

5.4 1 次方程式系の解法に応用

ここでは線形結合、線形独立、部分空間、生成系、基底、次元など線型空間論（線形代数学）の基本的な事項の定義と簡単な性質についてまとめる。

線形結合 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ とする。 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m$$

と表されるベクトルを $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の線形結合という。

例 $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\mathbf{b} \text{ が } \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \text{ の線形結合} \Leftrightarrow \begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \\ = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

証明 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \in M(m, n; \mathbb{C})$ とおく、このとき

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \text{ と表せる} &\Leftrightarrow A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{b} \text{ と表せる。} \\ &\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ は解を持つ。} \end{aligned}$$

ここで定理5.2の系 ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つ $\Leftrightarrow \text{rank} A = \text{rank} \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$) を思い出せばよい。

証明終

線形独立 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ の線形結合の表し方が常に一意的であるとき $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形独立であるといわれる。即ち $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ に対し

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{a}_n \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$$

が成り立つとき $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を線形独立という。移項して考えればこれは

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

と同値であることもわかる。線形独立でないとき線形従属であるといわれる。

例 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^n$ に対し $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ とおけば

$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \text{ は線形独立} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank} A = n$$

よって特に

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \text{ が線形独立} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

証明は定理 4.1、定理 4.2 及び補題 4.1 より明らか。これは (4.1) の一般化である。

例 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ とするとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は線形独立である。 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ も線形従属であるから当然 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ も線形従属となる。

記号 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ の線形結合として表されるベクトルの全体を

$$\mathfrak{S}[\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n], \mathbb{C}\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbb{C}\mathbf{a}_n, \sum_{j=1}^n \mathbb{C}\mathbf{a}_j$$

などで表す。 $A = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ と書いたときには $\mathfrak{S}A$ と表す。この記号は A を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への写像とみるとき、第 0 章第 1 節の記号と矛盾しない。さらに $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が線形独立であることがわかっている場合には、これらを

$$\mathbb{C}\mathbf{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\mathbf{a}_n, \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{C}\mathbf{a}_j$$

などで表す。

部分空間 まずは例より入ろう。

例 5.3 (m, n) 形行列 A に対して $V = \mathfrak{S}A$ とおけば $V \subset \mathbb{C}^m$ である。さらに V は次の 3 性質をみたす：

$$(5.18) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$$

$$(5.19) \quad \mathbf{x} \in V, \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha\mathbf{x} \in V$$

$$(5.20) \quad \mathbf{0} \in V$$

例 5.4 1 次方程式系 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間を $\ker A$ で表す；

$$\ker A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

このとき $V = \ker A$ とおけば $V \subset \mathbb{C}^n$ であり、 V は (5.18), (5.19), (5.20) をみたす。

これらをふまえて、即ち $\mathfrak{S}A, \ker A$ の性質を抽象して、次のように定義する。

定義 V が $\mathbb{C}^m$ の部分空間であるとは、 $V \subset \mathbb{C}^m$ であり (5.18), (5.19), (5.20) をみたすときをいう。

例 $V = \{0\}$ は部分空間である。また $\mathbb{C}^m$ 自身も $\mathbb{C}^m$ の部分空間である。

例 5.4' 1 次方程式系 (#) $Ax = b$ の解空間 $Z(\#)$ に対し、

$$Z(\#) \text{ が } \mathbb{C}^n \text{ の部分空間} \Leftrightarrow b = 0$$

となる。

証明 $\Leftarrow$: $b = 0$ ならば $Z(\#) = \ker A$ だから例 5.4 に帰着する。
 $\Rightarrow$: $a \in Z(\#)$ だから $2a \in Z(\#)$ となる。 $b = A(2a) = 2Aa = 2b$ より $b = 0$ を得る。

証明終

生成系と基底 $\mathbb{C}^m$ の部分空間 V に対して $V = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}a_j$ と書けると
 き、 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^m$ は V の生成系であるといわれる。生成系がさらに線形独立であれば、即ち $V = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{C}a_j$ と書ければ、 $a_1, \dots, a_n$ は V の基底であるといわれる。

$$\text{例 5.5} \quad e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} ; e_j \in \mathbb{C}^m (1 \leq j \leq m) \text{ とおけば}$$

