5.2　基本変形を用いる解法

ここでは $m, n,$ A に何も条件をつけることなく方程式系 (#) の解法を考える。
この場合は定理 5.1 のように簡単にはいかない。というのは (#) は解を持たないこともあるし、2つ以上の解を持つこともあるからである。
例

$$(5.2)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.\quad \text{は解を持たない。}$$

$$(5.2)'\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.\quad \text{は解を無限にたくさん持つ。}$$

与えられた方程式系 (#) の解の有無を判定し、ある場合には解をすべて求めることが以下の目標である。

１次方程式系 (#) の解の全体を Z(#) と書いて (#) の解空間という；

$$\mathrm{Z}(\#) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

第一１章第２節の記号を用いれば $\mathrm{Z}(\#) = \mathrm{A}^{-1}(\{\mathbf{b}\})$ と書くこともできる。上の例の (5.2) では $\mathrm{Z}(\#) = \phi$ であり、 $(5.2)'$ では Z(#) は無限集合である。 $\mathrm{Z}(\#) = \phi$ か否かの判定も含めて Z(#) を決定することが方程式系 (#) を解くということである。

定理 5.2　１次方程式系 (#) に対して

(i)　(#) が解を持たない $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} + 1 = rank\left[\begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$

(ii)　(#) がただひとつの解を持つ $\Leftrightarrow$ $n = rank\mathrm{A} = rank\left[\begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$

(iii)　(#) が少なくとも２つの解を持つ $\Leftrightarrow$ $n - 1 \geqq rank\mathrm{A} = rank\left[\begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$

このとき $r = rank\mathrm{A}$ とおき、 $\mathbf{a},\ \mathbf{x}_1,\ \cdots,\ \mathbf{x}_{n-r} \in \mathbb{C}^n$ をうまく選べば (#) の解 $\mathbf{x}$ はすべて

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}\ (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r} \in \mathbb{C})$$

と一意的に表される。

証明　はじめに３つ程準備をしておく。

$\boxed{1}$ 一般に任意の m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q に対して、$\mathbf{x}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{d} = \mathrm{P}\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ とおけば

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathrm{PA}\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathrm{PAQ}\mathbf{x}' = \mathbf{d}$$

となる。よって方程式系

$$(\#)' \qquad \mathrm{PAQ}\mathbf{x}' = \mathbf{d}$$

を考えれば、 Q は解空間のあいだの全単射をひきおこす。即ち

(5.3) $\qquad \mathrm{Q}\ :\ \mathrm{Z}(\#)'\ \to\ \mathrm{Z}(\#)$ は全単射となる。

特に補題 3.1 より

$$(5.4) \qquad \mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ ,\ r = rank\mathrm{A}$$

となる P,Q が存在する。以下ではこのような P,Q を固定して考える。
$\boxed{2}$ 方程式系 $(\#)'$ について考える。

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

とおけば (5.4) より

$$\mathrm{PAQ}\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \updownarrow \text{ m - r}$$

となるから $(\#)'$ は

$$(5.5) \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

と書きなおせる。
$\boxed{3}$ 行列 $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ の階数について考える。補題 3.4, (ii) と同様に

$$\mathrm{P}\left[\begin{array}{cc}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\mathrm{Q} & 0\\ 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}\mathrm{PA} & \mathrm{P}\mathbf{b}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\mathrm{Q} & 0\\ 0 & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}\mathrm{PAQ} & \mathrm{P}\mathbf{b}\end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c|c} & & d_1 \\ \mathrm{E}_r & 0 & \vdots \\ & & d_r \\ \hline & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & d_m \end{array}\right]$$

となるから

(5.6)
$$rank\left[\begin{array}{cc}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{array}\right] = rank\left[\begin{array}{c|c|c} & & d_1 \\ \mathrm{E}_r & 0 & \vdots \\ & & d_r \\ \hline & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & d_m \end{array}\right] = rank\left[\begin{array}{c|c|c} & & 0 \\ \mathrm{E}_r & 0 & \vdots \\ & & 0 \\ \hline & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & d_m \end{array}\right]$$

