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \quad (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$$

を得る。しかしながら前より少々複雑になっているので、 (5.13) すべて $(\#)''$ の解なのか、 $(\#)''$ の解はすべてこの形に表されるのか、また表示は一意的かについては必ずしも自明とはいえない。このあたりを

明確にするために写像

$$f_{(\#)'}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-r} & \to & \mathbb{C}^n \\ \Cup & & \Cup \\ \mathbb{C} & \mapsto & \mathbf{x}' \end{array} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \mathbb{C} \quad \left(\mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \right)$$

を導入する。ここで次の３つを示す。

① $\Im f_{(\#)'} \subset \mathrm{Z}(\#)'$ 即ち (5.13) はすべて $(\#)'$ の解である。

② $\mathrm{Z}(\#)' \subset \Im f_{(\#)'}$ 即ち $(\#)'$ の解はすべて (5.13) で表される。

③ $f_{(\#)'}$ は単射 即ち (5.13) の表示は一意的である。

①の証明；任意の $\mathbb{C} \in \mathbb{C}^{n-r}$ に対して $\mathbf{x}' = f_{(\#)'}(\mathbb{C})$ を考えると

$$\begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \text{ となるから } \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \mathrm{B} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \text{ を}$$

得る。よって $\mathbf{x}' \in \mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)'$ となる。

②の証明；任意の $\mathbf{x}' \in \mathrm{Z}(\#)' = \mathrm{Z}(\#)''$ に対し $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ とおけば

$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} - \mathrm{B} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$ となるから $\mathbf{x}' = f_{(\#)'}(\mathbb{C})$ がわかる。

これは (5.13) を導き出した過程そのものであった。

③の証明；$f_{(\#)'}\mathbb{C} = f_{(\#)'}(\mathbb{C}')$ とすれば $\begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \mathbb{C} = \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \mathbb{C}'$ となる。ここで $\begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}$ は $(n,\ n-r)$ 形行列であるから $rank \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} = n-r$ に注意すれば補題 3.6 より、写像 $\begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}\ :\ \mathbb{C}^{n-r} \to \mathbb{C}^n$ は単射となる。従って $\mathbb{C} = \mathbb{C}'$ を得る。

　以上により $(\#)'$ の解はすべて (5.13) により一意的に表されることがわかった；

$$\mathrm{Z}(\#)' = \mathrm{Z}(\#)'' = \left\{ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \;\middle|\; c_1,\ \cdots,\ c_{n-r} \ \in\ \mathbb{C} \right\}$$

このことにより全単射 $f_{(\#)'}\ :\ \mathbb{C}^{n-r}\ \to\ \mathrm{Z}(\#)'$ が定義されたことになる。これと $\mathrm{Q}\ :\ \mathrm{Z}(\#)'\ \to\ \mathrm{Z}(\#)$ とを合成して全単射 $f_{(\#)} = \mathrm{Q}\circ f_{(\#)'}\ :\ \mathbb{C}^{n-r}\ \to\ \mathrm{Z}(\#)$ を得る。従って

$$(5.14)\quad \mathbf{x} \;=\; f_{(\#)}(\mathbb{C}) = \mathrm{Q}\left(\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \mathbb{C} \right)$$

$$= \mathrm{Q} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Q} \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \ (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$$

となる。 $f_{(\#)}\ :\ \mathbb{C}^{n-r}\ \to\ \mathrm{Z}(\#)$ は全単射だから (#) の解はすべて (5.14) で表され、単射だからこの表示は一意的である。さらに (5.15) は同じとして

$$(5.16)\qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{Q} \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \ (\mathbf{x}_1,\ \cdots,\ \mathbf{x}_{n-r}\ \in\ \mathbb{C}^n)$$

とブロック表示すれば (5.14) は

$$(5.17)\qquad \mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}\ (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$$

と書ける。従って (iii) の後半が示された。

証明終

注意 5.1′　$n-1 \geqq r = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ のとき全単射 $f_{(\#)}\ :\ \mathbb{C}^{n-r}\ \to\ \mathrm{Z}(\#)$ が定義された。 $\mathbb{C}^0 = \{0\}$ と考え、 $f_{(\#)}(0) = \mathbf{a}$ とおけば $n = r = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ のときにも全単射 $f_{(\#)}\ :\ \mathbb{C}^{n-r} \to \mathrm{Z}(\#)$ 定義される。即ちここでも (ii), (iii) の分類は必要ではなく、解を持つときはいつでも全単射 $f_{(\#)}\ :\ \mathbb{C}^{n-r}\ \to\ \mathrm{Z}(\#)$ が存在

する。このことは注意 5.1 で「 $\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ は $r = n$ のとき $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ を表す」と約束したことのいいかえである。

注意 5.3　方程式系 $(\#)_0$ に関しても同様に全単射

$$f_{(\#)_0}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-r} & \to & \mathrm{Z}(\#)_0 \\ \Psi & & \Psi \\ \mathbb{C} & \mapsto & c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \end{array} \qquad \left(\mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \right)$$

が定義される。一方補題 5.1, (ii) において全単射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Z}(\#)_0 & \to & \mathrm{Z}(\#) \\ \Psi & & \Psi \\ \mathbf{x}_0 & \mapsto & \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \end{array}$$

が考えられた。 $f_{(\#)}$ はこれらの合成である。また $f_{(\#)_0}$ を $\mathbb{C}^{n-r}$ から $\mathbb{C}^n$ への写像とみるとき、これは線形写像となる。 $f_{(\#)}$ は一般に（ $\mathbf{b} \neq 0$ のとき）線形写像ではない。即ち「 $f_{(\#)}$ ： 線形写像 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b} = 0$ 」となる。

補題 5.3　方程式系 $(\#)$ に $(m+1,\ n+1)$ 形行列

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x} & 0 \end{bmatrix}$$

を対応させる。この行列は $1 \leqq i \leqq m$ という範囲で行に関する基本変形を行い、 $1 \leqq j \leqq n$ という範囲で列の交換を行うことにより定理 5.2 の別証明中の $\boxed{1}$ で考えた $(\#)'$ に対応する行列：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{PAQ} & \mathbf{d} \\ {}^t\mathbf{x}' & 0 \end{bmatrix}$$

