第５章

この章では１次方程式系（連立１次方程式ともいう）の解法について述べる。
方程式の数が m 、未知数の数が n の１次方程式系は一般に

$$
(\#) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.
$$

と表される。ここで

$$
(5.1) \qquad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{C}),
$$

$$
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m,\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n
$$

とおけば (#) は

$$
\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

と書けるから、これまでに述べて来た行列の理論が１次方程式系の解法に応用できる。

5.1　行列式を用いる解法

ここでは $m = n$ かつ A が正則である場合の (#) の解法を述べる。
次が成り立つ；

<u>定理 5.1</u>　$m = n$ かつ A が正則であるとき、 (#) は唯一の解 $\mathbf{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}$ を持つ。
この解は

$$
x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \mathrm{A}} \quad (1 \leqq j \leqq n)
$$

と表される。ここで分子の行列は A の第 j 列を $\mathbf{b}$ におきかえたものである。

証明　「 $\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{x}=\mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}$ 」より、 $\mathbf{x}=\mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}$ が (#) の唯一の解となることは明らか。
また定理 4.1 より

$$\mathbf{x}=\mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}=\frac{1}{\det\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{A}}\mathbf{b}=\frac{1}{\det\mathrm{A}}\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

となるから

$$x_j=\frac{\Delta_{1j}b_1+\cdots+\Delta_{nj}b_n}{\det\mathrm{A}}\quad(1\leqq j\leqq n)$$

を得る。 j を固定して行列

$$\mathrm{A}'=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

に補題 2.7 を適用すれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Delta_{kj}b_j=\det\mathrm{A}'$ となる。よって $x_j=\dfrac{\det\mathrm{A}'}{\det\mathrm{A}}$ がわかる。

証明終

これをクラメルの公式という。 $m=n=1$ の場合の１次方程式の解法；

$$ax=b\ \Leftrightarrow\ x=\frac{b}{a}\quad(a\neq 0)$$

の最も単純な一般化といえる。

注意　定理 5.1 は「 $m=n$ かつ A が正則である場合、行列式が計算できれば (#) の解が求まる」ことを示している。

例　１次方程式系 $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 5\\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 7\\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 8\\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6\end{array}\right.$ を解く。

$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ とおくと $\det\mathrm{A}=12\neq 0$ より定理 4.1 が使える。

$$\det\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 8,\ \det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 28,$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = 60,\ \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 24$$

であるから $x_1 = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3},\ x_2 = \dfrac{28}{12} = \dfrac{7}{3},\ x_3 = \dfrac{60}{12} = 5,\ x_4 = \dfrac{24}{12} = 2$ がわかる。

例 5.1　1次方程式系 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ に対し

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}},\ x_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$$

が成り立つ。いいかえると

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

例 5.1′　鶴と亀があわせて a ひき、鶴の足と亀の足があわせて b 本あるとき鶴と亀はそれぞれ何びきいるか、という問題を鶴亀算という。この問題に解があるための必要十分条件が「 b は偶数かつ $2a \leqq b \leqq 4a$ 」であることを示す。

解　鶴の数を x 、亀の数を y とすると

$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + 4y = b \end{cases}$ となる。例 5.1 より $\begin{cases} x = \dfrac{4a-b}{2} = 2a - \dfrac{1}{2}b \\ y = \dfrac{b-2a}{2} = -a + \dfrac{1}{2}b \end{cases}$

となるから

$$x, y \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ b \text{ は偶数}$$
$$x, y \geqq 0 \ \Leftrightarrow\ 2a - \frac{1}{2}b \geqq 0,\ -a + \frac{1}{2}b \geqq 0 \ \Leftrightarrow\ 2a \leqq b \leqq 4a$$

がわかる。

解答終

注意　鶴も亀も少なくともいっぴきいることを仮定するなら、即ち $x, y \geqq 1$ とするなら $2a \leqq b \leqq 4a$ を $2a + a \leqq b \leqq 4a - 2$ に直せばよい。

例 5.2　a, b, c を互いに異なる複素数として、１次方程式系；

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right.$$ を解く。

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$ である。例 2.2 より $\det \mathrm{A} = (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ となるから

$$\begin{aligned} x &= \frac{(d-b)(b-c)(c-d)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(d-b)(c-d)}{(a-b)(c-a)}, \\ y &= \frac{(a-d)(d-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)}, \\ z &= \frac{(a-b)(b-d)(d-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(b-d)(d-a)}{(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

を得る。