がわかる。
　以上の準備のもと定理 5.2 を示す。
　(5.3)，(5.5)，(5.6) より

(5.7)
$$\mathrm{Z}(\#) = \phi \;\Leftrightarrow\; Z(\#)' = \phi \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{c} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{array}\right] \neq \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \;\Leftrightarrow\; rank\left[\begin{array}{cc}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{array}\right] = r+1$$

がわかる。従って (i) が示された。
　次に (#) が解を持つ場合を考える。(i) と同様に (5.3)，(5.5)，(5.6) より

(5.8)
$$\mathrm{Z}(\#) = \phi \;\Leftrightarrow\; Z(\#)' = \phi \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{c} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \;\Leftrightarrow\; rank\left[\begin{array}{cc}\mathrm{A} & \mathbf{b}\end{array}\right] = r$$

を得る。このとき $(\#)'$ 即ち (5.5) はさらに

$$(\#)'' \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}$$

と書き直せる。従って

$$(5.9) \qquad \mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)'$$

が成り立つ。 $x'_{r+1}, \cdots, x'_n$ とは無関係に $(\#)''$ は解を持つから

$$(5.10) \qquad (\#)'' \text{ の解はただひとつ } \Leftrightarrow \ r = n$$

となる。よって (ii) が示された。このとき $n \leqq m$ であり、 $(\#)''$ 即ち $(\#)'$ の唯一の解は

$$(5.11) \qquad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

である；

$$\mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)' = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \right\} \quad \text{；ひとつの要素より成る集合}$$

このことを (5.3) より $(\#)$ の唯一の解は

$$(5.12) \qquad \mathbf{x} = \mathrm{Q}\mathbf{x}' = \mathrm{Q} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \qquad \text{（}r = n \text{ のとき）}$$

と表される；

$$\mathrm{Z}(\#) = \left\{ \mathrm{Q} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \right\} \quad \text{；ひとつの要素より成る集合}$$

また (5.10) より

$$(5.10)' \qquad (\#)'' \text{ の解が少なくとも 2 つ } \Leftrightarrow \ r \leqq n - 1$$

もわかるから (iii) の前半が示された。 (iii) の後半を示す。 $r \leqq n-1$ のとき $(\#)''$ の解は $x'_{r+1},\ \cdots,\ x'_n$ に任意の複素数値を代入し $x'_1 = d_1,\ \cdots,\ x'_r = d_r$ とおけば求まる。即ち $(\#)''$ の解はすべて

$$(5.13) \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \quad (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$$

と一意的に表される。ここで

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$$

に注意すれば

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$$

と変形できることから (5.9) より

$$\mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)' = \left\{ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \ \middle|\ c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C} \right\}$$

これで $(\#)''$ と $(\#)'$ が解けた。最後に $(\#)$ を解く。 (5.3) より $(\#)$ の解はすべて

(5.14)

$$\mathbf{x} = \mathrm{Q}\mathbf{x}' = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \ (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$$

と一意的に表される。ここで

(5.15)
$$\mathbf{a} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\ \in\ \mathbb{C}^n$$

とおき、さらに行列 $\mathrm{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}$ をブロック表示により

(5.16) $\quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \ (\mathbf{x}_1,\ \cdots,\ \mathbf{x}_{n-r}\ \in\ \mathbb{C}^n)$

と表せば (5.14) は

(5.17) $\quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}\ (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$

と書ける；

$$\mathrm{Z}(\#) = \left\{\ \mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}\ \middle|\ c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C}\ \right\}.$$

従って (iii) の後半が示された。

証明終

<u>系</u>　方程式系 (#) が解を持つ $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$

<u>証明</u>　すでに (5.8) で示している。

（証明終）

<u>注意 5.1</u>　(#) が解を持つ場合、即ち $rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ のとき、(5.11) と (5.13) 及び (5.12) と (5.14) を比較する。(5.13) で $r = n$ のとき (5.11) を表すものと約束すれば、(5.14) で $r = n$ のとき (5.12) を表す。よって定理 5.2 の (ii) は (iii) の特別な場合と考えられる。これに従って解 $\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ は $r = n$ のとき唯一の解 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ を表すものとする。