に変形される。

証明　$\mathbf{x}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,\ \mathbf{d} = \mathrm{P}\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ であった。 Q は第 3 基本行列の積であるから例 3.1 より ${}^t\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{-1}$ となる。よって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{PA} & \mathrm{P}\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{PAQ} & \mathrm{P}\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x}\mathrm{Q} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{PAQ} & \mathrm{P}\mathbf{b} \\ {}^t(\mathrm{Q}^{-1}\mathbf{x}) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

証明終

定理 5.2 の別証明と補題 5.3 より次がわかる。

<u>定理 5.3</u>　１次方程式系 (#) $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解法は次の手順により与えられる：

(#)　$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 即ち $\mathrm{A}, \mathbf{b}$ が与えられたとき、

*step*1.　$(m+1,\ n+1)$ 形行列

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x} & 0 \end{bmatrix}$$

をつくる。

*step*2.　この行列に対して

$$\begin{cases} 1 \leqq i \leqq m \text{ という範囲で行に関する基本変形を行い、} \\ 1 \leqq j \leqq n \text{ という範囲で列の変換を行う} \end{cases}$$

ことにより

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & & & & d_1 \\ & \mathrm{E}_r & & & \mathrm{B} & & \vdots \\ & & & & & & d_r \\ \hline & & & & & & d_{r+1} \\ & 0 & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & d_m \\ \hline x'_1 & \cdots & x'_r & x'_{r+1} & \cdots & x'_n & 0 \end{array}\right] \quad \mathrm{B} \text{ は } (r,\ n-r) \text{ 形行列}$$

という形に変形する（補題 5.2 及び補題 5.3 より必ずできる）。ここで $r = rank\mathrm{A}$ であり、 $x'_1,\ \cdots,\ x'_n$ は $x_1,\ \cdots,\ x_n$ を並べかえたものである。

*step*3.　$d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ をたしかめる。 $\boxed{\text{NO}}$ なら (#) には解がない (END) 。 $\boxed{\text{YES}}$ なら (#) は解を持つ（次に進む）。

*step*4.　$c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C}$ を任意にとり、

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$$

とおく。ここでもし $r = n$ であれば

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

$step5.$　$x_1', \cdots, x_n'$ を並べかえて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \ \ (c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{C})$$

という形に変換する。これが解のすべてである (END) 。

（ $step6.$　$\mathrm{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathrm{A}\mathbf{x}_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq n-r)$ をたしかめる。これは $\underline{\overset{\text{（見算）}}{\text{たしかめ}}}$ である ）

注意　定理 5.3 では $step2$ が最も重要であり、他の部分は実質的なことは何もしていない。従って定理 5.3 は「基本変形が適切に実行できれば方程式系 (#) の解の有無の判定ができ、また解があるときはすべて求めることができる」ということを主張している。

以上により 1 次方程式系に関することがすべて明らかになった。ここでは 1 次方程式系 (#) を解くということを解空間 Z(#) の導入及び全単射 $f_{(\#)} : \mathbb{C}^{n-r} \to \mathrm{Z}(\#)$ の構成という形で処理した。即ち $\mathrm{A}, \mathbf{b}$ に対して $f_{(\#)}$ をつくることが (#) の解法であった。一般に「研究の対象を集合 X としてとらえ、よくわかっている集合 A と全単射 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ をみつけることにより X を理解する」という方法は現代数学において基本的である。上記の 1 次方程式系の解法もこの一例である。

定理 5.2 の証明は少々難しいかもしれない。しかしこの証明を読み飛ばしても与えられた 1 次方程式系を定理 5.3 の手順に従って解くことはできるはずである。

例　$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12 \\ 2x_1 + 25x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 32 \\ 5x_1 + 24x_2 + 7x_3 + 22x_4 = 36 \end{cases}$ を定理 5.3 に従って解く。

これは $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 \\ 2 & 25 & 5 & 11 \\ 5 & 24 & 7 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$ と書ける。

$step1.$　$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 & 12 \\ 2 & 25 & 5 & 11 & 32 \\ 5 & 24 & 7 & 22 & 36 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$ をつくる。

$step2.$　この行列を基本変形する。

$$
\left[\begin{array}{ccccc}1&9&2&5&12\\2&25&5&11&32\\5&24&7&22&36\\x_1&x_2&x_3&x_4&0\end{array}\right]
$$

第２行に第１行の -2 倍を加え、
第３行に第１行の -5 倍を加えた。

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc}1&9&2&5&12\\0&7&1&1&8\\0&-21&-3&-3&-24\\x_1&x_2&x_3&x_4&0\end{array}\right]
$$

第２列と第３列をとりかえた。

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc}1&2&9&5&12\\0&1&7&1&8\\0&-3&-21&-3&-24\\x_1&x_3&x_2&x_4&0\end{array}\right]
$$

第１行に第２行の -2 倍を加え、
第３行に第２行の 3 倍を加えた。

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c}1&0&-5&3&-4\\0&1&7&1&8\\\hline 0&0&0&0&0\\x_1&x_3&x_2&x_4&0\end{array}\right]
$$

$\cdots$ これは目標の形である $(r=2)$ 。

*step*3.　$d_3 = 0$ である。従って解は存在する。

*step*4.　$n - r = 4 - 2 = 2$ であるから $c_1,\ c_2\ \in\ \mathbb{C}$ を任意にとって

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}x_1\\x_3\\x_2\\x_4\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-4\\8\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5&-3\\-7&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-4\\8\\0\\0\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}5\\-7\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-3\\-1\\0\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

とおく。

*step*5.　第２行と第３行をとりかえて、解

$$
\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\0\\8\\0\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}5\\1\\-7\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \quad (c_1,\ c_2\ \in\ \mathbb{C})
$$

を得る。

*step*6.　（たしかめ）

$$
\begin{bmatrix}1&9&2&5\\2&25&5&11\\5&24&7&22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\0\\8\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4+16\\-8+40\\-20+56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\32\\36\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&9&2&5\\2&25&5&11\\5&24&7&22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\\-7\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5+9-14\\10+25-35\\25+24-49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&9&2&5\\2&25&5&11\\5&24&7&22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3-2+5\\-6-5+11\\-15-7+22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

