4.3　行列式と階数の関係

次の補題は第６章で必要となる。

補題 4.1　A を n 次正方行列とするとき、

$$\det \mathrm{A} = 0 \ \Leftrightarrow \ rank\mathrm{A} \leqq n-1 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ をみたす } n \text{ 項縦ベクトル } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ が存在する。}$$

証明　「 $\det \mathrm{A} = 0 \ \Leftrightarrow \ rank\mathrm{A} \leqq n-1$ 」は定理 4.1 と定理 4.2 より明らか。
「 $rank\mathrm{A} \leqq n-1 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ の存在」は補題 3.6 を用いれば「 $rank\mathrm{A} \leqq n-1 \ \Leftrightarrow$ A は単射でない $\Leftrightarrow \ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ の存在」により示される。

証明終

従って n 次正方行列 A に対して

$$\det \mathrm{A} \neq 0 \ \Leftrightarrow \ rank\mathrm{A} = n \tag{4.1}$$

となることがわかる。次にこれを一般化する。そのためには準備がひとつ必要である。

小行列式　A を (m, n) 形行列とし $0 \leqq r \leqq \min\{m, n\}$ とする。A の r 個の行と列とを任意に取り出してつくった正方行列を A の r 次小行列といい $\left(\text{これは一般に} \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \text{個存在する}\right)$ 、その行列式を A の r 次小行列式という。

例　A を n 次正方行列とする。第２章第４節で定義した A の (i, j) 余因子 Δ_{ij} に対し $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ は A の $n-1$ 次小行列式である。
次の結果は (4.1) の一般化である。

命題　A を (m, n) 形行列とするとき、

$$r = rank\mathrm{A} \ \Leftrightarrow \ r \text{ 次小行列式で } 0 \text{ でないものが存在し、 } r+1 \text{ 次以上の小行列式はすべて } 0 \text{ である。}$$

この命題は階数が行列式で表されるということを示している。以下ではこれを用いないので証明は省略する。

行列式を基本変形　基本行列は

$$\det \mathrm{P}_n(i;\alpha) = \alpha \neq 0, \ \det \mathrm{P}_n(i,j;\alpha) = 1, \ \det \mathrm{P}_n(i,j) = -1$$

を満たすから、定理 2.3 より n 次正方行列 A に対して

$$\begin{aligned} &\det(\mathrm{P}_n(i,\alpha)\mathrm{A}) = \alpha\det\mathrm{A} = \det(\mathrm{A}\mathrm{P}_n(i,\alpha)) \\ &\det(\mathrm{P}_n(i,j;\alpha)\mathrm{A}) = \det\mathrm{A} = \det(\mathrm{A}\mathrm{P}_n(i,j;\alpha)) \\ &\det(\mathrm{P}_n(i,j)\mathrm{A}) = -\det\mathrm{A} = \det(\mathrm{A}\mathrm{P}_n(i,j)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

が成り立つ。これらは

A のひとつの行（列）を α 倍すると行列式も α 倍される

A のひとつの行（列）に他の行（列）のスカラー倍を加えても行列式はかわらない

A のふたつの行（列）をとりかえると行列式の符号がかわる

ということを示している。即ち定理 2.1 、定理 2.2 及びその系の一部が再確認された。ただしこれは別証明とはいえない。何故なら定理 2.3 の証明に定理 2.1 及び定理 2.2 を用いているからである。補題 3.1 と (4.2) は「適切な基本変形の実行により行列式の具体計算が可能である」ということを示している。補題 2.6 はそのひとつの実例にすぎない。

問題　補題 3.1 の系、定理 4.1 及び (4.2) だけを用いて定理 2.3 ; $\det(\mathrm{AB}) = \det\mathrm{A}\cdot\det\mathrm{B}$ を証明せよ。

解答　B が正則でなければ AB も正則でない（補題 3.1 の系）から、定理 4.1 より $\det(\mathrm{AB}) = 0 = \det\mathrm{A}\det\mathrm{B}$ となる。 B が正則のとき、補題 3.1 の系より $\mathrm{B} = \mathrm{Q}_1\cdots\mathrm{Q}_s$ （ $\mathrm{Q}_1, \cdots, \mathrm{Q}_s$ は基本行列）と書ける。このとき (4.2) より $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{AQ}_1\cdots\mathrm{Q}_s) = \det(\mathrm{AQ}_1\cdots\mathrm{Q}_{s-1})\det\mathrm{Q}_s = \cdots = \det\mathrm{A}\det(\mathrm{Q}_1\cdots\mathrm{Q}_s) = \det\mathrm{A}\det\mathrm{B}$ がわかる。

解答終