注意 5.2　(#) において「$m = n$ かつ A が正則 $\Rightarrow$ $n = rank\mathrm{A} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$」が成り立つから定理 5.1 は定理 5.2, (ii) の特別な場合と考えられる。即ち定理 5.1 は $m = n$ かつ A が正則の場合に定理 5.2 (ii) の唯一の解を行列式を用いて表す公式といえる。

次に方程式系 (#) $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と、 $\mathbf{b}$ を 0 におきかえた方程式系

$$(\#)_0 \qquad \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbb{O}$$

との関係を考える。

補題 5.1　方程式系 (#), $(\#)_0$ に対して、
(i)　(#) に解があるとき、定理 4.2 で求めた解 (5.17) $\mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ において、 $\mathbf{a}$ は (#) の解であり、 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$ は $(\#)_0$ の解である。
(ii)　写像 $\begin{array}{ccc} Z(\#)_0 & \to & Z(\#) \\ \Cup & & \Cup \\ \mathbf{x}_0 & \mapsto & \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \end{array}$ 及び $\begin{array}{ccc} Z(\#) & \to & Z(\#)_0 \\ \Cup & & \Cup \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} - \mathbf{a} \end{array}$ は共に全単射であり、互いに他の逆写像である。

証明　(5.15) より $\mathbf{a} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \updownarrow \text{n - r} \\ \\ \end{matrix}$ であったから

$$\mathrm{PA}\mathbf{a} = \mathrm{PAQ}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \updownarrow \text{m - r} \\ \\ \end{matrix} = \mathbf{d} =$$

$\mathrm{P}\mathbf{b}$ より $\mathrm{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ を得る。また (5.16) より $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}$ であったから $\mathrm{PA}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{PAQ}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} = 0$ 、よって $\mathrm{A}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = 0$ 即ち $\mathrm{A}\mathbf{x}_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq n - r)$ がわかる。
(ii) は (i) より明らか。

例　(#) が少なくとも２つの解を持つ $\Leftrightarrow$ (#) は無限にたくさんの解を持つ。
$\Leftrightarrow$ $(\#)_0$ は 0 でない解を持ち (#) は解を持つ。

証明　上の $\Leftrightarrow$ は明らか。よってあとは (#) が解を持つとき「(#) が少なくとも２つ解を持つ $\Leftrightarrow$ $(\#)_0$ は 0 でない解を持つ」を示せばよい。

$\Rightarrow$: $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ を (#) の解とすれば $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} = \mathrm{A}\mathbf{y}$ より $\mathrm{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq 0$ がわかる。

$\Leftarrow$: $\mathbf{x}_0 \neq 0$ を $(\#)_0$ の解とすれば $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a} + \mathbf{x}_0$ は (#) の２つの解となる。

（証明終）

定理 5.2 を用いて具体的に与えられた方程式を解こうとしてもなかなかうまく行かない。$(\#)'$ は簡単に解けるが Q を求めておかないと (#) の解は求まらない。つまり Q として任意の正則行列を考えると $(\#)'$ は簡単になるが、$(\#)'$ の解から (#) の解を構成する所が面倒になる（列に関する基本変形をすべて記憶しておかないとできない）。そこで Q に制限を加えて $(\#)'$ は少々複雑になってもよいから $(\#)'$ の解から (#) の解を求める部分を簡単にしようというのが以下の発想である。最も極端なものとして Q を単位行列に限る、即ち基本変形を行に関するものだけに限るという立場がある（参考文献 [8]）。このとき $(\#)'$ の解と (#) の解は同じものとなる。ここではもう少し広く、第３基本行列の積として表される Q を考える（参考文献 [1],[4],[9] 文献など）。従って基本変形は (行１)、(行２)、(行３)、(列３) を用いることになる。