例 $\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array}\right.$ を解く。

これは $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と書ける。

*step*1. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$ をつくる。

*step*2. この行列を基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行と第２行をとりかえた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第３行に第１行の -1 倍を加え、
第４行に第１行の -1 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行と第３行をとりかえた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第２行の -1 倍を加え、
第３行に第２行の -3 倍を加え、
第４行に第２行の -2 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第３列と第４列をとりかえた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第３行の -4 倍を加え、
第２行に第３行を加え、
第４行に第３行の -1 倍を加えた。

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & 0 \end{array}\right]$$

$\cdots$ これは目標の形である $(r = 3)$ 。

*step*3. $d_4 = 0$ である。従って解は存在する。

$step4.$ $n-r=4-3=1$ であるから $c\ \in\ \mathbb{C}$ を任意にとって

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

$step5.$ 第３行と第４行をとりかえて、解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c\ \in\ \mathbb{C})$$

を得る。

$step6.$ （たしかめ）

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & - & 6 & + & 2 \\ 7 & - & 2 & - & 3 \\ 7 & - & 4 & - & 2 \\ 7 & - & 6 & - & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & - & 3 & + & 3 \\ -1 & - & 1 & + & 2 \\ -1 & - & 2 & + & 3 \\ -1 & - & 3 & + & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>例</u>

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array} \right. \text{ を解く。}$$

これは
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ と書ける。}$$

$step1.$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix} \text{ をつくる。}$$

$step2.$ これを基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行に第１行の -2 倍を加え、
第３行に第１行の -1 倍を加え、
第４行に第１行の -2 倍を加えた。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & -4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２列と第３列をとりかえた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -4 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行と第４行をとりかえた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行を -1 倍した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第２行の -1 倍を加え、
第３行に第２行の 2 倍を加えた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第４行に第３行を加えた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第４行を $\frac{1}{2}$ 倍した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第３列と第４列をとりかえた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

第３行と第４行をとりかえた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 11 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第３行を加え、
第２行に第３行の -3 倍を加え、
第４行に第３行の -9 倍を加えた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -7 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第４行の $\frac{1}{3}$ 倍を加え、
第２行に第４行の -1 倍を加え、
第４行を $-\frac{1}{3}$ 倍した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\cdots$ これは目標の形である $(r = 4)$ 。

*step*3.　解は唯一存在する $(m = n = r)$ 。

$step4.$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 5 \\ 2 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ となるから

$step5.$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ である。

$step6.$ （たしかめ）$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & - & \frac{14}{3} & + & 5 & + & 4 \\ \frac{4}{3} & - & \frac{7}{3} & + & 10 & - & 2 \\ \frac{2}{3} & + & \frac{7}{3} & - & 5 & + & 10 \\ \frac{4}{3} & - & \frac{7}{3} & + & 5 & + & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & + & 5 & + & 4 \\ -1 & + & 10 & - & 2 \\ 3 & - & 5 & + & 10 \\ -1 & + & 5 & + & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

<u>例</u> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ を解く。

これは $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書ける。

$step1.$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$ をつくる。

$step2.$ これを基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行に第１行の -1 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第２行の 2 倍を加え、
第３行に第２行を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行を -1 倍した。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\cdots$ これは目標の形である $(r = 2)$ 。

$step3.$ $d_3 = 1 \neq 0$ より解はない。

$step4.$ 　同様に $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$ を解く。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって $(r=2)$ 。$d_3 = 0$ より解は存在する。

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，$c \in \mathbb{C}$ はすべての解を表す。

5.3　$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ における図形的意味

これまで行列やベクトルの成分は複素数を考えて来たが、成分をすべて定数または有理数と仮定しても今までに述べた結果はすべて成り立つ。たとえば、例 4.2 を思い出す。特に方程式系 (#) が解を持つとき、A, $\mathbf{b}$ を実行列、実ベクトルとすれば $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}_1$, $\cdots$, $\mathbf{x}_{n-r}$ も実ベクトルとなる。そこで c_1, $\cdots$, $c_{n-r} \in \mathbb{R}$ ととれば $\mathbf{x}=\mathbf{a}+c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ は実数を成分とする解をすべて表す；

$$\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\}=\{\mathbf{x}=\mathbf{a}+c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \mid c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\in\mathbb{R}\}.$$

以下 5.3 では成分が実数の場合だけを考えるので、上に書いた集合を単に (#) の解空間ということにする。解の含むパラメータの数をみれば次がわかる。

定理 5.4　$n \leqq 3$ とする。1 次方程式系 (#) $\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ で、$\mathrm{A}\in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{R})$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ として解 $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ に限るとき、

(i)　解空間が空集合 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} \lneqq rank\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$

(ii)　解空間が一点集合 $\Leftrightarrow$ $n = rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$

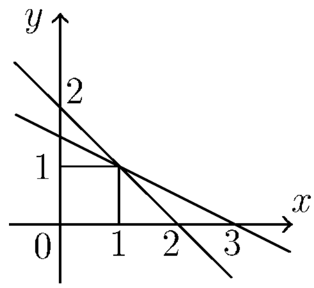
(iii)　解空間が直線 $\Leftrightarrow$ $n-1 = rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$

(iv)　解空間が平面 $\Leftrightarrow$ $n-2 = rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$

注意　実は高次元 ($n \geqq 4$) でも直線や平面が定義される。このとき定理 5.4 で $n \leqq 3$ という条件はとることができる。

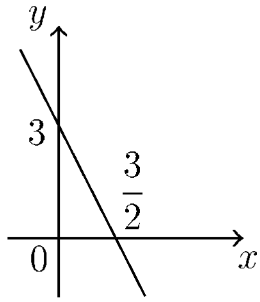
例　$n=2$ のとき、$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$ とすれば $n=2=rank\mathrm{A}=rank\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ より解空間は一点集合である。実際、

