2.3　多重線形性と交代性

ここでは行列を縦ベクトルにより分割して行列式の性質を調べる。

<u>定理 2.1</u>　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}'_j, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ；

(i)　$\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}'_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}'_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

(ii)　$\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \alpha\mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \alpha\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

即ちひとつの列が和になれば行列式も和になり、ひとつの列が α 倍されれば行列式も α 倍される。

<u>証明</u>　(i)　補題 2.4 より左辺 $= \displaystyle\sum_{p\in \mathrm{S}_n} sgn(p)a_{p(1)1}\cdots(a_{p(j)j} + a'_{p(j)j})\cdots a_{p(n)n}$

$= \displaystyle\sum_{p\in \mathrm{S}_n} sgn(p)a_{p(1)1}\cdots a_{p(j)j}\cdots a_{p(n)n} + \sum_{p\in \mathrm{S}_n} sgn(p)a_{p(1)1}\cdots a'_{p(j)j}\cdots a_{p(n)n} =$ 右辺となる。

(ii)　同じく補題 2.4 より左辺 $= \displaystyle\sum_{p\in \mathrm{S}_n} sgn(p)a_{p(1)1}\cdots(\alpha a_{p(j)j})\cdots a_{p(n)n}$

$= \alpha\displaystyle\sum_{p\in \mathrm{S}_n} sgn(p)a_{p(1)1}\cdots a_{p(j)j}\cdots a_{p(n)n} =$ 右辺となる。

証明終

<u>系</u>　(i)　ひとつの列がすべて 0 なら行列式も 0 である。

(ii)　A が n 次正方行列、 $\alpha \in \mathbb{C} \ \Rightarrow\ \det(\alpha \mathrm{A}) = \alpha^n \det \mathrm{A}$

<u>定理 2.2</u>　$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^n,\ q \in \mathrm{S}_n$ に対して $\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{q(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{q(n)} \end{bmatrix} = sgn(q)\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ が成り立つ。即ち列を並べかえると行列式はその符号倍される。

<u>証明</u>　$b_{ij} = a_{iq(j)}\ (1 \leqq i, j \leqq n)$ とおけば

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{q(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{q(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

となる。従って行列式の定義、符号の性質 (i) 、補題 2.1, (i) より

$\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{q(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{q(n)} \end{bmatrix} = \displaystyle\sum_{p\in \mathrm{S}_n} sgn(p)b_{1p(1)}\cdots b_{np(n)}$

$= \displaystyle\sum_{p\in \mathrm{S}_n} sgn(p)a_{1qp(1)}\cdots a_{nqp(n)} = sgn(q)\sum_{p\in \mathrm{S}_n} sgn(q\circ p)a_{1q\circ p(1)}\cdots a_{nq\circ p(n)}$

$= sgn(q)\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ となる。

証明終

<u>系</u>　(i)　$i \neq j \ \Rightarrow\ \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$
$= -\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

(ii)　$i \neq j,\ \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j \ \Rightarrow\ \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = 0$

(iii)　$i \neq j \ \Rightarrow\ \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j + \alpha\mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

$= \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

証明　(i)　定理2.2 で q を i と j をとりかえる互換とすればよい。
(ii)　は (i) より明らか。
(iii) 定理2.1 及び系 (ii) より左辺$= \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} =$ 右辺となる。

証明終

定理 2.1 の性質を多重線形性といい、定理 2.2 の性質を交代性という。ここでは縦ベクトルによる分割、即ち列に関する性質として考えて来たが、補題 2.4 により横ベクトルによる分割、即ち行に関する性質としても全く同様のことが成り立つ。

例　n 次単位行列の第 i 行と第 j 行をとりかえた行列を $\mathrm{P}_n(i,j)$ とおくと $\det \mathrm{P}_n(i,j) = -1$ となる。

以上の性質を用いれば $n \geqq 4$ の場合の行列式の計算が実行できる。これについては「定理2.1 、定理2.2 及びその系を用いて補題2.5 が使える形に変形して、より小さいサイズの行列式の計算に帰着させ、最終的には $n \leqq 3$ の場合に帰する」というのが定跡である。まとめておこう。