補題 5.2　(m, n) 形行列 A は行に関する基本変形と列の交換、即ち (行１)、(行２)、(行３)、(列３) を有限回行うことにより

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & \mathrm{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} \text{ は } (r,\ n-r) \text{ 形行列}$$

という形になる。このとき $r = rank\mathrm{A}$ である。

証明　方針は補題 3.1 と同様であるからこれを思い出す。(列１)、(列２) を用いないために $\mathrm{B} = 0$ とはできないところが相異点である。

*step*1.　$\mathrm{A} = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A} = 0$ なら $r = 0,\ \mathrm{B} = 0$ とみて求める形である (END) 。もし $\mathrm{A} \neq 0$ なら次に進む。

*step*2, *step*3, *step*4 は補題 3.1 と全く同じとする。従って A は $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{B}' \\ 0 & \mathrm{A}' \end{bmatrix}$ 形に変形される。

*step*1′.　$\mathrm{A}' = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A}' = 0$ なら $r = 1,\ \mathrm{B} = \mathrm{B}'$ とみて求める形である (END) 。もし $\mathrm{A}' \neq 0$ なら次に進む。

*step*2′, *step*3′, *step*4′ は補題 3.1 と全く同じとする。従って A は

$\begin{bmatrix} \mathrm{E}_2 & \mathrm{B}'' \\ 0 & \mathrm{A}'' \end{bmatrix}$ 形に変形される。

*step*1''.　$\mathrm{A}'' = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A}'' = 0$ なら $r = 2,\ \mathrm{B} = \mathrm{B}''$ とみて求める形である (END) 。もし $\mathrm{A}'' \neq 0$ なら次に進む。

あとはこれをくり返せばよい。 $r = rank\mathrm{A}$ は明らか。

証明終

これを用いて定理 5.2 の別証明ができる。しかもこの証明は次の定理 5.3 につながる。概略を述べておこう。

<u>定理 5.2 の別証明</u>　前の証明とほとんど同様であるから番号もあえてかえないことにする。

$\boxed{1}$ (#)', (5.3) は同じ。

特に補題 5.2 より

$$(5.4) \qquad \mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & \mathrm{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ r = rank\mathrm{A},\ \ \mathrm{B} \text{ は } (r,\ n-r) \text{ 形行列}$$

となる m 次正則行列と第 3 基本行列の積として表される n 次正則行列 Q が存在する。このとき $x'_1,\ \cdots,\ x'_n$ は $x_1,\ \cdots,\ x_n$ を並べかえたものである。以下ではこのような P,Q を固定して考える。

$\boxed{2}$ $\mathbf{x}',\ \mathbf{d}$ は同じとする。このとき (5.4) より

$$\mathrm{PAQ}\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} + \mathrm{B} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるから (#)' は

$$(5.5) \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} + \mathrm{B} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

と書きなおせる。

$\boxed{3}$

$$\mathrm{P} \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} & & d_1 \\ \mathrm{E}_r & \mathrm{B} & \vdots \\ & & d_r \\ \hline & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & d_m \end{array}\right] \quad \text{となるから}$$

(5.6)

$$rank\left[\begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = rank\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{E}_r & \mathrm{B} & \begin{matrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{matrix} \end{array}\right] = rank\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{E}_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{matrix} \end{array}\right]$$

がわかる。

以上の準備のもと定理 5.2 を示す。

(i)　(5.5) の左の式には常に解があることに注意すれば前の証明と全く同じことが成り立つ。

次に (#) が解を持つ場合を考える。(5.8) も同じでよい。このとき $(\#)'$ 即ち (5.5) はさらに

$$(\#)'' \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} + \mathrm{B}\begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}$$

と書き直せる。従って

$$(5.9) \qquad \mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)'$$

が成り立つ。(5.10), (5.11), (5.12), $(5.10')$ も前と同じでよい。よって (ii) 及び (iii) の前半が示された。(iii) の後半を示す。$r \leqq n-1$ のとき $(\#)''$ の解を求める。$(\#)''$ において $\begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ に任意の値 $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$ を代入して移植すれば $\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} - \mathrm{B}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$ となる。よって

