5.3　$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ における図形的意味

これまで行列やベクトルの成分は複素数を考えて来たが、成分をすべて定数または有理数と仮定しても今までに述べた結果はすべて成り立つ。たとえば、例 4.2 を思い出す。特に方程式系 (#) が解を持つとき、A, $\mathbf{b}$ を実行列、実ベクトルとすれば $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}_1$, $\cdots$, $\mathbf{x}_{n-r}$ も実ベクトルとなる。そこで c_1, $\cdots$, $c_{n-r} \in \mathbb{R}$ ととれば $\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ は実数を成分とする解をすべて表す；

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \mid c_1,\ \cdots,\ c_{n-r} \in \mathbb{R}\}.$$

以下 5.3 では成分が実数の場合だけを考えるので、上に書いた集合を単に (#) の解空間ということにする。解の含むパラメータの数をみれば次がわかる。

定理 5.4　$n \leqq 3$ とする。1 次方程式系 (#) $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ で、$\mathrm{A} \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ として解 $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に限るとき、

(i)　解空間が空集合 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} \lneqq rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

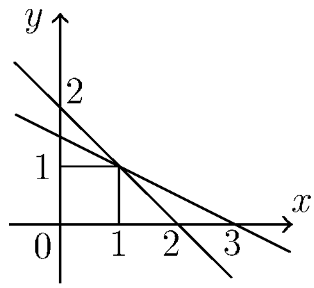
(ii)　解空間が一点集合 $\Leftrightarrow$ $n = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

(iii)　解空間が直線 $\Leftrightarrow$ $n - 1 = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

(iv)　解空間が平面 $\Leftrightarrow$ $n - 2 = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

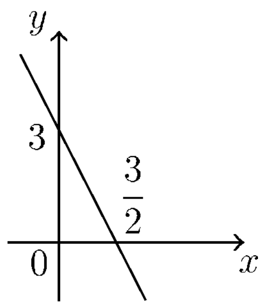
注意　実は高次元 ($n \geqq 4$) でも直線や平面が定義される。このとき定理 5.4 で $n \leqq 3$ という条件はとることができる。

例　$n = 2$ のとき、$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ とすれば $n = 2 = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ より解空間は一点集合である。実際、



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ とすれば $n - 1 = 1 = rank\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ より解空間は直線となる。実際、



$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = -2x + 3$$

例 $n=3$ のとき、$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ とすれば $n-1 = 2 = rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ より解空間は直線となる。実際、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y=1 \\ 3y-z=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

即ちこれは点 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ を通り、ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ に平行な直線である。

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とすれば $n-2 = 1 = rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ より解空間は平面となる。実際、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x+2y+3z=1$$

即ちこれは点 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通り、ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と垂直な平面である。

最後に $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ の解空間は $\mathbb{R}^3$ であることに注意する。

行列式の図形的な意味

例 (i) $n=2$ のとき、$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ とすれば
$\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ が平行４辺形をつくる $\Leftrightarrow$ $\det\mathrm{A} \neq 0$。
このときこの平行４辺形の面積は $|\det\mathrm{A}|$ である。
(ii) $n=3$ のとき、$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ とすれば
$\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$ が平行６面体をつくる $\Leftrightarrow$ $\det\mathrm{A} \neq 0$。
このときこの平行６面体の体積は $|\det\mathrm{A}|$ である。