3.2　階数とその性質

ここでは行列の階数を定義して、その簡単な性質を述べる。

<u>定義</u>　(m, n) 形行列 A に対して、定理 3.1 により定まる r を A の階数といい $rank\mathrm{A}$ と表す。従って $0 \leqq rank\mathrm{A} \leqq \min\{m, n\}$ である。従って $\ell = \min\{m, n\}$ とするとき、

$$rank : M(m, n; \mathbb{C}) \ \rightarrow \ \{0, 1, 2, \cdots, \ell\}$$

という写像を得る。

補題 3.1 は行列の階数を求める具体的な手段を与えていることに注意する。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = 0 \ \Leftrightarrow \ rank\mathrm{A} = 0$ 。また $rank\mathrm{E}_n = n$ 。

<u>補題 3.3</u>　(m, n) 形行列 A, B に対して

$rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B} \ \Leftrightarrow$ $\mathrm{PAQ} = \mathrm{B}$ となる m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する。

$\Leftrightarrow$ A に適当な基本変形を有限回行うと B になる。

<u>証明</u>　① $rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B} \ \Rightarrow \ \mathrm{PAQ} = \mathrm{B}$; $\mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{P}_2\mathrm{BQ}_2$ となるから $\mathrm{P}_2^{-1}\mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1\mathrm{Q}_2^{-1} = \mathrm{B}$ となる。

② $\mathrm{PAQ} = \mathrm{B} \ \Rightarrow$ 有限回の基本変形で A は B に移る；補題 3.1 の系より P, Q は基本行列の積で表される。よって A を有限回基本変形すれば B になる。

③ 有限回の基本変形で A は B に移る $\Rightarrow \ rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B}$ ； B が有限回の基本変形で $\begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ になれば A も同様である。

証明終

<u>例</u>　$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の階数を求める。

$$rank \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第１行と第２行をとりかえた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第３行に第１行の 2 倍を加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

第２行を $\dfrac{1}{2}$ 倍し、第３行を $\dfrac{1}{3}$ 倍した。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

第１列のスカラー倍を他の列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

第３行に第２行の -1 倍を加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第２列のスカラー倍を第３列、第４列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

<u>例</u> $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ の階数を求める。

$$rank \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

第１列と第２列をとりかえた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

第２行に第１行の -2 倍を加え、
第３行に第１行の -1 倍を加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第１列のスカラー倍を他の列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第２行を -1 倍した。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第２列のスカラー倍を第３列、第４列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第３行を $\dfrac{1}{2}$ 倍した。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

第３列の -1 倍を第４列に加えた。

$$= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

<u>例 3.4</u>　$rank({}^t\mathrm{A}) = rank\mathrm{A}$

<u>証明</u>　$\mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t\mathrm{Q}{}^t\mathrm{A}{}^t\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ よりわかる。

証明終

<u>補題 3.4</u>　A, B を行列、 $\mathbf{b}$ を縦ベクトルとするとき、

(i)　$rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} = rank\mathrm{A} + rank\mathrm{B}$

(ii)　$rank\mathrm{A} \leqq rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \leqq rank\mathrm{A}{+}1$ 。特に $rank\mathrm{A} = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \end{bmatrix}$

<u>証明</u>　(i)　$r = rank\mathrm{A},\ s = rank\mathrm{B}$ として $\mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathrm{P}_2\mathrm{BQ}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする。
このとき

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{P}_2\mathrm{BQ}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \mathrm{E}_s & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。あとは行、列のとりかえにより E_s の 1 を上、左に移動させればよい。
(ii)　$r,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{Q}_1$ を上と同様とする。このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_1 \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1\mathrm{A} & \mathrm{P}_1\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1 & \mathrm{P}_1\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 & \mathbf{b}_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。このとき、$rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = rank\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathbf{b}_2 = 0$ 。そうでないときは $rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = rank\mathrm{A} + 1$ となる。

証明終

<u>系</u>　$rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ 0 \end{bmatrix} = rank\mathrm{A}$