$e_1, \dots, e_m$ は $\mathbb{C}^m$ の基底である。

次の補題は補題 3.6 の一般化である。

補題 5.4 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^m$ に対し $A = [a_1 \ \dots \ a_n] \in M(m, n; \mathbb{C})$ とおくと、

- (i) $a_1, \dots, a_n$ は $\mathbb{C}^m$ の生成系 $\Leftrightarrow \text{rank} A = m$
 $\Leftrightarrow A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ は全射
- (ii) $a_1, \dots, a_n$ は線形独立 $\Leftrightarrow \text{rank} A = n$
 $\Leftrightarrow A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ は単射
- (iii) $a_1, \dots, a_n$ は $\mathbb{C}^m$ の基底 $\Leftrightarrow \text{rank} A = m = n$
 $\Leftrightarrow A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ は全単射。

証明 補題 3.6 と定義より明らかである。

例 5.6 1 次方程式系 (#) $Ax = b$ において $a, x_1, \dots, x_{n-r}$ を定理 5.2 (5.15), (5.16) の通りとする。このとき

- (i) $x_1, \dots, x_{n-r}$ は $\ker A$ の基底である。

(ii) $\mathbf{b} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-r}$ は線形独立である。

証明 (i) 生成することは明らか。線形独立であることは $[\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_{n-r}] = Q \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{E}_{n-r} \end{bmatrix}$ 及び $\text{rank} \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{E}_{n-r} \end{bmatrix} = n-r$ よりわかる。

(ii) $\Rightarrow$: $\alpha \mathbf{a} + \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{n-r} \mathbf{x}_{n-r} = \mathbf{0}$ とする。A をかけると $\alpha \mathbf{Aa} + \alpha_1 \mathbf{Ax}_1 + \cdots + \alpha_{n-r} \mathbf{Ax}_{n-r} = \mathbf{0}$ となるから $\alpha \mathbf{b} = \mathbf{0}$ を得る。 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ より $\alpha = 0$ となる。(i) より $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-r} = 0$ となる。
 $\Leftarrow$: もし $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ よりわかる。

証明終

第1章第5節では写像 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ が線形であることの定義をした。ここではこれを少々一般化して部分空間のあいだの写像に対しても線形性を考える。

定義 V を $\mathbb{C}^n$ の部分空間、 W を $\mathbb{C}^m$ の部分空間とする。写像 $f: V \rightarrow W$ が線形であるとは

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V \\ f(\alpha \mathbf{x}) &= \alpha f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{x} \in V \end{aligned}$$

が成り立つときをいう。線形写像が全単射であるとき同形写像あるいは単に同形という。同型写像 $f: V \rightarrow W$ が存在するとき部分空間 V と W とは同形であるといい $V \cong W$ と表す。次は明らか。

補題 5.5 V を $\mathbb{C}^m$ の部分空間とすると、

(i) V の基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ に対し、写像 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i, \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

により定めれば f は同形となる。

(ii) 同形 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ に対し、 $\mathbf{a}_j = f(\mathbf{e}_j)$ ($1 \leq j \leq n$) とおけば $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は V の基底となる。ここで $\mathbf{e}_j$ ($1 \leq j \leq n$) は例 5.5 で定めたものである。

従って V に基底 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を定めることと同形 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ を定めることは同値である。

注意 補題 5.5 で $f: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ を自然に $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ と考えれば、 f は (m, n) 形行列 $A = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ が定める線形写像である； $f = f_A$ 。

例 5.6' 1 次方程式系 (#)。 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ において $\ker A$ の基底 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-r}$ により定まる同形は $f(\#)_0: \mathbb{C}^{n-r} \rightarrow \ker A$ である。

定理 5.5 V を $\mathbb{C}^m$ の部分空間とする。

(i) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ が線形独立であれば、これに有限個のベクトルをつけ加えることにより V の基底が得られる。