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$



$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$ とすれば $n-1=1=rank\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ より解空間は直線となる。実際、

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix} \Leftrightarrow y=-2x+3$$



例　$n=3$ のとき、$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ とすれば $n-1=2=rank\mathrm{A}=rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ より解空間は直線となる。実際、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y=1 \\ 3y-z=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{2}=y=\frac{z-2}{3}$$

即ちこれは点 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ を通り、ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ に平行な直線である。

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とすれば $n-2=1=rank\mathrm{A}=rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ より解空間は平面となる。実際、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow \ x+2y+3z=1$$

即ちこれは点 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通り、ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と垂直な平面である。

最後に $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ の解空間は $\mathbb{R}^3$ であることに注意する。

行列式の図形的な意味

例　(i) $n=2$ のとき、$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ とすれば
$\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ が平行４辺形をつくる $\Leftrightarrow$ $\det\mathrm{A}\neq 0$。
このときこの平行４辺形の面積は $|\det\mathrm{A}|$ である。
(ii) $n=3$ のとき、$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ とすれば
$\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$ が平行６面体をつくる $\Leftrightarrow$ $\det\mathrm{A}\neq 0$。
このときこの平行６面体の体積は $|\det\mathrm{A}|$ である。

5.4　１次方程式系の解法の応用

ここでは線形結合、線形独立、部分空間、生成系、基底、次元など線型空間論（線形代数学）の基本的な事項の定義と簡単な性質についてまとめる。

線形結合　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ とする。$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m$$

と表されるベクトルを $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の線形結合という。

例　$\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\mathbf{b}\text{ が }\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\text{ の線形結合} \Leftrightarrow \begin{aligned}&rank\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\\ &=rank\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\mathbf{b}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

証明　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ とおく、このとき

$$\begin{aligned}\mathbf{b}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n\text{ と表せる } &\Leftrightarrow \mathrm{A}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\mathbf{b}\text{ と表せる。}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\text{ は解を持つ。}\end{aligned}$$

ここで定理5.2 の系 $\left(\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\text{が解を持つ} \Leftrightarrow rank\mathrm{A}=rank\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}\right)$ を思い出せばよい。

証明終

線形独立　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ の線形結合の表し方が常に一意的であるとき $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ は線形独立であるといわれる。即ち $\alpha_1,\cdots, \alpha_n, \beta_1,\cdots, \beta_n \in \mathbb{C}$ に対し

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n=\beta_1\mathbf{a}_1+\cdots+\beta_n\mathbf{a}_n \Rightarrow \alpha_1=\beta_1, \cdots \alpha_n=\beta_n$$

が成り立つとき $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ を線形独立という。移項して考えればこれは

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n=0 \Rightarrow \alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$$

と同値であることもわかる。線形独立でないとき線形従属であるといわれる。

例　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^n$ に対し $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$ とおけば

$$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\text{は線形独立} \Leftrightarrow \det\mathrm{A}\neq 0 \Leftrightarrow rank\mathrm{A}=n$$

よって特に

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} と \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} が線形独立 \ \Leftrightarrow\ ad - bc \neq 0$$

証明は定理4.1、定理4.2 及び補題4.1 より明らか。これは (4.1) の一般化である。

例　$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ とするとき、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は線形独立である。$\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ も線形従属であるから当然 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ も線形従属となる。

記号　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ の線形結合として表されるベクトルの全体を

$$\Im \left[\ \mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n\ \right],\ \mathbb{C}\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbb{C}\mathbf{a}_n,\ \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j$$

などで表す。$\mathrm{A} = \left[\ \mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n\ \right]$ と書いたときには $\Im\mathrm{A}$ と表す。この記号は A を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への写像とみるとき、第０章第１節の記号と矛盾しない。さらに $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ が線形独立であることがわかっている場合には、これらを

$$\mathbb{C}\mathbf{a}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathbb{C}\mathbf{a}_n\ ,\ \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j$$

などで表す。

部分空間　まずは例より入ろう。

例5.3　(m, n) 形行列 A に対して $\mathrm{V} = \Im\mathrm{A}$ とおけば $\mathrm{V} \subset \mathbb{C}^m$ である。さらに V は次の３性質をみたす：

(5.18) $$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{V} \ \Rightarrow\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{V}$$

(5.19) $$\mathbf{x} \in \mathrm{V},\ \alpha \in \mathbb{C} \ \Rightarrow\ \alpha\mathbf{x} \in \mathrm{V}$$

(5.20) $$\mathbf{0} \in \mathrm{V}$$

例5.4　１次方程式系 $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間を $\ker \mathrm{A}$ で表す；

$$\ker \mathrm{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n | \mathrm{A}\mathbf{x} = 0\}.$$

このとき $\mathrm{V} = \ker \mathrm{A}$ とおけば $\mathrm{V} \subset \mathbb{C}^n$ であり、V は (5.18), (5.19), (5.20) をみたす。

これらをふまえて、即ち $\Im\mathrm{A}$, $\ker \mathrm{A}$ の性質を抽象して、次のように定義する。

<u>定義</u>　V が $\mathbb{C}^m$ の部分空間であるとは、 $V \subset \mathbb{C}^m$ であり (5.18), (5.19), (5.20) をみたすときをいう。

<u>例</u>　$\mathrm{V} = \{\mathbf{0}\}$ は部分空間である。また $\mathbb{C}^m$ 自身も $\mathbb{C}^m$ の部分空間である。

<u>例 5.4′</u>　1 次方程式系 (#) $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解空間 Z(#) に対し、

$$\mathrm{Z}(\#) \text{ が } \mathbb{C}^n \text{の部分空間} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

となる。

<u>証明</u>　$\Leftarrow$: $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ならば $\mathrm{Z}(\#) = \ker \mathrm{A}$ だから例 5.4 に帰着する。
$\Rightarrow$: $\mathbf{a} \in \mathrm{Z}(\#)$ だから $2\mathbf{a} \in \mathrm{Z}(\#)$ となる。 $\mathbf{b} = \mathrm{A}(2\mathbf{a}) = 2\mathrm{A}\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$ より $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ を得る。