(5.13)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \quad (c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{C})$$

を得る。しかしながら前より少々複雑になっているので、(5.13) すべて $(\#)''$ の解なのか、$(\#)''$ の解はすべてこの形に表されるのか、また表示は一意的かについては必ずしも自明とはいえない。このあたりを

明確にするために写像

$$f_{(\#)'}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-r} & \to & \mathbb{C}^n \\ \Psi & & \Psi \\ \mathbb{C} & \mapsto & \mathbf{x}' \end{array} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \mathbb{C} \quad \left(\mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \right)$$

を導入する。ここで次の３つを示す。

① $\Im f_{(\#)'} \subset \mathrm{Z}(\#)'$ 即ち (5.13) はすべて $(\#)'$ の解である。

② $\mathrm{Z}(\#)' \subset \Im f_{(\#)'}$ 即ち $(\#)'$ の解はすべて (5.13) で表される。

③ $f_{(\#)'}$ は単射 即ち (5.13) の表示は一意的である。

①の証明；任意の $\mathbb{C} \in \mathbb{C}^{n-r}$ に対して $\mathbf{x}' = f_{(\#)'}(\mathbb{C})$ を考えると

$$\begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \text{となるから} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \mathrm{B} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \text{を}$$

得る。よって $\mathbf{x}' \in \mathrm{Z}(\#)'' = \mathrm{Z}(\#)'$ となる。

②の証明；任意の $\mathbf{x}' \in \mathrm{Z}(\#)' = \mathrm{Z}(\#)''$ に対し $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ とおけば

$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} - \mathrm{B} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$ となるから $\mathbf{x}' = f_{(\#)'}(\mathbb{C})$ がわかる。

これは (5.13) を導き出した過程そのものであった。

③の証明；$f_{(\#)'}\mathbb{C} = f_{(\#)'}(\mathbb{C}')$ とすれば $\begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \mathbb{C} = \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \mathbb{C}'$ となる。ここで $\begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix}$ は $(n,\ n-r)$ 形行列であるから $rank \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} = n-r$ に注意すれば補題 3.6 より、写像 $\begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} : \mathbb{C}^{n-r} \to \mathbb{C}^n$ は単射となる。従って $\mathbb{C} = \mathbb{C}'$ を得る。

以上により $(\#)'$ の解はすべて (5.13) により一意的に表されることがわかった；

$$\mathrm{Z}(\#)' = \mathrm{Z}(\#)'' = \left\{ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \;\middle|\; c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{C} \right\}$$

このことにより全単射 $f_{(\#)'} : \mathbb{C}^{n-r} \to \mathrm{Z}(\#)'$ が定義されたことになる。これと $\mathrm{Q} : \mathrm{Z}(\#)' \to \mathrm{Z}(\#)$ とを合成して全単射 $f_{(\#)} = \mathrm{Q} \circ f_{(\#)'} : \mathbb{C}^{n-r} \to \mathrm{Z}(\#)$ を得る。従って

$$\begin{aligned} (5.14) \quad \mathbf{x} &= f_{(\#)}(\mathbb{C}) = \mathrm{Q}\left(\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \mathbb{C} \right) \\ &= \mathrm{Q} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Q} \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \ (c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

となる。 $f_{(\#)} : \mathbb{C}^{n-r} \to \mathrm{Z}(\#)$ は全単射だから $(\#)$ の解はすべて (5.14) で表され、単射だからこの表示は一意的である。さらに (5.15) は同じとして

$$(5.16) \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-r} \end{bmatrix} = \mathrm{Q} \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \ (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r} \in \mathbb{C}^n)$$

とブロック表示すれば (5.14) は

$$(5.17) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \ (c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{C})$$