補題2.6　行列式の計算は次のようにすればより小さいサイズの計算に帰着し得る；

n 次正方行列 A が与えられる。

*step*1.　$\mathrm{A} = 0$ か否かを判定する。もし $\mathrm{A} = 0$ なら $\det \mathrm{A} = 0$ である（END）。
$\mathrm{A} \neq 0$ なら次に進む。

*step*2.　$a_{ij} \neq 0$ となる $i, j (1 \leqq i, j \leqq n)$ が存在する。行や列のとりかえにより、これを $(1,1)$ 成分に移動する。即ち
$\mathrm{A}_1 = \left[\begin{array}{c|c} a_{ij} & * \\ \hline * & \end{array}\right]$ 形にする。このとき $\det \mathrm{A} = \pm \det \mathrm{A}_1$ である。

*step*3.　第 1 行の何倍かを他の行に加えることにより
$\mathrm{A}_2 = \left[\begin{array}{c|c} a_{ij} & * \\ \hline 0 & \mathrm{A}' \end{array}\right]$ 形に変形する。このとき $\det \mathrm{A}_1 = \det \mathrm{A}_2 = a_{ij} \det \mathrm{A}'$
ここで A' は $n-1$ 次正方行列である。 $\det \mathrm{A} = \pm a_{ij} \det \mathrm{A}'$（符号は *step*2 で決まる）であるから A の行列式の計算が A' の行列式の計算に帰着された。

注意　(i)　*step*2 で a_{ij} を $(1,1)$ 成分に移動したが、 (n,n) 成分に移してもよい。
(ii)　*step*3 で行を列にかえてもよい。
(iii)　$a_{ij} = 1$ となるものかあったらそれを $(1,1)$ 成分または (n,n) 成分に移すとよい。

<u>例</u>　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ に対し $\det A$ を計算する。

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{第 2 行に第 4 行の } -1 \text{ 倍を加えた}}{\overset{\longrightarrow}{=}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{補題 2.5}}{\overset{\longrightarrow}{=}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで $n = 3$ の公式を用いてもよいが、さらに

$$\underset{\text{第 1 行に第 3 行の } -1 \text{ 倍を加えた}}{\overset{\longrightarrow}{=}} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

<u>例</u>　$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ に対し $\det A$ を計算する。

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{第 1 行と第 2 行をとりかえた}}{\overset{\longrightarrow}{=}} -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\longrightarrow}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -1 & -14 \\ 0 & -11 & -5 & -6 \\ 0 & 11 & 9 & 17 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -11 & -1 & -14 \\ -11 & -5 & -6 \\ 11 & 9 & 17 \end{bmatrix}$$

第 2 行に第 1 行の -3 倍を加え、
第 3 行に第 1 行の -2 倍を加え、
第 4 行に第 1 行の 3 倍を加えた。

$$= \underset{\text{第 1 列の } -11 \text{ を前に出した}}{\longrightarrow} 11\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 1 & -5 & -6 \\ -1 & 9 & 17 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{第 2 行に第 1 行の } -1 \text{ 倍を加え、} \\ \text{第 3 行に第 1 行を加えた。}}}{\longrightarrow}= 11\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 11\det\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = 11 \times (-12 - 64) = -836$$

例 2.2　$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ を計算する。

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{第 2 行に第 1 行の } -a \text{ 倍を加え、} \\ \text{第 3 行に第 1 行の } -a^2 \text{ 倍を加えた。}}}{\longrightarrow}= \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{補題 2.5}}{\longrightarrow}= \det\begin{bmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{第 1 列の } b \cdot a \text{ を前に出し、} \\ \text{第 2 列の } c \cdot a \text{ を前に出した。}}}{\longrightarrow}= (b-a)(c-a)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

注意　このように多重線形性と交換性を用いれば行列式の具体計算が可能となる。のみならずこの 2 性質は行列式を特徴づける。即ち次ぎが成り立つ；写像 $f : \mathrm{M}(n;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ が多重線形性と交代性及び $f(\mathrm{E}) = 1$ をみたせば $f = \det$ となる。証明は略す。

定理 2.3　A, B を n 次正方行列とするとき $\det(\mathrm{AB}) = \det\mathrm{A}\cdot\det\mathrm{B}$ となる。