証明終

<u>生成系と基底</u>　$\mathbb{C}^m$ の部分空間 V に対して $\mathrm{V} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j$ と書けるとき、 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ は V の生成系であるといわれる。生成系がさらに線形独立であれば、即ち $\mathrm{V} = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j$ と書ければ、 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ は V の基底であるといわれる。

<u>例 5.5</u>　$\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ 第 j 行 ; $\mathbf{e}_j \in \mathbb{C}^m (1 \leqq j \leqq m)$ とおけば $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_m$ は $\mathbb{C}^m$ の基底である。

次の補題は補題 3.6 の一般化である。

<u>補題 5.4</u>　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ に対し $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m, n; \mathbb{C})$ とおくとき、

(i)　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ は $\mathbb{C}^m$ の生成系 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = m$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ は全射

(ii)　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ は線形独立 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = n$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ は単射

(iii)　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ は $\mathbb{C}^m$ の基底 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = m = n$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ は全単射。

<u>証明</u>　補題 3.6 と定義より明らかである。

<u>例 5.6</u>　1 次方程式系 (#) $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ において $\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$ を定理 5.2 (5.15), (5.16) の通りとする。このとき

(i)　$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$ は $\ker \mathrm{A}$ の基底である。

(ii)　$\mathbf{b} \neq \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a},\ \mathbf{x}_1,\ \cdots,\ \mathbf{x}_{n-r}$ は線形独立である。

証明　(i) 生成することは明らか。線形独立であることは $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}$ 及び $rank \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} = n-r$ よりわかる。
(ii)　$\Rightarrow$ ：　$\alpha\mathbf{a} + \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} = \mathbf{0}$ とする。 A をかけると $\alpha\mathrm{A}\mathbf{a} + \alpha_1\mathrm{A}\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{n-r}\mathrm{A}\mathbf{x}_{n-r} = \mathbf{0}$ となるから $\alpha\mathbf{b} = 0$ を得る。$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ より $\alpha = 0$ となる。 (i) より $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-r} = 0$ となる。
$\Leftarrow$ ：　もし $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ よりわかる。

証明終

第１章第５節では写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ が線形であることの定義をした。ここではこれを少々一般化して部分空間のあいだの写像に対しても線形性を考える。

定義　V を $\mathbb{C}^n$ の部分空間、 W を $\mathbb{C}^m$ の部分空間とする。写像 $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ が線形であるとは

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') \ ,\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}' \in \mathrm{V}$$
$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \ ,\ \alpha \in \mathbb{C},\ \mathbf{x} \in \mathrm{V}$$

が成り立つときをいう。線形写像が全単射であるとき同形写像あるいは単に同形という。同型写像 $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ が存在するとき部分空間 V と W とは同形であるといい $\mathrm{V} \cong \mathrm{W}$ と表す。次は明らか。

補題 5.5　V を $\mathbb{C}^m$ の部分空間とするとき、
(i)　V の基底 $\mathbf{a}_1,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n$ に対し、写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathrm{V}$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{a}_i \ ,\ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

により定めれば f は同形となる。
(ii)　同形 $f : \mathbb{C}^n \to \mathrm{V}$ に対し、 $\mathbf{a}_j = f(\mathbf{e}_j)\ (1 \leqq j \leqq n)$ とおけば $\mathbf{a}_1,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n$ は V の基底となる。ここで $\mathbf{e}_j (1 \leqq j \leqq n)$ は例 5.5 で定めたものである。
従って V に基底 $\mathbf{a}_1,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n$ を定めることと同形 $f : \mathbb{C}^n \to \mathrm{V}$ を定めることとは同値である。

注意　補題 5.5 で $f : \mathbb{C}^n \to \mathrm{V}$ を自然に $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ と考えれば、 f は (m,n) 形行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ が定める線形写像である； $f = f_{\mathrm{A}}$ 。

例 5.6′　１次方程式系 (#) 。 $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ において $\ker \mathrm{A}$ の基底 $\mathbf{x}_1,\ \cdots,\ \mathbf{x}_{n-r}$ により定まる同形は $f(\#)_0 : \mathbb{C}^{n-r} \to \ker \mathrm{A}$ である。

定理 5.5　V を $\mathbb{C}^m$ の部分空間とする。
(i) $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathrm{V}$ が線形独立であれば、これに有限個のベクトルをつけ加えることにより V の基底が得られる。
(ii) $\mathrm{V} = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{C}\mathbf{b}_j \neq \{\mathbf{0}\}$ ならば $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_\ell$ の中から V の基底がとり出せる。

証明　(i) まず整数の部分集合 N を次のように定義する：

$$\mathrm{N} = \Big\{ k \in \mathbb{Z} | n \leqq k \text{ かつ } \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_{n+1}, \cdots, \mathbf{a}'_k \\ \text{が線形独立となるような } \mathbf{a}'_{n+1}, \cdots, \mathbf{a}'_k \in \mathrm{V} \text{ が存在する} \Big\}.$$

補題 5.4 (ii) より「$k \in \mathrm{N} \Rightarrow k \leqq m$」となるから N は最大値を持つ。それを改めて k とし $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_{n+1}, \cdots, \mathbf{a}'_k \in \mathrm{V}$ が線形独立であるとする。ここでもし $\mathrm{V} \supsetneqq \Im \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{a}'_{n+1} & \cdots & \mathbf{a}'_k \end{bmatrix}$ とすると $\mathbf{x} \in \mathrm{V}$ かつ $\mathbf{x} \notin \Im \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{a}'_{n+1} & \cdots & \mathbf{a}'_k \end{bmatrix}$ となる $\mathbf{x}$ が存在する。このとき $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_{n+1}, \cdots, \mathbf{a}'_k, \mathbf{x}$ は線形独立となり k が最大値であることに矛盾する。従って $\mathrm{V} = \Im \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{a}'_{n+1} & \cdots & \mathbf{a}'_k \end{bmatrix}$ となり $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_{n+1}, \cdots, \mathbf{a}'_k$ は V の基底となる。
(ii) $\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_\ell\}$ の線形独立な部分集合のなかで要素の個数が最大となるものは V の基底となる。