と書ける。従って (iii) の後半が示された。

証明終

<u>注意 5.1′</u> $n-1 \geqq r = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ のとき全単射 $f_{(\#)} : \mathbb{C}^{n-r} \to \mathrm{Z}(\#)$ が定義された。 $\mathbb{C}^0 = \{0\}$ と考え、 $f_{(\#)}(0) = \mathbf{a}$ とおけば $n = r = rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ のときにも全単射 $f_{(\#)} : \mathbb{C}^{n-r} \to \mathrm{Z}(\#)$ 定義される。即ちここでも (ii), (iii) の分類は必要ではなく、解を持つときはいつでも全単射 $f_{(\#)} : \mathbb{C}^{n-r} \to \mathrm{Z}(\#)$ が存在

する。このことは注意 5.1 で「 $\mathbf{x}=\mathbf{a}+c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ は $r=n$ のとき $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ を表す」と約束したことのいいかえである。

注意 5.3　方程式系 $(\#)_0$ に関しても同様に全単射

$$f_{(\#)_0}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-r} & \to & \mathrm{Z}(\#)_0 \\ \Psi & & \Psi \\ \mathbb{C} & \mapsto & c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \end{array} \qquad \left(\mathbb{C}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r}\end{bmatrix}\right)$$

が定義される。一方補題 5.1, (ii) において全単射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Z}(\#)_0 & \to & \mathrm{Z}(\#) \\ \Psi & & \Psi \\ \mathbf{x}_0 & \mapsto & \mathbf{x}_0+\mathbf{a} \end{array}$$

が考えられた。$f_{(\#)}$ はこれらの合成である。また $f_{(\#)_0}$ を $\mathbb{C}^{n-r}$ から $\mathbb{C}^n$ への写像とみるとき、これは線形写像となる。 $f_{(\#)}$ は一般に（ $\mathbf{b}\neq 0$ のとき）線形写像ではない。即ち「 $f_{(\#)}$ ： 線形写像 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}=0$ 」となる。

補題 5.3　方程式系 $(\#)$ に $(m+1,\ n+1)$ 形行列

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x} & 0 \end{bmatrix}$$

を対応させる。この行列は $1\leqq i\leqq m$ という範囲で行に関する基本変形を行い、 $1\leqq j\leqq n$ という範囲で列の交換を行うことにより定理 5.2 の別証明中の $\boxed{1}$ で考えた $(\#)'$ に対応する行列：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{PAQ} & \mathbf{d} \\ {}^t\mathbf{x}' & 0 \end{bmatrix}$$

に変形される。

証明　$\mathbf{x}'=\mathrm{Q}^{-1}\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n,\ \mathbf{d}=\mathrm{P}\mathbf{b}\in\mathbb{C}^m$ であった。 Q は第 3 基本行列の積であるから例 3.1 より ${}^t\mathrm{Q}=\mathrm{Q}^{-1}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{PA} & \mathrm{P}\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{PAQ} & \mathrm{P}\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x}\mathrm{Q} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{PAQ} & \mathrm{P}\mathbf{b} \\ {}^t(\mathrm{Q}^{-1}\mathbf{x}) & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる。

証明終

定理 5.2 の別証明と補題 5.3 より次がわかる。

<u>定理 5.3</u>　１次方程式系 (#) $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解法は次の手順により与えられる：

(#)　$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 即ち $\mathrm{A}, \mathbf{b}$ が与えられたとき、

*step*1.　$(m+1,\ n+1)$ 形行列

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{x} & 0 \end{bmatrix}$$

をつくる。

*step*2.　この行列に対して

$$\begin{cases} 1 \leqq i \leqq m \text{ という範囲で行に関する基本変形を行い、} \\ 1 \leqq j \leqq n \text{ という範囲で列の変換を行う} \end{cases}$$

ことにより

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & \mathrm{E}_r & & & \mathrm{B} & & \begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{array} \\ \hline & 0 & & & 0 & & \begin{array}{c} d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{array} \\ \hline x'_1 & \cdots & x'_r & x'_{r+1} & \cdots & x'_n & 0 \end{array}\right] \quad \mathrm{B} \text{ は } (r,\ n-r) \text{ 形行列}$$

という形に変形する（補題 5.2 及び補題 5.3 より必ずできる）。
ここで $r = rank\mathrm{A}$ であり、$x'_1, \cdots, x'_n$ は $x_1, \cdots, x_n$ を並べかえたものである。