(ii) $V = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{C} \mathbf{b}_j \neq \{0\}$ ならば $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{\ell}$ の中から V の基底がとり出せる。

証明 (i) まず整数の部分集合 N を次のように定義する：

$$N = \{k \in \mathbb{Z} \mid n \leq k \text{ かつ } \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_{n+1}, \dots, \mathbf{a}'_k \text{ が線形独立となるような } \mathbf{a}'_{n+1}, \dots, \mathbf{a}'_k \in V \text{ が存在する}\}.$$

補題 5.4 (ii) より「 $k \in N \Rightarrow k \leq m$ 」となるから N は最大値を持つ。それを改めて k とし $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_{n+1}, \dots, \mathbf{a}'_k \in V$ が線形独立であるとする。ここでもし $V \supsetneq \mathfrak{S}[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{a}'_{n+1} \dots \mathbf{a}'_k]$ とすると $\mathbf{x} \in V$ かつ $\mathbf{x} \notin \mathfrak{S}[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{a}'_{n+1} \dots \mathbf{a}'_k]$ となる $\mathbf{x}$ が存在する。このとき $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_{n+1}, \dots, \mathbf{a}'_k, \mathbf{x}$ は線形独立となり k が最大値であることに矛盾する。従って $V = \mathfrak{S}[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{a}'_{n+1} \dots \mathbf{a}'_k]$ となり $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_{n+1}, \dots, \mathbf{a}'_k$ は V の基底となる。

(ii) $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{\ell}\}$ の線形独立な部分集合のなかで要素の個数が最大となるものは V の基底となる。

証明終

系 $\mathbb{C}^m$ の部分空間 V に対し、 $V \neq \{0\}$ ならば V の基底が存在する。

約束 $V = \{0\}$ の基底を $\emptyset$ (空集合) と定義して、部分空間には常に基底が存在すると考える。

注意 定理 5.5, (ii) について、 V を生成する $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{\ell}\}$ の部分集合のなかで要素の個数が最小となるものも V の基底となる。しかしながらいずれにしてもこれらは基底を求める具体的な手段を与えているわけではない。実際には次のように実行する； $\mathbf{b}_1 \neq 0$ としてよい。

step1. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 (i_1 = 1)$ とおく。

step2. $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{\ell}$ のなかで $\mathbf{x}_1$ の線形結合として表されない最小の番号を i_2 とし $\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_{i_2}$ とおく。

step3. $\mathbf{b}_{i_2+1}, \dots, \mathbf{b}_{\ell}$ のなかで $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ の線形結合として表されない最小の番号を i_3 とし $\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_{i_3}$ とおく。

...

あとはこれを高々 ℓ 回くり返せば V の基底 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ 、即ち $\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \dots$ が求まる。

例 $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{b}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4$ とし、 $V = \sum_{j=1}^5 \mathbb{C}\mathbf{b}_j$ とおく。このとき $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5$ は V の基底である； $V = \mathbb{C}\mathbf{b}_1 \oplus \mathbb{C}\mathbf{b}_3 \oplus \mathbb{C}\mathbf{b}_5$ 。

証明 $\mathbf{b}_2 = 4\mathbf{b}_1$ を書けるから $\mathbf{b}_2$ ははぶく。 $\mathbf{b}_3$ は $\mathbf{b}_1$ の線形結合では表されないから残す。 $\mathbf{b}_4 = -2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_3$ と書けるから $\mathbf{b}_4$ ははぶく。 $\mathbf{b}_5$ は $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3$ の線形結合では表されないから残す。 $\mathbf{b}_6 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_5$ と書けるから $\mathbf{b}_6$ ははぶく。残ったのは $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5$ である。

証明終

次元 $\mathbb{C}^m$ の部分空間 V が $V = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{C}\mathbf{a}_j$ と表されるとき、 V は n 次元である、または V の次元は n であるといい、 $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ と書く。補題 5.4 と補題 5.5 より V の次元は基底のとり方によらず定まることがわかる。また上の約束に従って $V = \{0\}$ のときは $\dim_{\mathbb{C}} V = 0$ と定義する。