証明終

系　$\mathbb{C}^m$ の部分空間 V に対し、$\mathrm{V} \neq \{\mathbf{0}\}$ ならば V の基底が存在する。

約束　$\mathrm{V} = \{\mathbf{0}\}$ の基底を $\emptyset$（空集合）と定義して、部分空間には常に基底が存在すると考える。

注意　定理 5.5，(ii) について、V を生成する $\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_\ell\}$ の部分集合のなかで要素の個数が最小となるものも V の基底となる。しかしながらいずれにしてもこれらは基底を求める具体的な手段を与えているわけではない。実際には次のように実行する；$\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$ としてよい。

*step*1.　$\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 (i_1 = 1)$ とおく。
*step*2.　$\mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_\ell$ のなかで $\mathbf{x}_1$ の線形結合として表されない最小の番号を i_2 とし $\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_{i_2}$ とおく。
*step*3.　$\mathbf{b}_{i_2+1}, \cdots, \mathbf{b}_\ell$ のなかで $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ の線形結合として表されない最小の番号を i_3 とし $\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_{i_3}$ とおく。
$\cdots$
あとはこれを高々 ℓ 回くり返せば V の基底 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots$、即ち $\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \cdots$ が求まる。

例　$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4$ とし、 $\mathrm{V} = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{C}\mathbf{b}_j$ とおく。このとき $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5$ は V の基底である； $\mathrm{V} = \mathbb{C}\mathbf{b}_1 \bigoplus \mathbb{C}\mathbf{b}_3 \bigoplus \mathbb{C}\mathbf{b}_5$ 。

証明　$\mathbf{b}_2 = 4\mathbf{b}_1$ を書けるから $\mathbf{b}_2$ ははぶく。 $\mathbf{b}_3$ は $\mathbf{b}_1$ の線形結合では表されないから残す。 $\mathbf{b}_4 = -2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_3$ と書けるから $\mathbf{b}_4$ ははぶく。 $\mathbf{b}_5$ は $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3$ の線形結合では表されないから残す。 $\mathbf{b}_6 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_5$ と書けるから $\mathbf{b}_6$ ははぶく。残ったのは $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5$ である。

証明終

次元　$\mathbb{C}^m$ の部分空間 V が $\mathrm{V} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j$ と表されるとき、 V は n 次元である、または V の次元は n であるといい、 $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ と書く。補題 5.4 と補題 5.5 より V の次元は基底のとり方によらず定まることがわかる。また上の約束に従って $\mathrm{V} = \{\mathbf{0}\}$ のときは $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} = 0$ と定義する。

補題 5.5 より

(5.21) $$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} = n \iff \text{同形 } f : \mathbb{C}^n \to \mathrm{V} \text{が存在する}$$

がわかる。

例　$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^m = m$ 。また V が $\mathbb{C}^m$ の部分空間ならば $0 \leqq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} \leqq m$ であり、 $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} = 0 \iff \mathrm{V} = \{\mathbf{0}\}$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} = m \iff \mathrm{V} = \mathbb{C}^m$ となる。

例　V, W を部分空間とするとき、
(i)　全射線形写像 $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ が存在する　$\iff \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} \geqq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{W}$
(ii)　単射線形写像 $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ が存在する　$\iff \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} \leqq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{W}$
(iii)　同形 $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ が存在する　$\iff \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{W}$

証明　補題 5.4 と (5.21) より明らか。

定理 5.6　A を (m, n) 形行列、即ち線形写像 $\mathrm{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ とするとき
(i)　$\Im\mathrm{A}$ は $\mathbb{C}^m$ の部分空間で $\dim_{\mathbb{C}} \Im\mathrm{A} = rank\mathrm{A}$ となる。
(ii)　$\ker \mathrm{A}$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間で $\dim_{\mathbb{C}} \ker \mathrm{A} = n - rank\mathrm{A}$ となる。

<u>証明</u>　(i) $r = rank\mathrm{A}$ として $\mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{B}$ とする。このとき $\mathrm{P}(\Im\mathrm{A}) = \Im\mathrm{B} \cong \mathbb{C}^r$ となるから $\dim_{\mathbb{C}} \Im\mathrm{A} = \dim_{\mathbb{C}} \Im\mathrm{B} = r$ となる。
(ii) は例 5.6 より明らか。

証明終

<u>系</u>　(i) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = \dim_{\mathbb{C}} \ker \mathrm{A} + \dim_{\mathbb{C}} \Im\mathrm{A}$
(ii) $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ とするとき、
$dim_{\mathbb{C}} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j \right) = rank \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \leqq n$ となる。さらに
$rank \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ は $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ のなかの線形独立なベクトルの最大数である。

<u>証明</u>　(i) 定理 5.6 の (i) と (ii) を加えればよい。
(ii) 前半は定理 5.6 (i) を書き直しただけである。後半は前半と定理 5.5 より明らか。

（証明終）

部分空間の導入に際して $\Im\mathrm{A}$, $\ker \mathrm{A}$ がモデルとなった（例 5.3 及び例 5.4)。実は部分空間はすべてこのような形をしていることを次に示す。

<u>定理 5.7</u>　V を $\mathbb{C}^m$ の部分集合とするとき、
V は $\mathbb{C}^m$ の部分空間である $\Leftrightarrow$ $\mathrm{V} = \ker \mathrm{A}$ となる (ℓ, m) 形行列 A が存在する
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{V} = \Im\mathrm{A}$ となる (m, n) 形行列 B が存在する
即ち任意の部分空間は $\mathrm{V} = \ker \mathrm{A} = \Im\mathrm{B}$ と表される。

