

第3章

この章では行列の左右から正則行列をかけてなるべく簡単な形（成分に 0 が多い形）に変形することを考える。そのための手段として用いるのが基本変形であり、結果として生じられるのが階数である。

3.1 基本行列と基本変形

この節の目標は「与えられた (m, n) 形行列 A に対して m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q をうまく選んで PAQ を簡単な形にすること」である。 A に対して P, Q をどうとるかが問題であるが、次のような特別な形の正則行列を導入することから始める。

基本行列 (i, j) 成分が $\alpha (\neq 0)$ 、その他の対角成分がすべて 1 である n 次対角行列を $P_n(i; \alpha)$ と書き、第 1 基本行列という；

$$P_n(i; \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & \cdots & & \alpha & \cdots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 列} \end{matrix}, \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$$

(i, j) 成分 $(i \neq j)$ だけが α で他の成分がすべて 0 である n 次正方形行列に n 次単位行列を加えた行列を $P_n(i, j; \alpha)$ と書き、第 2 基本行列という；

$$P_n(i, j; \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & \cdots & & \alpha & \cdots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{matrix}, i \neq j, \alpha \in \mathbb{C}$$

これらは共に n 次正則行列であり、

$$P_n(i; \alpha)^{-1} = P_n\left(i; \frac{1}{\alpha}\right), P_n(i, j; \alpha)^{-1} = P_n(i, j; -\alpha)$$

となる。即ち第 1 基本行列の逆行列は第 1 基本行列であり、第 2 基本行列の逆行列は第 2 基本行列である。

例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 n 次単位行列の第 i 行と第 j 行を交換した行列を $P_n(i, j)$ とおく $(i \neq j)$ ；

$$P_n(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}, \quad i \neq j$$

第 i 列 第 j 列

このとき $P_n(i, j)^2 = E$ 、即ち $P_n(i, j)^{-1} = P_n(i, j)$ でありかつ

$$P_n(i, j) = P_n(i, j; 1)P_n(i; -1)P_n(j, i; 1)P_n(i, j; -1)$$

となる。即ち $P_n(i, j)$ は第 1、第 2 基本行列の積として表される。

証明 前半は明らか。後半は $n = 2, i = 1, j = 2$ として示す。このとき

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

証明終

注意 この例で両辺の転置行列を考えれば

$$P_n(i, j) = P_n(j, i; -1)P_n(i, j; 1)P_n(i; -1)P_n(j, i; 1)$$

となる。従って表し方は一意的でない。また $P_n(i, j)$ は 3 個以下の第 1、第 2 基本行列の積では表せないことが証明されている。

$P_n(i, j)$ は第 1、第 2 基本行列の積として表されるので基本行列と呼ぶのは少々抵抗があるが、

$P_n(i, j)$ は簡単な形である

$P_n(i, j)$ は第 5 章で特別な役割をになう

という理由によりこれを第 3 基本行列と呼び、基本行列の仲間に入れることとする。第 1、第 2、第 3 基本行列を総称して基本行列という。

例 2 次基本行列は次の通り：

第 1 基本行列は $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ という 2 種類
 第 2 基本行列は $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ という 2 種類
 第 3 基本行列は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ただひとつ。

問 上の例に習って 3 次基本行列をすべて書きあげよ。

解

第 1 基本行列は $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ という 3 種類。

第 2 基本行列は $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ という 6 種類。

第 3 基本行列は $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ という 3 個。

例 3.1 A が第 3 基本行列の積 $\Rightarrow {}^t A = A^{-1}$ 。

証明 $A = Q_1 \cdots Q_r$ で各 Q_i が第 3 基本行列であれば、 ${}^t Q_i = Q_i = Q_i^{-1}$ より ${}^t A = {}^t Q_r \cdots {}^t Q_1 = Q_r^{-1} \cdots Q_1^{-1} = A^{-1}$ となる。

証明終

次に行列に基本行列をかけたらどうなるかを調べる。

例 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ とおく。このとき

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 & \alpha b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}; \text{第 2 行}$$

を α 倍する ($\alpha \neq 0$)。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \alpha a_1 + c_1 & \alpha a_2 + c_2 & \alpha a_3 + c_3 & \alpha a_4 + c_4 \end{bmatrix}$$

; 第 3 行に第 1 行の α 倍を加える。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}; \text{第 1 行と第}$$