*step*3.　$d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ をたしかめる。$\boxed{\text{NO}}$ なら (#) には解がない (END)。$\boxed{\text{YES}}$ なら (#) は解を持つ（次に進む）。

*step*4.　$c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{C}$ を任意にとり、

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{E}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$$

とおく。ここでもし $r = n$ であれば

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

*step*5.　$x'_1,\ \cdots,\ x'_n$ を並べかえて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{a} + c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \ \ (c_1,\ \cdots,\ c_{n-r}\ \in\ \mathbb{C})$$

という形に変換する。これが解のすべてである (END) 。

(*step*6.　$\mathrm{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathrm{A}\mathbf{x}_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq n-r)$ をたしかめる。これは $\underline{\overset{\text{(見算)}}{\text{たしかめ}}}$ である)

<u>注意</u>　定理 5.3 では *step*2 が最も重要であり、他の部分は実質的なことは何もしていない。従って定理 5.3 は「基本変形が適切に実行できれば方程式系 (#) の解の有無の判定ができ、また解があるときはすべて求めることができる」ということを主張している。

以上により 1 次方程式系に関することがすべて明らかになった。ここでは 1 次方程式系 (#) を解くということを解空間 Z(#) の導入及び全単射 $f_{(\#)}\ :\ \mathbb{C}^{n-r}\ \to\ \mathrm{Z}(\#)$ の構成という形で処理した。即ち $\mathrm{A}, \mathbf{b}$ に対して $f_{(\#)}$ をつくることが (#) の解法であった。一般に「研究の対象を集合 X としてとらえ、よくわかっている集合 A と全単射 $f\ :\ \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ をみつけることにより X を理解する」という方法は現代数学において基本的である。上記の 1 次方程式系の解法もこの一例である。

定理 5.2 の証明は少々難しいかもしれない。しかしこの証明を読み飛ばしても与えられた 1 次方程式系を定理 5.3 の手順に従って解くことはできるはずである。

<u>例</u>　$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12 \\ 2x_1 + 25x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 32 \\ 5x_1 + 24x_2 + 7x_3 + 22x_4 = 36 \end{cases}$ を定理 5.3 に従って解く。

これは $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 \\ 2 & 25 & 5 & 11 \\ 5 & 24 & 7 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$ と書ける。

*step*1.　$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 & 12 \\ 2 & 25 & 5 & 11 & 32 \\ 5 & 24 & 7 & 22 & 36 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$ をつくる。

*step*2.　この行列を基本変形する。

$$
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 9 & 2 & 5 & 12 \\
2 & 25 & 5 & 11 & 32 \\
5 & 24 & 7 & 22 & 36 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0
\end{array}\right]
$$

第２行に第１行の -2 倍を加え、
第３行に第１行の -5 倍を加えた。

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc}
1 & 9 & 2 & 5 & 12 \\
0 & 7 & 1 & 1 & 8 \\
0 & -21 & -3 & -3 & -24 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0
\end{array}\right]
$$

第２列と第３列をとりかえた。

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 9 & 5 & 12 \\
0 & 1 & 7 & 1 & 8 \\
0 & -3 & -21 & -3 & -24 \\
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0
\end{array}\right]
$$

第１行に第２行の -2 倍を加え、
第３行に第２行の 3 倍を加えた。

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c}
1 & 0 & -5 & 3 & -4 \\
0 & 1 & 7 & 1 & 8 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0
\end{array}\right]
$$

$\cdots$ これは目標の形である $(r = 2)$ 。

*step*3.　$d_3 = 0$ である。従って解は存在する。

*step*4.　$n - r = 4 - 2 = 2$ であるから $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ を任意にとって

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+ c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
+ c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

とおく。

*step*5.　第２行と第３行をとりかえて、解

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}
+ c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}
+ c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\quad (c_1,\ c_2 \in \mathbb{C})
$$

