4.2　基本変形による方法

定理 4.2　A を n 次正方行列とするとき
(i)　A は正則である $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = n$
$\Leftrightarrow$ 行に関する基本変形を何回か行うと $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ 形になる。
(ii)　A が正則であるとき、(i) の記号で $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ となる。

証明　(i)　まず「A：正則 $\Leftrightarrow$ $rank\mathrm{A} = n$」を示す。
$\Rightarrow$：$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}$ 及び補題 3.5 より $n = rank(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}) \leqq \min\{rank\mathrm{A}^{-1},\ rank\mathrm{A}\} \leqq rank\mathrm{A} \leqq n$。よって $rank\mathrm{A} = n$ がわかる。
$\Leftarrow$：$rank\mathrm{A} = n = rank\mathrm{E}$ 及び補題 3.3 より $\mathrm{PAQ} = \mathrm{E}$ となる正則行列 P, Q が存在する。このとき $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Q}^{-1}$ となるから A は正則である。

注　これは補題 1.5 と補題 3.6 を用いてもできる。また補題 1.3 と定理 3.1 から示すこともできる。
次に「A：正則 $\Leftrightarrow$ 行に関する基本変形だけで $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ 形になる」を示す。
$\Rightarrow$：$\mathrm{A}^{-1}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} & \mathrm{A}^{-1}\mathrm{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{A}^{-1} \end{bmatrix}$ となる。
$\Leftarrow$：$\mathrm{P}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ と書けるから $\begin{bmatrix} \mathrm{PA} & \mathrm{PE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$、即ち、$\mathrm{PA} = \mathrm{E},\ \mathrm{P} = \mathrm{B}$ となる。
よって A は正則で $\mathrm{B} = \mathrm{P} = \mathrm{A}^{-1}$ となる。つまり (ii) も同時に示された。

証明終

注意　適当な基本変形を有限回行えば階数が求まる（補題 3.1）。従って定理 4.2 は「適切な基本変形の実行により正則性の判定ができ、また正則であるとき逆行列を求め得る」ことを示している。

問題　(i)「A は正則 $\Leftrightarrow$ 列に関する基本変形を何回か行うと $\begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{E} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{B} \end{bmatrix}$ 形になる」を示せ。このとき $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ となることも定理 4.2 と同様である。
(ii)「AB が正則 $\Rightarrow$ A も B も正則」を補題 3.5 と定理 4.2 より導け。

解答　(i)　$\Rightarrow$：$\begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{E} \end{bmatrix}\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{AA}^{-1} \\ \mathrm{EA}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{A}^{-1} \end{bmatrix}$ となる。
$\Leftarrow$：$\begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{E} \end{bmatrix}\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{B} \end{bmatrix}$ より $\mathrm{AQ} = \mathrm{E},\ \mathrm{Q} = \mathrm{B}$ がわかるから $\mathrm{B} = \mathrm{Q} = \mathrm{A}^{-1}$ となる。
(ii)　$n = rank(\mathrm{AB}) \leqq \min\{rank\mathrm{A},\ rank\mathrm{B}\} \leqq n$ より $rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B} = n$、即ち A, B は正則となる。

解答終

<u>例</u>　$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第１行に第２行の (−1) 倍を加え、
第３行に第２行の (−1) 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

第２行に第１行の −6 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 23 & 8 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

第１行に第３行を加え、
第２行に第３行の −8 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & 15 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

第２行を −1 倍した。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -15 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

第３行に第２行の −3 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -15 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 44 & -23 \end{bmatrix}$$

よって A は正則で $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & -15 & 8 \\ -18 & 44 & -23 \end{bmatrix}$ である。

<u>例</u>　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第２行に第１行の 2 倍を加え、
第３行に第１行の −2 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第１行に第２行の −2 倍を加え、
第３行に第２行の 2 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

第１行に第３行の $\frac{1}{2}$ 倍を加え、
第２行に第３行の −1 倍を加えた。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

第３行を $\frac{1}{2}$ 倍した。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

よって A は正則で $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ で

ある。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。
$\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ の第 3 列はすべて 0 なので行に関するどのような基本変形をしても $\begin{bmatrix}\mathrm{E} & \mathrm{B}\end{bmatrix}$ 形には決してならない。よって A は正則でない。

<u>注意</u>　A を n 次正方行列とする。$\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{E}\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}\mathrm{E} & \mathrm{B}\end{bmatrix}$ 形に直すことを目標に行に関する基本変形を繰り返すとき、もし途中で第 j 列 $(1 \leqq j \leqq n)$ がすべて 0 になったら A は正則でない。逆に A が正則でないとき、基本変形の途中で第 j 列 $(1 \leqq j \leqq n)$ がすべて 0 となる。