<u>証明</u>　$rank \begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ 0 \end{bmatrix} = rank^t \begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ 0 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{A} & 0 \end{bmatrix} = rank({}^t\mathrm{A}) =$
$rank\mathrm{A}$ となる。

証明終

<u>補題 3.5</u>　行列 A, B の積が定義されるとき、 $rank(\mathrm{AB}) \leqq rank\mathrm{A}$,
$rank(\mathrm{AB}) \leqq rank\mathrm{B}$ となる。即ち、

$$rank(\mathrm{AB}) \leqq \min\{rank\mathrm{A},\ rank\mathrm{B}\}$$

証明　$r = rank\mathrm{A},\ \mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする。$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \end{bmatrix} \updownarrow r \end{array}$ とおけば

$$\mathrm{PAB} = \mathrm{PAQQ}^{-1}\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。補題 3.3, 3.4 より $rank(\mathrm{AB}) = rank(\mathrm{PAB}) = rank \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = rank\mathrm{B}_1 \leqq r$ となる。同様に $s = rank\mathrm{B},\ \mathrm{PBQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とし、

$\mathrm{AP}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\overleftrightarrow{\ s\ }}{\mathrm{A}_1} & \mathrm{A}_2 \end{bmatrix}$ とおけば

$$\mathrm{ABQ} = \mathrm{AP}^{-1}\mathrm{PBQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{E}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

よって $rank(\mathrm{AB}) = rank(\mathrm{ABQ}) = rank \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \end{bmatrix} = rank\mathrm{A}_1 \leqq s$ となる。

証明終

例 3.5　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix},\ a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{C} \Rightarrow rank\mathrm{A} \leqq 1$

証明　$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ とおくと $\mathrm{A} = \mathbf{ab}$ となる。
よって $rank\mathrm{A} \leqq \min\{rank\mathbf{a}, rank\mathbf{b}\} \leqq 1$ となる。

証明終

次の補題は第１章第５節のつづきである。

補題 3.6　(m, n) 形行列 A を、写像 $\mathrm{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ とみるとき、
(i)　A は全射 $\Leftrightarrow\ m = rank\mathrm{A}$
(ii)　A は単射 $\Leftrightarrow\ n = rank\mathrm{A}$
(iii)　A は全単射 $\Leftrightarrow\ m = n = rank\mathrm{A}$

証明　一般に $\mathrm{PAQ} = \mathrm{B}$; P, Q は正則のとき、

A：単射 $\Leftrightarrow$ B：単射、A：全射 $\Leftrightarrow$ B：全射、$rank\mathrm{A} = rank\mathrm{B}$

が成り立つから $A = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ としてよい。このとき $r = rank\mathrm{A}$ である。

(i) $\Rightarrow$: 対偶を示す。$r \leqq m-1$ とする。このとき任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$ 形となるから $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m$ は A の像に属さない。よって A は全射でない。

$\Leftarrow$: $m = rank\mathrm{A} \leqq n$ だから $A = \begin{bmatrix} E_m & 0 \end{bmatrix}$ となる。このとき任意の $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ に対して $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ とおけば $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} = E\mathbf{y} + 0 \cdot 0 = \mathbf{y}$ となる。よって A は全射である。

(ii) $\Rightarrow$: 対偶を示す。$r \leqq n-1$ と仮定する。$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと $\mathbf{x} \neq 0$ かつ $A\mathbf{x} = 0$ となるから A は単射でない。

$\Leftarrow$: $n = rank\mathrm{A} \leqq m$ だから $A = \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix}$ となる。このとき $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}' \Rightarrow \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}' \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ 。よって A は単射である。

(iii) は (i) と (ii) より明らか。

証明終

<u>系</u>　n 次正方行列を、写像 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ とみるとき、

$$\mathrm{A}\,\text{は全射} \Leftrightarrow \mathrm{A}\,\text{は単射} \Leftrightarrow \mathrm{A}\,\text{は全単射}$$

<u>注意</u>　これは例-1.4 の類似である。さらに補題 1.5 より、「 A は全単射 $\Leftrightarrow$ A は正則」となることを思い出す。