3 行を交換する。

これを一般化する。

例 3.2 (i) (m, n) 形行列を行ベクトルにより分割して考える。 $\mathbf{b}_i \in {}^t\mathbb{C}^n (1 \leq i \leq m), i < j$ とするとき

$$P_m(i; \alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \alpha \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} ; \text{第 } i \text{ 行を } \alpha \text{ 倍する } (\alpha \neq 0)$$

$$P_m(i, j; \alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{b}_j \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i + \alpha \mathbf{b}_j \\ \vdots \\ \mathbf{b}_j \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} ; \text{第 } i \text{ 行に第 } j \text{ 行の } \alpha \text{ 倍を加える } (i \neq j)$$

$$P_m(i, j) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{b}_j \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_j \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} ; \text{第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 行とを交換する } (i \neq j)$$

(ii) 同じく列ベクトルにより分割して考える。 $\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^m, (1 \leq j \leq n), i < j$ とするとき

$$[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n] P_n(i; \alpha) = [\mathbf{a}_1 \cdots \alpha \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n] ; \text{第 } i \text{ 列を } \alpha \text{ 倍する } (\alpha \neq 0)$$

$$[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n] P_n(i, j; \alpha) = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j + \alpha \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n] ; \text{第 } j \text{ 列に第 } i \text{ 列の } \alpha \text{ 倍を加える } (i \neq j)$$

$$[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n] P_n(i, j) = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n] ; \text{第 } i \text{ 列と第 } j \text{ 列とを交換する } (i \neq j)$$

証明 例 1.6 より明らか。

(証明終)

例 3.3 A を正方行列とするとき

(i) A は対角行列 $\Leftrightarrow$ すべての第 1 基本行列 B に対して $AB = BA$ となる。

(ii) A はスカラー行列 $\Leftrightarrow$ すべての第 2 基本行列 B に対して $AB = BA$ となる。

$\Leftrightarrow$ すべての正則行列 B に対して $AB = BA$ となる。

$\Leftrightarrow$ すべての正方行列 B に対して $AB = BA$ となる。

証明 (i) $\Rightarrow$: は第 1 基本行列が対角行列であることより明らか。

$\Leftarrow$: $B = P(i; 2)(1 \leq i \leq n)$ とおく。 $AB = BA$ より

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 2a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 2a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 2a_{i1} & \cdots & 2a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

となる。よって $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ がわかる。

(ii) 「すべての第 2 基本行列と交換可能 $\Rightarrow A$ はスカラー行列」のみを示せばよい。 (i, j) 成分だけ 1 で他の成分がすべて 0 であるような n 次正方行列を $In(i, j)$ をすれば $i \neq j$ のとき $B = In + In(i, j)$ は第 2 基本行列である。 $AB = BA$ より $AIn(i, j) = In(i, j)A$ を得る。例 1.6 及び例 1.6' より A はスカラー行列となる。

証明終

基本変形 行列に関する次の 3 種類の操作を行に関する基本変形という；

- (行 1) ある行に 0 でない数をかける。
- (行 2) ある行に他の行のスカラー倍を加える。
- (行 3) 異なる 2 つの行を交換する。

同様に次の 3 種類の操作を列に関する基本行列という；

- (列 1) ある列に 0 でない数をかける。
- (列 2) ある列に他の列のスカラー倍を加える。
- (列 3) 異なる 2 つの列を交換する。

行に関する基本変形、列に関する基本変形をあわせて単に基本変形と呼ぶ。(行 1) は第 1 基本行列を左からかけることにより、(行 2) は第 2 基本行列を左からかけることにより、(行 3) は第 3 基本行列を左からかけることにより生ずることが例 3.2 よりわかる。同様に列に関する基本変形は基本行列を右からかけることにより生ずる。基本行列の逆行列はまた基本行列であるから、行列 A が行列 B に基本変形でうつれば B は A に基本変形でうつる。

例 (i) (行 3) は (行 1) $\wedge$ (行 2) を 4 回くり返せば得られる。列についても同様。

(ii) 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とは次のように 4 回の基本変形で移りあう：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(\text{行 } 2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(\text{行 } 2)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(\text{行 } 1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(\text{行 } 2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同様に $P_n(i, j)$ と E_n とは (行 1) 1 回、(行 2) 3 回で移りあう。

問題 上の例の (i) と (ii) の関係を考えよ。

補題 3.1 (m, n) 形行列 A は適当な基本変形を有限回行うことにより $\left[\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], 0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ という形になる。

証明 以下のような段階をふんで示す。

step1. $A = 0$ か否かを判定する。もし $A = 0$ なら $r = 0$ として求める形である (END)。

もし $A \neq 0$ なら次に進む。

step2. $a_{ij} \neq 0$ となる $i, j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ が存在する。このとき (行 j) (列 i) を行い、 a_{ij} を $(1, 1)$ 成分に移動する。

step3. 第 1 行に $\frac{1}{a_{ij}}$ をかける、即ち (行 1) を行うことにより $(1, 1)$ 成分を 1 にできる。従って A は