証明　A の (i,j) 成分を a_{ij} 、 B の (i,j) 成分を b_{ij} とすれば、積の定義より AB の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ となる。ここで列ベクトルに関する多重線形性を適用するために、第 j 列の和に関する添字は k のかわりに k_j を用いる。よって

$$\det(\mathrm{AB}) = \det\begin{bmatrix} \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1}b_{k_1 1} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_n}b_{k_n n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k_1=1}^{n} a_{nk_1}b_{k_1 1} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n}b_{k_n n} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} b_{k_1 1}\cdots b_{k_n n}\det\begin{bmatrix} a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk_1} & \cdots & a_{nk_n} \end{bmatrix}$$

ここでもし $k_1,\cdots,k_n$ の中に同じものがあったあら交代性の系より $\det\begin{bmatrix} a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk_1} & \cdots & a_{nk_n} \end{bmatrix} = 0$ となるから、和：$\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}(\quad)$ は $k_1,\cdots,k_n$ がすべて異なるものについて加えればよい。このとき $k_1,\cdots,k_n$ は $1,\cdots,n$ の順列であるから $\mathrm{P}(i) = k_i (1 \leqq i \leqq n)$ と定義すれば $\mathrm{P} \in \mathrm{S}_n$ となる。従って交代性より

$\det(\mathrm{AB}) = \sum_{p\in\mathrm{S}_n} b_{p(1)1}\cdots b_{p(n)n}\det\begin{bmatrix} a_{1p(1)} & \cdots & a_{1p(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{np(1)} & \cdots & a_{np(n)} \end{bmatrix}$

$= \sum_{p\in\mathrm{S}_n} b_{p(1)1}\cdots b_{p(n)n} sgn(p)\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$= \det\mathrm{A}\cdot\sum_{p\in\mathrm{S}_n} sgn(p)b_{p(1)1}\cdots b_{p(n)n} = \det\mathrm{A}\cdot\det({}^t\mathrm{B})$ となる。最後に補題 2.4 を用いれば $\det(\mathrm{AB}) = \det\mathrm{A}\cdot\det\mathrm{B}$ がわかる。

証明終

<u>系</u>　$\det(\mathrm{A}^m) = (\det\mathrm{A})^m,\ m \geqq 1$

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対称分割とし、A_{11} が正則であるとする。このとき $\det\mathrm{A} = \det\mathrm{A}_{11}\cdot\det(\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12})$ となる。

<u>証明</u>　$\mathrm{A}'_{22} = \mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12}$ とおくと (1.16)、補題 2.5 とその系及び定理 2.3 より $\det\mathrm{A} = \det\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}'_{22} \end{bmatrix} = \det\mathrm{A}_{11}\cdot\mathrm{A}'_{22}$ となる。

証明終

これを用いても補題 2.6 と同様のことができる。

<u>補題 2.6′</u>　行列式の計算は次のようにしてもより小さいサイズの計算に帰着できる：与えられた n 次正方行列 A に対して、
$step1, step2$ は補題 2.6 と同じとする。従ってはじめから $a_{11} \neq 0$ としてよい。このとき、

$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \hline \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{array}\right]$ とすれば、$\det \mathrm{A} = \left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)^{n-2} \det(a_{11}\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{12})$
ここで $a_{11}\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{12}$ は $n-1$ 次正方行列である。

例　$(ax+by)(cu+dv) - (au+bv)(cx+dy) = (ad-bc)(xv-yu)$ 、特に $(ax+by)^2 + (bx-ay)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ となることを定理 2.3 を用いて示す。上の式は定理 1.1 の証明に用いたものである。

証明　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}$ とおくと
$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{bmatrix}$ となるから
左辺 $= \det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B} =$ 右辺となる。この式に $c=-b,\ d=a,\ u=-y,\ v=x$ を代入すれば下の式になる。

証明終

注意　例 1.10 を思い出して $\alpha = a+ic,\ z = x+iy$ とおくと $|\alpha z|^2 = |\alpha|^2|z|^2$ 即ち $|\alpha z| = |\alpha||z|$ がわかる。但し $a, c, x, y \in \mathbb{R}$ とする。