第４章

この章では行列の正則性の判定と、正則であるとき逆行列を求める具体的な方法について述べる。また行列式と階数の関係を調べる。

4.1　行列式による方法

ここでは定理 2.3 及び定理 2.4 を用いて定理 1.1 の一般化を行う。定理 1.1 と次の定理 4.1 の関連については第２章の冒頭を参照のこと。

定理 4.1　A を正方行列とするとき

(i)　A は正則である。　$\Leftrightarrow$　$\det \mathrm{A} \neq 0$

(ii)　A が正則であるとき、

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \tilde{\mathrm{A}}$$

となる。

証明　(i)　$\Rightarrow$:　$\mathrm{XA} = \mathrm{E}$ となる X が存在するから定理 2.3 より $\det \mathrm{X} \cdot \det \mathrm{A} = 1$ となる。よって $\det \mathrm{A} \neq 0$

$\Leftarrow$:　定理 2.4 より $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{E} = \mathrm{A}\tilde{\mathrm{A}}$ となる。よって $\det \mathrm{A} \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{\det \mathrm{A}} \tilde{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E} = \mathrm{A} \cdot \frac{1}{\det \mathrm{A}} \tilde{\mathrm{A}}$$

となるから A は正則である。これより (ii) も示された。

証明終

系　A が正則ならば $\det(\mathrm{A}^m) = (\det \mathrm{A})^m,\ m \in \mathbb{Z}$ 。

注意　行列式が計算できれば $\tilde{\mathrm{A}}$ は求まる（第２章第４節)。従って定理 4.1 は「行列式が計算できれば、正則性の判定ができ、また正則であるとき逆行列を求め得る」ことを示している。

問題 4.1　定理 2.3 と定理 4.1 を用いて次を示せ。

(i)　$\mathrm{XA} = \mathrm{E}$ となる X が存在する　$\Rightarrow$　A は正則。

(ii)　$\mathrm{AY} = \mathrm{E}$ となる Y が存在する　$\Rightarrow$　A は正則。

(iii)　AB が正則　$\Rightarrow$　A も B も正則。

解答　(i)　$\mathrm{XA} = \mathrm{E}$　$\Rightarrow$　$\det \mathrm{X} \cdot \det \mathrm{A} = 1$　$\Rightarrow$　$\det \mathrm{A} \neq 0$　$\Rightarrow$　A は正則。

(ii)　$\mathrm{AY} = \mathrm{E}$　$\Rightarrow$　$\det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{Y} = 1$　$\Rightarrow$　$\det \mathrm{A} \neq 0$　$\Rightarrow$　A は正則。

(iii)　AB が正則 $\Rightarrow$　$\det(\mathrm{AB}) \neq 0$　$\Rightarrow$　$\det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B} \neq 0$　$\Rightarrow$　$\det \mathrm{A} \neq 0$ かつ $\det \mathrm{B} \neq 0$　$\Rightarrow$　A は正則かつ B は正則。

解答終

例 4.1　A が正則な上半３角行列ならば A^{-1} も上半３角行列。

証明　例 2.2 より $\tilde{\mathrm{A}}$ は上半３角行列である。定理 4.1, (ii) より A^{-1} も上半３角行列となる。

証明終

例　A が n 次正方行列ならば $\det\tilde{\mathrm{A}} = (\det\mathrm{A})^{n-1}$ となる。

証明　定理 2.4 より $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det\mathrm{A})\mathrm{E}$ 。よって $\det\tilde{\mathrm{A}}\cdot\det\mathrm{A} = (\det\mathrm{A})^n$ 。もし $\det\mathrm{A} \neq 0$ ならば $\det\tilde{\mathrm{A}} = (\det\mathrm{A})^{n-1}$ となる。もし $\det\mathrm{A} = 0$ ならば $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = 0$ となる。ここで $\tilde{\mathrm{A}}$ が正則であると仮定すれば $\mathrm{A} = 0$ 、即ち $\tilde{\mathrm{A}} = 0$ となり矛盾。よって $\tilde{\mathrm{A}}$ は正則ではないから定理 4.1 より $\det\tilde{\mathrm{A}} = 0 = (\det\mathrm{A})^{n-1}$ となる。

証明終

例　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

解　$\det\mathrm{A} = 2 \neq 0$ より A は正則である。さらに

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -4$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = 1$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_{33}=(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&-3&-4\\-2&2&4\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&2\\-2&-3\end{bmatrix}=1$$

となるから

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\,{}^{t}\!\begin{bmatrix}-4&0&2\\-2&-2&2\\1&-2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4&-2&1\\0&-2&-2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

がわかる。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}$ が正則であるか否かを判定し、正則であるときは逆行列を求める。

<u>解</u>　$\det\mathrm{A}=19\neq0$ より A は正則である。さらに

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&-2\\0&2\end{bmatrix}=2$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}-3&-2\\-1&2\end{bmatrix}=8$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}-3&1\\-1&0\end{bmatrix}=1$$

$$\Delta_{21}=(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}=-4$$

$$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}=3$$

$$\Delta_{23}=(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=-2$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}=-5$$

$$\Delta_{32}=(-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&1\\-3&-2\end{bmatrix}=-1$$

$$\Delta_{33}=(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix}1&2&1\\-3&1&-2\\-1&0&2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&2\\-3&1\end{bmatrix}=7$$

となるから

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{19}\,{}^t\begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 8 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

がわかる。

例 4.2　A を正則行列とするとき、
(i)　A の成分がすべて実数 $\Rightarrow$ A^{-1} の成分もすべて実数
(ii)　A の成分がすべて有理数 $\Rightarrow$ A^{-1} の成分もすべて有理数
証明は定理 4.1 より明らか。

注意　A が正則のとき、「 A の成分がすべて整数 $\Rightarrow$ A^{-1} の成分もすべて整数」は成り立たないが、次のように修正できる：

例 4.2′　成分がすべて整数であるような正方行列 A に対して

$$\det A = \pm 1 \iff A \text{ は正則で } A^{-1} \text{の成分もすべて整数}$$

証明　$\Rightarrow$:　$\tilde{A}$ の成分がすべて整数となることと $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$ より明らか。
$\Leftarrow$:　$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ より $\det A = \pm 1$ となる。

証明終