$\left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline * & * \end{array} \right]$ 形に変形される。

step4. 第 1 行の何倍かを他の行に加える、即ち (行 2) を $m - 1$ 回行うことにより

$\left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right]$ 形に変形する。

step5. 第 1 列の何倍かを他の列に加える、即ち (列 2) を $n - 1$ 回行うことにより

$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array} \right]$ 形に変形する。

step1'. $A' = 0$ か否かを判定する。もし $A' = 0$ なら $r = 1$ として求める形である (END)。

もし $A' \neq 0$ なら次に進む。

step2'. A' の成分で 0 でないものを $(2, 2)$ 成分に移動する。

step3'. $(2, 2)$ 成分を 1 とする。

step4'. $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right]$ 形にする。

step5'. $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A'' \end{array} \right]$ 形にする。

step1''. $A'' = 0$ か否かを判定する。もし $A'' = 0$ なら $r = 2$ として求める形である (END)。

もし $A'' \neq 0$ なら次に進む。……

あとはこれをくり返せばよい。行列のサイズがひとつずつ減るからこの手順は必ず有限回で止まる。

証明終

系 A を正方行列とするとき、

- A は正則 $\Leftrightarrow$ A は有限個の基本行列の積となる。
 $\Leftrightarrow$ A は行に関する基本変形だけで E に移る。
 $\Leftrightarrow$ A は列に関する基本変形だけで E に移る。
 $\Leftrightarrow$ $XA = E$ となる正方行列 X が存在する。
 $\Leftrightarrow$ $AY = E$ となる正方行列 Y が存在する。

証明 まず補題 1.3, (ii) より「 $B = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき、B : 正則

$\Leftrightarrow B = E$ 」に注意する。

正則 $\Rightarrow$ 基本行列の積 ; 補題 3.1 より $P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = B$ と書ける。ここで P_i, Q_j は基本行列である。A は正則だから補題 1.2 より B も正則となる。よって $B = E$ 。このとき $A = P_1^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ となる。即ち A は基本行列の積である。

基本行列の積 $\Rightarrow$ 行に関する基本変形だけで E に移る ;

$A = P_1 \cdots P_s$; 各 P_i は基本行列 $\Rightarrow (P_s^{-1} \cdots P_1^{-1})A = E$ 。

行に関する基本変形だけで E に移る $\Rightarrow$ 正則 ;

$(P_s \cdots P_1)A = E \Rightarrow A = P_1^{-1} \cdots P_s^{-1}$ は正則。

、で行を列にかえても同様である。

$XA = E \Rightarrow A$ は正則 ; 背理法で示す。もし A が正則でないと $PAQ = B$ において $r \leq n-1$ となる。 $AQ = P^{-1}B$ より $Q = (XA)Q = X(AQ) = X(P^{-1}B) = (XP^{-1})B$ となる。ここで

$$XP^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{matrix} \quad \text{と表せば} \quad Q = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{となる。これは} Q \text{ の正則性に矛盾する。}$$

$AY = E \Rightarrow A$ は正則 ; $AY = E \Rightarrow {}^t Y {}^t A = E$ 。より ${}^t A$ は正則。補題 1.3, (i) より A も正則となる。

証明終

補題 3.2 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を共に (m, n) 形行列とする。

$P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる m 次正方行列 P 及び n 次正方行列 Q が存在すれば $r = s$ となる。

証明 $r \leq s$ としてよい。 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \end{matrix}$, $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{matrix}$ と対称分割する。このとき、 $P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q =$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{bmatrix} \quad \text{となるから}$$

$$\begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} E_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \ddots \\ & \ddots & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow s \end{matrix}$$

となる。よって $P_{11}Q_{11} = E_r$, $P_{21}Q_{11} = 0$ 。補題 3.1 の系より Q_{11} は正則。よって $P_{21} = P_{21}Q_{11}Q_{11}^{-1} = 0$ 。このことは $P_{21}Q_{12} = 0$ を示すから $r = s$ がわかる。

証明終

補題 3.1 と補題 3.2 をまとめて次を得る。

定理 3.1 任意の (m, n) 形行列 A に対して、 m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q をうまくとれば、

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq r \leq \min\{m, n\}$$

となる。しかもこの r は P, Q の選び方にはよらず、 A だけから一意的に定まる。

以上によりこの節の冒頭で述べた目標が達成された。特に「簡単な形」についても明らかとなった。