5.5　階数再論

ここでは §5.4 の応用として今までに述べて来た行列の階数の性質のまとめをして、新たな性質をいくつか述べる。以下の内容は第６章以降では用いられない。

命題 5.1　(m, n) 形行列 A の階数は次のいずれによっても与えられる。

(i)　A を基本変形で $\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と直したときの r

(ii)　A の 0 でない小行列式の最大次数

(iii)　$\dim_{\mathbb{C}} \Im \mathrm{A}$

(iv)　A の線形独立な列ベクトルの最大数

(iv)′ A の線形独立な行ベクトルの最大数

証明　(i) は定義そのもの（第３章第２節）。(ii) は第４章第３節の命題。(iii) は定理 5.6 (i), (iv) はその系。(iv)′ は例 3.4 と (iv) よりわかる。

（証明終）

以下では階数の新たな性質を考えるための準備をする。

部分空間の共通部分と和

例　V, W が $\mathbb{C}^m$ の部分空間であるとき、 $\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ は $\mathbb{C}^m$ の部分空間となるが $\mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ は $\mathbb{C}^m$ の部分空間になるとは限らない。
実際、 $\mathrm{V} \cup \mathrm{W} : \mathbb{C}^n$ の部分空間 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{V} \subset \mathrm{W}$ or $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ となる。

証明　$\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ が (5.18), (5.19), (5.20) をみたすのは明らか。$\mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ についてはたとえば、$m = 2$, $\mathrm{V} = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{W} = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ となるから (5.18) をみたさないことがわかる。

定義　$\mathbb{C}^m$ の部分空間 V, W に対し

$$\mathrm{V} + \mathrm{W} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathrm{V},\ \mathbf{y} \in \mathrm{W}\}$$

とおいて V と W の和という。これは $\mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ を含む最小の $\mathbb{C}^m$ の部分空間である。特に $\mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \{\mathbf{0}\}$ がわかっているときは $\mathrm{V} + \mathrm{W} = \mathrm{V} \bigoplus \mathrm{W}$ と書いてこれを直和という。

補題 5.6　V, W を $\mathbb{C}^m$ の部分空間をするとき

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V} + \mathrm{W}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{W} - \dim_{\mathbb{C}} (\mathrm{V} \cap \mathrm{W})$$

が成り立つ。

証明　V∩W の基底を $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$ とする。これにベクトルをつけ加えて V の基底 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r,\ \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_s$ 及び W の基底 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r,\ \mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_t$ をつくる。このとき $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r,\ \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_s,\ \mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_t$ が $\mathrm{V}+\mathrm{W}$ の基底となることをいう。これが $\mathrm{V}+\mathrm{W}$ を生成することは明らかだから線形独立であることをいえばよい。

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{b}_j + \sum_{k=1}^{t} \gamma_k \mathbf{c}_k = \mathbf{0}\ (\alpha_i,\ \beta_j, \gamma_k\ \in\ \mathbb{C})$$

とする。移項すれば

$$\mathrm{V} \ni \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{b}_j = -\sum_{k=1}^{t} \gamma_k \mathbf{c}_k \in \mathrm{W}$$

となるから $\gamma_1 = \cdots = \gamma_t = 0$ 。よって $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}$ となるから $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$ を得る。これより線形独立即ち基底であることがわかる。従って $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}+\mathrm{W}) = r+s+t = (r+s)+(r+t)-r = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{W} - \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}\cap\mathrm{W})$ となる。

証明終

系　(i) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}+\mathrm{W}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{W} \iff \mathrm{V}\cap\mathrm{W} = \{\mathbf{0}\}$
(ii) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{V} \bigoplus \mathrm{W}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{W}$

補題 5.7　A を (ℓ, m) 形行列、 V を $\mathbb{C}^m$ の部分空間とするとき、

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}\cap\mathrm{V}) + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{A}(\mathrm{V})$$

証明　$\mathrm{A}: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^\ell$ を制限して全射 $\mathrm{A}|\mathrm{V}: \mathrm{V} \to \mathrm{A}(\mathrm{V})$ を得る。よって $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} = r,\ \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{A}(\mathrm{V}) = s$ とすれば全射 $\mathrm{B}: \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^s$ が存在する。これに定理 5.6 の系 (i) を適用すると $r = \dim_{\mathbb{C}}\ker\mathrm{B} + s$ を得る。ここで $\ker\mathrm{B} = \{\mathbf{y}\in\mathbb{C}^r | \mathrm{B}\mathbf{y} = 0\} \cong \{\mathbf{x}\in\mathrm{V} | \mathrm{A}\mathbf{x} = 0\} = \ker\mathrm{A}\cap\mathrm{V}$ に注意すれば $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V} = r = \dim_{\mathbb{C}}\ker\mathrm{B} + s = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}\cap\mathrm{V}) + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{A}(\mathrm{V})$ がわかる。

証明終

系　A を (ℓ, m) 形行列、 B を (m, n) 形行列とするとき、
(i)　$rank\mathrm{B} - rank(\mathrm{AB}) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}\cap\Im\mathrm{B})$
(ii)　$rank\mathrm{A} - rank(\mathrm{AB}) = m - \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}+\Im\mathrm{B})$

証明　(i) 補題 5.7 で $\mathrm{V} = \Im\mathrm{B}$ とおけば $\mathrm{A}(\mathrm{V}) = \Im(\mathrm{AB})$ となるから $rank\mathrm{B} = \dim_{\mathbb{C}}\Im\mathrm{B} = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}\cap\Im\mathrm{B}) + rank(\mathrm{AB})$ となる。
(ii) は (i) 、補題 5.6 及び定理 5.6 よりわかる。