補題 5.5 より

$$(5.21) \quad \dim_{\mathbb{C}} V = n \Leftrightarrow \text{同形 } f: \mathbb{C}^n \rightarrow V \text{ が存在する}$$

がわかる。

例 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^m = m$ 。また V が $\mathbb{C}^m$ の部分空間ならば $0 \leq \dim_{\mathbb{C}} V \leq m$ であり、 $\dim_{\mathbb{C}} V = 0 \Leftrightarrow V = \{0\}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = m \Leftrightarrow V = \mathbb{C}^m$ となる。

例 V, W を部分空間とすると、
 (i) 全射線形写像 $f: V \rightarrow W$ が存在する $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} V \geq \dim_{\mathbb{C}} W$
 (ii) 単射線形写像 $f: V \rightarrow W$ が存在する $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} V \leq \dim_{\mathbb{C}} W$
 (iii) 同形 $f: V \rightarrow W$ が存在する $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} W$

証明 補題 5.4 と (5.21) より明らか。

定理 5.6 A を (m, n) 形行列、即ち線形写像 $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ とするとき

- (i) $\Im A$ は $\mathbb{C}^m$ の部分空間で $\dim_{\mathbb{C}} \Im A = \text{rank} A$ となる。
- (ii) $\ker A$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間で $\dim_{\mathbb{C}} \ker A = n - \text{rank} A$ となる。

証明 (i) $r = \text{rank} A$ として $PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$ とする。このとき $P(\Im A) = \Im B \cong \mathbb{C}^r$ となるから $\dim_{\mathbb{C}} \Im A = \dim_{\mathbb{C}} \Im B = r$ となる。
(ii) は例 5.6 より明らか。

証明終

系 (i) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = \dim_{\mathbb{C}} \ker A + \dim_{\mathbb{C}} \Im A$
(ii) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^m$ とするとき、
 $\dim_{\mathbb{C}} \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{C} \mathbf{a}_j \right) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \leq n$ となる。さらに
 $\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ は $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ のなかの線形独立なベクトルの最大数である。

証明 (i) 定理 5.6 の (i) と (ii) を加えればよい。
(ii) 前半は定理 5.6 (i) を書き直したただけである。後半は前半と定理 5.5 より明らか。

(証明終)

部分空間の導入に際して $\Im A, \ker A$ がモデルとなった (例 5.3 及び例 5.4)。実は部分空間はすべてこのような形をしていることを次に示す。

定理 5.7 V を $\mathbb{C}^m$ の部分集合とすると、
 V は $\mathbb{C}^m$ の部分空間である $\Leftrightarrow V = \ker A$ となる (ℓ, m) 形行列 A
が存在する
 $\Leftrightarrow V = \Im A$ となる (m, n) 形行列 B
が存在する
即ち任意の部分空間は $V = \ker A = \Im B$ と表される。

証明 $V = \ker A \Rightarrow V$: 部分空間、 $V = \ker B \Rightarrow V$: 部分空間はすでに示した。

「 V : 部分空間 $\Rightarrow V = \Im B$ 」を示す。 V の基底を $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ とし $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ とおけば $V = \Im B$ となる。

「 V : 部分空間 $\Rightarrow V = \ker A$ 」を示す。 V の基底を $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ とする。 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{C}^m$ は線形独立だから定理 5.5 (i) より $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\ell$ が $\mathbb{C}^m$ の基底となるような $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\ell$ が存在する。このとき $A = \begin{bmatrix} E_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_\ell & \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}^{-1}$ とおけば A は (ℓ, m) 形行列となる。 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ を $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_\ell \mathbf{a}_\ell + \beta_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{b}_n$ ($\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$) と表すとき、

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} E_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_\ell & \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}^{-1} (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_\ell \mathbf{a}_\ell + \beta_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{b}_n) = \begin{bmatrix} E_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{bmatrix}$$

となるから $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{C}\mathbf{b}_j = V$ 、即ち $\ker A = V$ となる。

証明終

注意 ここで A は単射、 B は全射かつ $m > \ell + n$ となっている。