

1.6 4元数

ここでは複素数をさらに拡張することを考える。第2章以下ではこの節の結果は用いない。

$$(1.19) \quad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \end{cases}$$

をみたす新しい数 i, j, k を導入し、

$$a + bi + cj + dk \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

と表される数を4元数という。ここで

$$\begin{aligned} a_1 + b_1i + c_1j + d_1k &= a_2 + b_2i + c_2j + d_2k \\ \Leftrightarrow a_1 &= a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad d_1 = d_2 \end{aligned}$$

により4元数の相等を定義する。4元数の全体を $\mathbb{H}$ と書く；

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

これも集合となる。 $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ と考えられる。

和と積 4元数 $\xi_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$, $\xi_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ に対して

$$\xi_1 + \xi_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

により ξ_1 と ξ_2 の和を定義する。また

$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &+ (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

により ξ_1 と ξ_2 の積を定義する。これは (1.19) の一般化である。複素数の場合と同様に、 -1 倍も定義されるから差も定義されたことになる。

共役 $\xi = a + bi + cj + dk$ に対し $\bar{\xi} = a - bi - cj - dk$ とおき ξ の共役という。

$$\text{性質} \quad \overline{\xi_1 + \xi_2} = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2, \quad \overline{\xi_1 \xi_2} = \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2, \quad \bar{\bar{\xi}} = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi = \bar{\xi}$$

絶対値 $\xi = a + bi + cj + dk$ に対し $|\xi| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ とおき ξ の絶対値という。明らかに $|\xi|^2 = \xi \bar{\xi}$, $|\xi| = \sqrt{\xi \bar{\xi}} = |\bar{\xi}|$ が成り立つ。

性質 $|\xi_1 + \xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2|$, $|\xi_1 \xi_2| = |\xi_1| |\xi_2|$, $\xi = 0 \Leftrightarrow |\xi| = 0$

よって $\xi \neq 0$ ならば $\frac{\bar{\xi}}{|\xi|^2} = 1$ 、即ち $\xi^{-1} = \frac{\bar{\xi}}{|\xi|^2}$ となる。従って商も定義されることがわかる。

以上により 4 元数の全体 $\mathbb{H}$ において加減乗除の 4 則が自由にできることが示された。4 元数の 4 則演算は i, j, k を文字だと思って計算し、 $i^2, j^2, k^2, ij, ji, jk, kj, ki, ik$ が出てきたら (1.19) を用いて簡単にして行けばよい。実数や複素数と異なる点は乗法の交換法則が成り立たないことである。

4 元数と実 (4, 4) 形行列

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ と } a+bi+cj+dk \in \mathbb{H} \text{ とを同一視して } \mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \text{ と考える。}$$

このとき比例定数が $\alpha \in \mathbb{H}$ である 4 元数の比例 $w = \alpha z$ がどのような行列で表されるかを調べる。 $\alpha = a+bi+cj+dk$, $z = u+vi+xj+yk \in \mathbb{H}$ とおくと

$$\begin{aligned} w &= \alpha z = (a+bi+cj+dk)(u+vi+xj+yk) \\ &= (au-bv-cx-dy) + (bu+av-dx+cy)i \\ &\quad + (cu+dv+ax-by)j + (du-cv+bx+ay)k \end{aligned}$$

$$\text{となるから } w \text{ は } \begin{bmatrix} au-bv-cx-dy \\ bu+av-dx+cy \\ cu+dv+ax-by \\ du-cv+bx+ay \end{bmatrix} \text{ と同一視される。ここで}$$

$$\begin{bmatrix} au-bv-cx-dy \\ bu+av-dx+cy \\ cu+dv+ax-by \\ du-cv+bx+ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

に注意すれば、求める行列が

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

であることがわかる。

問題 写像：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \rightarrow & M(4; \mathbb{R}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a + bi + cj + dk & \mapsto & \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \end{array}$$

は単射であり、和と積を保つことを示せ。

4元数と複素 (2, 2) 形行列 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ と考えることもできる。ここで $\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ と $w + jz \in \mathbb{H}$ とを同一視して $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$ と考える。このとき比例定数が $\alpha + \beta j \in \mathbb{H}$ である4元数の比例がどのような行列で表されるかを調べる。任意の $w, z \in \mathbb{C}$ に対して、 $\alpha j = j\bar{\alpha}$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta j)(w + jz) &= \alpha w + \alpha jz + \beta jw + \beta j^2 z \\ &= (\alpha w - \beta z) + j(\bar{\beta} w + \bar{\alpha} z) \end{aligned}$$

となるから、これは行列 $\begin{bmatrix} \alpha w - \beta z \\ \bar{\beta} w + j\bar{\alpha} z \end{bmatrix}$ と同一視される。ここで

$$\begin{bmatrix} \alpha w - \beta z \\ \bar{\beta} w + j\bar{\alpha} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$$

に注意すれば、 $\alpha + \beta j$ 倍するという線形写像が行列 $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ で表されることがわかる。

注意 $\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ と $w + zj \in \mathbb{H}$ とを同一視すると $\alpha + \beta j$ 倍する写像は行列で表されなくなる。

問題 写像：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \rightarrow & M(2; \mathbb{C}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \alpha + \beta j & \mapsto & \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{即ち} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \rightarrow & M(2; \mathbb{C}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a + bi + cj + dk & \mapsto & \begin{bmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{bmatrix} \end{array}$$

は単射であり、和と積を保つことを示せ。

最後に2次方程式の4元数解について考える。 $x = i, j, k$ は2次方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解である。即ち少なくとも3個の解を持つ。より一

般に次が成り立つ。

例 写像：

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \rightarrow & \{x \in \mathbb{H} \mid x^2 + 1 = 0\} \\ \cup & & \cup \\ \left[\begin{array}{c} b \\ c \\ d \end{array} \right] & \mapsto & x = bi + cj + dk \end{array}$$

は全単射である。ここで $S^2 = \left\{ \left[\begin{array}{c} b \\ c \\ d \end{array} \right] \in \mathbb{R}^3 \mid b^2 + c^2 + d^2 = 1 \right\}$ である。従って 2 次方程式 $x^2 + 1 = 0$ は無限に多くの 4 元数解を持つことがわかる。

証明 一般に $(a+bi+cj+dk)^2 = (a^2-b^2-c^2-d^2)+2abi+2acj+2adk$ が成り立つから、 $x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ に対して、

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 & \Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -1, ab = ac = ad = 0 \\ & \Leftrightarrow a = 0, b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{aligned}$$

となる。従って上記写像が全単射であることが示せた。

(証明終)