を得る。

*step*6.　（たしかめ）

$$
\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 \\ 2 & 25 & 5 & 11 \\ 5 & 24 & 7 & 22 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} -4+16 \\ -8+40 \\ -20+56 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 12 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 \\ 2 & 25 & 5 & 11 \\ 5 & 24 & 7 & 22 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 5+9-14 \\ 10+25-35 \\ 25+24-49 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 \\ 2 & 25 & 5 & 11 \\ 5 & 24 & 7 & 22 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} -3-2+5 \\ -6-5+11 \\ -15-7+22 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$\underline{\text{例}}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array}\right.$ を解く。

これは $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と書ける。

*step*1. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$ をつくる。

*step*2. この行列を基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行と第２行をとりかえた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第３行に第１行の -1 倍を加え、
第４行に第１行の -1 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行と第３行をとりかえた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第２行の -1 倍を加え、
第３行に第２行の -3 倍を加え、
第４行に第２行の -2 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第３列と第４列をとりかえた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第３行の -4 倍を加え、
第２行に第３行を加え、
第４行に第３行の -1 倍を加えた。

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & 0 \end{array}\right]$$

$\cdots$ これは目標の形である $(r = 3)$ 。

*step*3. $d_4 = 0$ である。従って解は存在する。

$step4.$　$n-r=4-3=1$ であるから $c\ \in\ \mathbb{C}$ を任意にとって

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ とおく。

$step5.$　第３行と第４行をとりかえて、解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c\ \in\ \mathbb{C})$$

を得る。

$step6.$　（たしかめ）
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & - & 6 & + & 2 \\ 7 & - & 2 & - & 3 \\ 7 & - & 4 & - & 2 \\ 7 & - & 6 & - & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & - & 3 & + & 3 \\ -1 & - & 1 & + & 2 \\ -1 & - & 2 & + & 3 \\ -1 & - & 3 & + & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>例</u>
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$ を解く。

これは
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$ と書ける。

$step1.$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$ をつくる。

$step2.$　これを基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行に第１行の -2 倍を加え、
第３行に第１行の -1 倍を加え、
第４行に第１行の -2 倍を加えた。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & -4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２列と第３列をとりかえた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -4 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行と第４行をとりかえた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第２行を -1 倍した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第２行の -1 倍を加え、
第３行に第２行の 2 倍を加えた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第４行に第３行を加えた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第４行を $\frac{1}{2}$ 倍した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

第３列と第４列をとりかえた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

第３行と第４行をとりかえた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 11 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第３行を加え、
第２行に第３行の -3 倍を加え、
第４行に第３行の -9 倍を加えた。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -7 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

第１行に第４行の $\frac{1}{3}$ 倍を加え、
第２行に第４行の -1 倍を加え、
第４行を $-\frac{1}{3}$ 倍した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\cdots$　これは目標の形である $(r = 4)$ 。

*step*3.　解は唯一存在する $(m = n = r)$ 。

$step4.$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 5 \\ 2 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ となるから

$step5.$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ である。

$step6.$ （たしかめ）$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & - & \frac{14}{3} & + & 5 & + & 4 \\ \frac{4}{3} & - & \frac{7}{3} & + & 10 & - & 2 \\ \frac{2}{3} & + & \frac{7}{3} & - & 5 & + & 10 \\ \frac{4}{3} & - & \frac{7}{3} & + & 5 & + & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & + & 5 & + & 4 \\ -1 & + & 10 & - & 2 \\ 3 & - & 5 & + & 10 \\ -1 & + & 5 & + & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

<u>例</u> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ を解く。

これは $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書ける。

$step1.$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$ をつくる。

$step2.$ これを基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第 2 行に第 1 行の -1 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第 1 行に第 2 行の 2 倍を加え、
第 3 行に第 2 行を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

第 2 行を -1 倍した。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\cdots$ これは目標の形である $(r = 2)$ 。

$step3.$ $d_3 = 1 \neq 0$ より解はない。

$step4.$　同様に $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$ を解く。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって $(r = 2)$ 。 $d_3 = 0$ より解は存在する。

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{C}$ はすべての解を表す。