<u>証明</u>　$\mathrm{V} = \ker \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{V}$: 部分空間、$\mathrm{V} = \ker \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{V}$: 部分空間はすでに示した。
「 V : 部分空間 $\Rightarrow$ $\mathrm{V} = \Im\mathrm{B}$ 」を示す。 V の基底を $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n$ とし $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ とおけば $\mathrm{V} = \Im\mathrm{B}$ となる。
「 V : 部分空間 $\Rightarrow$ $\mathrm{V} = \ker \mathrm{A}$ 」を示す。 V の基底を $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n$ とする。 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{C}^m$ は線形独立だから定理 5.5 (i) より $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_\ell$ が $\mathbb{C}^m$ の基底となるような $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_\ell$ が存在する。このとき $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_\ell & \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}^{-1}$ とおけば A は (ℓ, m) 形行列となる。 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ を $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_\ell\mathbf{a}_\ell + \beta_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{b}_n$ $(\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C})$ と表すとき、
$\mathrm{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_\ell & \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}^{-1} (\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_\ell\mathbf{a}_\ell +$
$\beta_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{b}_n) = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{bmatrix}$

となるから $\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{x} \in \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{b}_j = \mathrm{V}$ 、即ち $\ker \mathrm{A} = \mathrm{V}$ となる。

証明終

注意　ここで A は単射、 B は全射かつ $m > \ell + n$ となっている。

5.5　階数再論

ここでは §5.4 の応用として今までに述べて来た行列の階数の性質のまとめをして、新たな性質をいくつか述べる。以下の内容は第６章以降では用いられない。

命題 5.1　(m, n) 形行列 A の階数は次のいずれによっても与えられる。

(i)　A を基本変形で $\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と直したときの r

(ii)　A の 0 でない小行列式の最大次数

(iii)　$\dim_{\mathbb{C}} \Im \mathrm{A}$

(iv)　A の線形独立な列ベクトルの最大数

(iv)′ A の線形独立な行ベクトルの最大数

証明　(i) は定義そのもの（第３章第２節）。(ii) は第４章第３節の命題。(iii) は定理 5.6 (i)，(iv) はその系。(iv)′ は例 3.4 と (iv) よりわかる。

（証明終）

以下では階数の新たな性質を考えるための準備をする。

部分空間の共通部分と和

例　V，W が $\mathbb{C}^m$ の部分空間であるとき、$\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ は $\mathbb{C}^m$ の部分空間となるが $\mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ は $\mathbb{C}^m$ の部分空間になるとは限らない。
実際、$\mathrm{V} \cup \mathrm{W} : \mathbb{C}^n$ の部分空間 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{V} \subset \mathrm{W}$ or $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ となる。

証明　$\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ が (5.18)，(5.19)，(5.20) をみたすのは明らか。$\mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ についてはたとえば、$m = 2$，$\mathrm{V} = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\mathrm{W} = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ となるから (5.18) をみたさないことがわかる。

定義　$\mathbb{C}^m$ の部分空間 V，W に対し

$$\mathrm{V} + \mathrm{W} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathrm{V},\ \mathbf{y} \in \mathrm{W}\}$$

とおいて V と W の和という。これは $\mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ を含む最小の $\mathbb{C}^m$ の部分空間である。特に $\mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \{\mathbf{0}\}$ がわかっているときは $\mathrm{V} + \mathrm{W} = \mathrm{V} \bigoplus \mathrm{W}$ と書いてこれを直和という。

補題 5.6　V，W を $\mathbb{C}^m$ の部分空間をするとき

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V} + \mathrm{W}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{W} - \dim_{\mathbb{C}} (\mathrm{V} \cap \mathrm{W})$$

が成り立つ。

証明　V∩W の基底を $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$ とする。これにベクトルをつけ加えて V の基底 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r,\ \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_s$ 及び W の基底 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r,\ \mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_t$ をつくる。このとき $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r,\ \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_s,\ \mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_t$ が $\mathrm{V}+\mathrm{W}$ の基底となることをいう。これが $\mathrm{V}+\mathrm{W}$ を生成することは明らかだから線形独立であることをいえばよい。

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{b}_j + \sum_{k=1}^{t} \gamma_k \mathbf{c}_k = \mathbf{0}\ (\alpha_i,\ \beta_j, \gamma_k\ \in\ \mathbb{C})$$

とする。移項すれば

$$\mathrm{V} \ni \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{b}_j = -\sum_{k=1}^{t} \gamma_k \mathbf{c}_k \in \mathrm{W}$$

となるから $\gamma_1 = \cdots = \gamma_t = 0$ 。よって $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}$ となるから $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$ を得る。これより線形独立即ち基底であることがわかる。従って $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}+\mathrm{W}) = r+s+t = (r+s)+(r+t)-r = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{W} - \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}\cap\mathrm{W})$ となる。

証明終

系　(i) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}+\mathrm{W}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{W} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{V}\cap\mathrm{W} = \{\mathbf{0}\}$
(ii) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V} \bigoplus \mathrm{W}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{W}$

補題 5.7　A を (ℓ, m) 形行列、 V を $\mathbb{C}^m$ の部分空間とするとき、

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}\cap\mathrm{V}) + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{A}(\mathrm{V})$$

証明　$\mathrm{A}:\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^\ell$ を制限して全射 $\mathrm{A}|\mathrm{V}:\mathrm{V}\to\mathrm{A}(\mathrm{V})$ を得る。よって $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} = r,\ \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{A}(\mathrm{V}) = s$ とすれば全射 $\mathrm{B}:\mathbb{C}^r\to\mathbb{C}^s$ が存在する。これに定理 5.6 の系 (i) を適用すると $r = \dim_{\mathbb{C}}\ker\mathrm{B} + s$ を得る。ここで $\ker\mathrm{B} = \{\mathbf{y}\in\mathbb{C}^r|\mathrm{B}\mathbf{y}=0\} \cong \{\mathbf{x}\in\mathrm{V}|\mathrm{A}\mathbf{x}=0\} = \ker\mathrm{A}\cap\mathrm{V}$ に注意すれば $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} = r = \dim_{\mathbb{C}}\ker\mathrm{B} + s = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}\cap\mathrm{V}) + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{A}(\mathrm{V})$ がわかる。

証明終

系　A を (ℓ, m) 形行列、 B を (m, n) 形行列とするとき、
(i) $rank\mathrm{B} - rank(\mathrm{AB}) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}\cap\Im\mathrm{B})$
(ii) $rank\mathrm{A} - rank(\mathrm{AB}) = m - \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}+\Im\mathrm{B})$

