

2.4 余因子行列

定義 n 次正方行列 A に対し、 A の第 i 行と第 j 列を取り去って得られる $(n-1)$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを A の (i, j) 余因子と呼び Δ_{ij} と表す。即ち

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{第 } i \text{ 行をトル} \\ \text{第 } j \text{ 列をトル} \end{array} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

さらに

$$\tilde{A} = {}^t \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

とおいて A の余因子行列という。

例 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき、

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & d \end{bmatrix} = d, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & d \end{bmatrix} = -c, \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} a & b \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{bmatrix} = -b, \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} a & b \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{bmatrix} = a \end{aligned}$$

となる。よって

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

がわかる。

例 2.3 A が上半 3 角行列ならば $\tilde{A}$ も上半 3 角行列となる。

証明 $i < j$ とする。

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} & \text{第 } i \text{ 列} & \text{第 } j \text{ 列} \\ & \diagdown & \\ \text{第 } i \text{ 行} & & \\ & \diagdown & \\ \text{第 } j \text{ 行} & & \end{bmatrix}$$

であった。 A から第 i 行、第 j 列をとり去った行列は上半 3 角行列であり、その対角成分は

$$a_{11}, \dots, a_{i-1 \ i-1}, a_{i+1 \ i}, \dots, a_{j \ j-1}, a_{j+1 \ j+1}, \dots, a_{nn}$$

である。ここで $a_{i+1 \ i} = \dots = a_{j \ j-1} = 0$ に注意すれば $\Delta_{ij} = 0$ がわかる。従って $\tilde{A}$ は上半3角行列となる。

証明終

補題 2.7 A を n 次正方行列とすると、任意の $i, j (1 \leq i, j \leq n)$ に対して

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta_{ik} = \sum_{k=1}^n \Delta_{kj} a_{kj}$$

が成り立つ。

証明 はじめに次の式を示す；

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a_{ij} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{ij} \Delta_{ij}$$

$$\text{左辺} = (-1)^{i-1} \det \begin{bmatrix} 0 & \cdots 0 & a_{ij} & 0 \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{行をひとつづつと} \\ \text{りかえて第 } i \text{ 行} \\ \text{を1番上に移動し} \\ \text{た。} \end{array}$$

$$= (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} \det \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{ij} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{列をひとつづつと} \\ \text{りかえて第 } j \text{ 行} \\ \text{を1番右に移動し} \\ \text{た。} \end{array}$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \det \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] = a_{ij} \Delta_{ij} \quad ; \text{即ち右辺である。}$$

これを用いれば、多重線形性より

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\Delta_{ik} \text{ となる。}
\end{aligned}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^n \Delta_{kj}a_{kj} \text{ も同様にできるので略。}$$

証明終

注意 これを行列式の余因子展開という。補題 2.6 や補題 2.6' と同様 n 次正方行列の行列式の計算を $(n-1)$ 次正方行列の行列式の計算に帰着させる公式である。

定理 2.4 A を正方行列とすると、 $\tilde{A}A = (\det A)E = A\tilde{A}$ となる。

証明 はじめに「 $i \neq j \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik}\Delta_{jk} = 0$ 」を示す。 A の第 j 行を第 i 行におきかえた行列を A' とする。即ち

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{このとき } \det A' = 0 \text{ である。}$$

A' の (i, j) 成分を a'_{ij} 、 (i, j) 余因子を Δ'_{ij} とおくと $a'_{jk} = a_{ik}$ 、 $\Delta'_{jk} = \Delta_{jk}$ となる。 A' に補題 2.7 を適用すれば

$$0 = \det A' = \sum_{k=1}^n a'_{jk}\Delta'_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\Delta_{jk}$$

となる。

補題 2.7 と上の結果を合せて書けば

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta_{jk} = (\det A) \delta_{ij}$$

となる。このところは $A\tilde{A} = (\det A)E$ を示している。全く同様に $\tilde{A}A = (\det A)E$ もわかる。

証明終

$$\begin{aligned} \underline{\text{例}} \quad \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ となる。} \end{aligned}$$

これは定理 1.1 の証明に用いた式である。