証明終

以上の準備のもと階数の新たな性質を証明する。

命題 5.2　A，B を行列とする。
(i)　A，B のサイズが同じとき、 $rank(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqq rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B}$ となる。また
$rank(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} \ \Leftrightarrow\ \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \Im\mathrm{A} \bigoplus \Im\mathrm{B}$
(ii)　A が (ℓ, m) 形、 B が (m, n) 形であるとき、

$$rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} - m \leqq rank(\mathrm{AB}) \leqq \min\{rank\mathrm{A},\ rank\mathrm{B}\}$$

となる。また

$$\begin{array}{lcl} rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} - m = rank(\mathrm{AB}) & \Leftrightarrow & \ker\mathrm{A} \subset \Im\mathrm{B} \\ rank\mathrm{AB} = rank\mathrm{A} & \Leftrightarrow & \ker\mathrm{A} + \Im\mathrm{B} = \mathbb{C}^m \\ rank\mathrm{AB} = rank\mathrm{B} & \Leftrightarrow & \ker\mathrm{A} \cap \Im\mathrm{B} = \{\mathbf{0}\} \end{array}$$

証明　(i)　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m, n : \mathbb{C})$ とすれば $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ となる。ここで $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}(\mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j) \subset \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{b}_j$ に注意すれば

$$\Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}(\mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j) \subset \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{a}_j + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C}\mathbf{b}_j = \Im\mathrm{A} + \Im\mathrm{B}$$

がわかる。よって

$$\begin{array}{rcl} rank(\mathrm{A}+\mathrm{B}) & = & \dim_{\mathbb{C}} \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqq \dim_{\mathbb{C}}(\Im\mathrm{A} + \Im\mathrm{B}) \\ & \leqq & \dim_{\mathbb{C}}(\Im\mathrm{A}) + \dim_{\mathbb{C}}(\Im\mathrm{B}) = rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} \end{array}$$

を得る。しかも

$$\begin{array}{lcl} \text{等号の成立} & \Leftrightarrow & \dim_{\mathbb{C}} \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \dim_{\mathbb{C}}(\Im\mathrm{A} + \Im\mathrm{B}) = \dim_{\mathbb{C}} \Im\mathrm{A} + \dim_{\mathbb{C}} \Im\mathrm{B} \\ & \Leftrightarrow & \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \Im\mathrm{A} + \Im\mathrm{B} \text{ かつ } \Im\mathrm{A} \cap \Im\mathrm{B} = \{\mathbf{0}\} \\ & \Leftrightarrow & \Im(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \Im\mathrm{A} \bigoplus \Im\mathrm{B} \end{array}$$

となる。
(ii)　まず $rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B} - m \leqq rank(\mathrm{AB})$ を示す。補題 5.7 の系 (i) と定理 5.6 より

$$rank\mathrm{B} - rank(\mathrm{AB}) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A} \cap \Im\mathrm{B}) \leqq \dim_{\mathbb{C}}(\ker\mathrm{A}) = m - rank\mathrm{A}$$

となる。さらに
等号の成立 $\Leftrightarrow$ $\ker \mathrm{A} \cap \Im \mathrm{B} = \ker \mathrm{A}$ $\Leftrightarrow$ $\ker \mathrm{A} \subset \Im \mathrm{B}$
次に補題 5.7 の系 (ii) より $rank\mathrm{A} - rank(\mathrm{AB}) = m - \dim_{\mathbb{C}}(\ker \mathrm{A} + \Im \mathrm{B}) \geqq 0$ かつ
等号の成立 $\Leftrightarrow$ $m = \dim_{\mathbb{C}}(\ker \mathrm{A} + \Im \mathrm{B})$ $\Leftrightarrow$ $\ker \mathrm{A} + \Im \mathrm{B} = \mathbb{C}^m$
最後に補題 5.7 の系 (i) より $rank\mathrm{B} - rank(\mathrm{AB}) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker \mathrm{A} \cap \Im \mathrm{B}) \geqq 0$ かつ
等号の成立 $\Leftrightarrow$ $\ker \mathrm{A} \cap \Im \mathrm{B} = \{\mathbf{0}\}$
となる。

証明終

系 $rank(\mathrm{AB}) = rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}^m = \ker \mathrm{A} \bigoplus \Im \mathrm{B}$

命題 5.3 A を (n, m) 形行列、 B を (m, n) 形行列とし、 $n < m$ とする。このとき
(i) BA は正則ではない。
(ii) AB は正則 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = n$ かつ $\ker \mathrm{A} + \Im \mathrm{B} = \mathbb{C}^m$
$\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{B} = n$ かつ $\ker \mathrm{A} \cap \Im \mathrm{B} = \{\mathbf{0}\}$

証明 (i) BA は m 次正方行列であり、$rank(\mathrm{BA}) \leqq rank\mathrm{B} \leqq n < m$ となるから BA は正則ではない。
(ii) は命題 5.2 (ii) より明らか。

証明終

命題 5.4 A を (m, n) 形行列とするとき、
$rank\mathrm{A} \leqq 1$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{A} = \mathbf{ab}$ となる $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^m,\ \mathbf{b} \in {}^t\mathbb{C}^n$ が存在する。

証明 $\Leftarrow$ はすでに例 3.5 で示した。
$\Rightarrow$: $\mathrm{A} = 0$ なら $\mathbf{a} = \mathbf{0},\ \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ととればよいから $rank\mathrm{A} = 1$ としてよい。$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ と書ける。 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ の中から基底 $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^m$ がとれる。
このとき $\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_j \mathbf{a}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ と書けるから $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \in {}^t\mathbb{C}^n$ とおけば $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\mathbf{a} & \cdots & b_n\mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{a} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \mathbf{ab}$ となる。

証明終