証明　(i) 補題 5.7 で $\mathrm{V} = \Im\mathrm{B}$ とおけば $\mathrm{A}(\mathrm{V}) = \Im(\mathrm{AB})$ となるから $rank\mathrm{B} = \dim_{\mathbb{C}}\Im\mathrm{B} = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}\cap\Im\mathrm{B}) + rank(\mathrm{AB})$ となる。
(ii) は (i) 、補題 5.6 及び定理 5.6 よりわかる。

証明終

以上の準備のもと階数の新たな性質を証明する。

命題 5.2　A，B を行列とする。
(i)　A，B のサイズが同じとき、 $rank(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqq rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B}$ となる。また
$rank(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} \;\Leftrightarrow\; \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \Im\mathrm{A} \bigoplus \Im\mathrm{B}$
(ii)　A が (ℓ, m) 形、 B が (m, n) 形であるとき、

$$rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} - m \leqq rank(\mathrm{AB}) \leqq \min\{rank\mathrm{A},\ rank\mathrm{B}\}$$

となる。また

$$\begin{array}{lcl} rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} - m = rank(\mathrm{AB}) & \Leftrightarrow & \ker\mathrm{A} \subset \Im\mathrm{B} \\ rank\mathrm{AB} = rank\mathrm{A} & \Leftrightarrow & \ker\mathrm{A} + \Im\mathrm{B} = \mathbb{C}^m \\ rank\mathrm{AB} = rank\mathrm{B} & \Leftrightarrow & \ker\mathrm{A} \cap \Im\mathrm{B} = \{\mathbf{0}\} \end{array}$$

証明　(i)　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m, n : \mathbb{C})$ とすれば $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ となる。ここで
$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}(\mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j) \subset \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{b}_j$ に注意すれば

$$\Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}(\mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j) \subset \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{b}_j = \Im\mathrm{A} + \Im\mathrm{B}$$

がわかる。よって

$$\begin{array}{rcl} rank(\mathrm{A}+\mathrm{B}) & = & \dim_{\mathbb{C}} \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqq \dim_{\mathbb{C}}(\Im\mathrm{A} + \Im\mathrm{B}) \\ & \leqq & \dim_{\mathbb{C}}(\Im\mathrm{A}) + \dim_{\mathbb{C}}(\Im\mathrm{B}) = rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} \end{array}$$

を得る。しかも

$$\begin{array}{rcl} \text{等号の成立} & \Leftrightarrow & \dim_{\mathbb{C}} \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \dim_{\mathbb{C}}(\Im\mathrm{A} + \Im\mathrm{B}) = \dim_{\mathbb{C}} \Im\mathrm{A} + \dim_{\mathbb{C}} \Im\mathrm{B} \\ & \Leftrightarrow & \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \Im\mathrm{A} + \Im\mathrm{B} \text{ かつ } \Im\mathrm{A} \cap \Im\mathrm{B} = \{\mathbf{0}\} \\ & \Leftrightarrow & \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \Im\mathrm{A} \bigoplus \Im\mathrm{B} \end{array}$$

となる。
(ii)　まず $rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} - m \leqq rank(\mathrm{AB})$ を示す。補題 5.7 の系 (i) と定理 5.6 より

$$rank\mathrm{B} - rank(\mathrm{AB}) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A} \cap \Im\mathrm{B}) \leqq \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}) = m - rank\mathrm{A}$$

となる。さらに
等号の成立 $\Leftrightarrow$ $\ker \mathrm{A} \cap \Im \mathrm{B} = \ker \mathrm{A}$ $\Leftrightarrow$ $\ker \mathrm{A} \subset \Im \mathrm{B}$
次に補題 5.7 の系 (ii) より $rank\mathrm{A} - rank(\mathrm{AB}) = m - \dim_{\mathbb{C}}(\ker \mathrm{A} + \Im \mathrm{B}) \geqq 0$ かつ
等号の成立 $\Leftrightarrow$ $m = \dim_{\mathbb{C}}(\ker \mathrm{A} + \Im \mathrm{B})$ $\Leftrightarrow$ $\ker \mathrm{A} + \Im \mathrm{B} = \mathbb{C}^m$
最後に補題 5.7 の系 (i) より $rank\mathrm{B} - rank(\mathrm{AB}) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker \mathrm{A} \cap \Im \mathrm{B}) \geqq 0$ かつ
等号の成立 $\Leftrightarrow$ $\ker \mathrm{A} \cap \Im \mathrm{B} = \{\mathbf{0}\}$
となる。

証明終

系 $rank(\mathrm{AB}) = rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}^m = \ker \mathrm{A} \bigoplus \Im \mathrm{B}$

命題 5.3 A を (n, m) 形行列、B を (m, n) 形行列とし、$n < m$ とする。このとき
(i) BA は正則ではない。
(ii) AB は正則 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = n$ かつ $\ker \mathrm{A} + \Im \mathrm{B} = \mathbb{C}^m$
$\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{B} = n$ かつ $\ker \mathrm{A} \cap \Im \mathrm{B} = \{\mathbf{0}\}$

証明 (i) BA は m 次正方行列であり、$rank(\mathrm{BA}) \leqq rank\mathrm{B} \leqq n < m$ となるから BA は正則ではない。
(ii) は命題 5.2 (ii) より明らか。

証明終

命題 5.4 A を (m, n) 形行列とするとき、
$rank\mathrm{A} \leqq 1$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{A} = \mathbf{ab}$ となる $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^m,\ \mathbf{b} \in {}^t\mathbb{C}^n$ が存在する。

証明 $\Leftarrow$ はすでに例 3.5 で示した。
$\Rightarrow$: $\mathrm{A} = 0$ なら $\mathbf{a} = \mathbf{0},\ \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ととればよいから $rank\mathrm{A} = 1$ としてよい。$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ と書ける。$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ の中から基底 $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^m$ がとれる。
このとき $\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_j \mathbf{a}\ (1 \leqq j \leqq n)$ と書けるから $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \in {}^t\mathbb{C}^n$ とおけば $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\mathbf{a} & \cdots & b_n\mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{a}\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \mathbf{ab}$ となる。

証明終