第２章

この章では行列式の定義とその基本的な性質を述べ、余因子行列を導入する。定理 1.1 の一般化のための準備が目標のひとつである。行列式は $(2,2)$ 形行列 $\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]$ に対する $ad-bc$ の一般化であり、余因子行列は $\left[\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array}\right]$ の一般化である。従って行列式と余因子行列を用いることにより定理 1.1 の一般化が可能となる（定理 4.1）。

2.1　順列とその符号

ここでは行列式の定義（第２節）のための準備として、順列とその符号について述べる。

n を１以上の整数とし、$1,2,\cdots,n$ の並べかえを考える。第一１章第２節の言葉を用いれば、このような並べかえは全単射；$\{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$ に他ならない。従って写像の合成や逆写像として、並べかえの合成や逆の並びかえが考えられる。また恒等写像として何もかえない並べかえも考えられる。これを e と書く；$e = id\{1,2,\cdots,n\}$ 。$1,2,\cdots,n$ の並べかえの全体を S_n で表す； $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}\left(\{1,2,\cdots,n\}\right)$ 記号等については第一１章第２節、特に最後の部分を参照のこと。

補題-1.1 で $\mathrm{X} = \{1,2,\cdots,n\}$ とおけば次を得る：

<u>補題 2.1</u>　(i)　$q \in \mathrm{S}_n$ を固定するとき

写像： $\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_n & \to & \mathrm{S}_n \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ p & \mapsto & p \circ q \end{array}$ 及び $\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_n & \to & \mathrm{S}_n \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ p & \mapsto & q \circ p \end{array}$ は共に全単射である。

(ii)　写像： $\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_n & \to & \mathrm{S}_n \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ p & \mapsto & p^{-1} \end{array}$ も全単射である。

$1,2,\cdots,n$ の並べかえ p は $p:\{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$ という全単射であるから、 $1,2,\cdots,n$ の順列 $p(1),\cdots p(n)$ が定まる。逆に $1,\cdots,n$ の順列 $p_1,\cdots,p_n$ があれば $p(i) = p_i (1 \leqq i \leqq n)$ とおくことにより全単射 $p:\{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$ が定まる。これを $p = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}\right)$ と表す。この表示は $(2,n)$ 形行列とみなせるが、行列として扱うわけではない。順列 $p_1,\cdots,p_n$ を全単射 $\left(\begin{array}{ccc} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{array}\right)$ とは同一視できるから S_n は $n!$ 個の要素より成る有限集合であることがわかる（数学Ｉ）。

<u>例</u>　$n = 4$ のとき、順列 2 3 4 1 と同一視される全単射 p は $p = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ で表される。$e = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$ も明らか。

例 2.1　$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,
$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ である。

$1, 2, \cdots, n$ の中の特定の 2 個の数を交換し、他の $n-2$ 個の数をかえない並びかえを互換という。

例　$n = 3$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ は互換であり $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ は互換でない。 S_3 には互換は 3 個ある。一般に S_n には $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の互換がある（数学 I ）。
ここでは証明しないが次が成り立つ。

補題 2.2　(i)　任意の $p \in S_n$ は有限個の互換の積として表される。
(ii)　$\sigma_1, \cdots, \sigma_s,\ \tau_1, \cdots, \tau_t$ を互換とするとき、

$$\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_s = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_t \ \Rightarrow\ s - t \text{ は偶数}$$

が成り立つ。

定義　$p \in S_n$ が互換の積として $p = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_s$ と表されるとき、$sgn(p) = (-1)^s$ とおき、 p の符号という。これにより写像 $sgn : S_n \to \{1, -1\}$ が定義されたことになる。

性質　(i)　$p, q \in S_n$ に対し $sgn(p \circ q) = sgn(p) \cdot sgn(q)$
(ii)　$sgn(e) = 1$
(iii)　$p \in S_n$ に対し $sgn(p) = sgn(p^{-1})$
符号に関して第 2 節以下で用いられるのは上記の性質の他には次の結果だけである。

補題 2.3　$n = 3$ のとき、

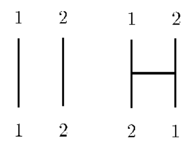
$sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1,\ sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1,\ sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1,$
$sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1,\ sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1,\ sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$

証明　性質 (ii) より $sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = sgne = 1$ となる。また $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ より $sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1$ となる。同様に $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ より $sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1$ となる。残りの 3 つはすべて互換だから符号は -1 になる。

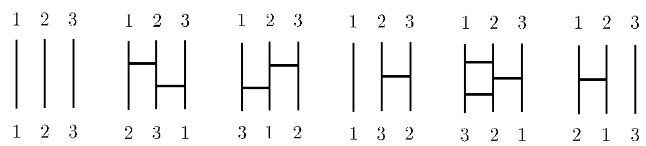
証明終

あみだくじ　順列はすべてあみだくじで表される。

例　$n = 2$ のとき、



$n = 3$ のとき、



順列 P をあみだくじで表すとき、横棒の数を s とすれば $sgn(\mathrm{P}) = (-1)^s$ となる。
このことからも補題 2.3 が再確認できる。