1.3　積

<u>定義</u>　(ℓ, m) 形行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix}$ と (m, n) 形行列 $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ とに対して $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} (1 \leqq i \leqq l,\ 1 \leqq j \leqq n)$ とおいて $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix}$ と書き、A と B の積という。AB は (l, n) 形行列である。A と B の積は A の列の数と B の行の数が一致しないときには定義されない。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 10 & 1\cdot 8 + 2\cdot 11 & 1\cdot 9 + 2\cdot 12 \\ 3\cdot 7 + 4\cdot 10 & 3\cdot 8 + 4\cdot 11 & 3\cdot 9 + 4\cdot 12 \\ 5\cdot 7 + 6\cdot 10 & 5\cdot 8 + 6\cdot 11 & 5\cdot 9 + 6\cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 30 & 33 \\ 61 & 68 & 75 \\ 95 & 106 & 116 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき AC は定義されない。

<u>例</u>　$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} & y_1 a_{12} + y_2 a_{22} \end{bmatrix}$

<u>例 1.6</u>　i, j を固定して、(i, j) 成分だけ 1 、その他の成分がすべて 0 であるような行列を考える。このとき

$$\begin{array}{c c} & \\ \text{第 } i \text{ 行} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \text{第 } j \text{ 列} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} & 0 & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & 0 & \end{bmatrix} & \text{第 } i \text{ 行} \end{array},$$

即ち第 i 行に A の第 j 行が並ぶ。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{c c} \text{第 } j \text{ 列} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{第 } i \text{ 行} \end{array} = \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{bmatrix} & a_{1i} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{mi} & \end{bmatrix} \end{array},$$

即ち第 j 列に A の第 i 列が並ぶ。
たとえば

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\c&d\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0&0\\c&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&b\\0&0&d\end{bmatrix}.$$

<u>単位行列</u>　対角成分がすべて 1 、その他の成分がすべて 0 であるような n 次正方行列を E_n と書き単位行列という；

$$\mathrm{E}_n=\begin{bmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{bmatrix}\in\ \mathrm{M}(n\ ;\ \mathbb{C})$$

サイズを明示する必要のないときは E_n は単に E と書かれる。 E はスカラー行列である。逆に任意のスカラー行列は $\alpha\mathrm{E}$ $(\alpha\in\mathbb{C})$ と表せる。一般に

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

とおいてクロネッカーの δ (デルタ) という。 E の (i,j) 成分は δ_{ij} である。

<u>性質</u>　和、積が定義されるとき

$$\left.\begin{array}{ll}(1.9) & (\mathrm{AB})\mathrm{C}=\mathrm{A}(\mathrm{BC})\\ (1.10) & \mathrm{AE}=\mathrm{A}=\mathrm{EA}\end{array}\right\}\text{積の性質}$$
$$\left.\begin{array}{ll}(1.11) & (\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C}=\mathrm{AC}+\mathrm{BC}\\ (1.12) & \mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C})=\mathrm{AB}+\mathrm{AC}\end{array}\right\}\text{和と積の関係}$$
$$(1.13)\quad (\alpha\mathrm{A})\mathrm{B}=\alpha(\mathrm{AB})=\mathrm{A}(\alpha\mathrm{B})\qquad\text{スカラー倍と積の関係}$$

<u>注意</u>　(1.13) より α 倍と $\alpha\mathrm{E}$ 倍は同じであることがわかる。よってスカラー倍は行列の積の特別な場合と考えられる。

<u>例</u>　$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

<u>注意</u>　積 AB が定義されても BA が定義されるとは限らない。また AB, BA が共に定義されても $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$ が成り立つとは限らない。さらに $\mathrm{AB}=0$ であっても $\mathrm{A}=0$ または $\mathrm{B}=0$ となるとは限らない。従って複素数の積の性質 (0.14) 及び (0.15) の類似は行列では成立しない。

<u>例</u>　(i)　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}5&6&7\\8&9&10\end{bmatrix}$ のとき、 AB は定義されるが BA は定義されない。
(ii)　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$ のとき、$\mathrm{AB}=\begin{bmatrix}5+14&6+16\\15+28&18+32\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$, $\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$。よって $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$ となる。
(iii) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{O}$ となる。

例 1.6′　A を n 次正方行列とするとき、
A はスカラー行列 $\Leftrightarrow$ すべての n 次正方行列 B に対して $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ が成り立つ。

証　$\Rightarrow$ ： $\mathrm{A} = \alpha\mathrm{E}$ と書ける。(1.10), (1.13) より $\mathrm{AB} = (\alpha\mathrm{E})\mathrm{B} = \alpha(\mathrm{EB}) = \alpha(\mathrm{BE}) = \mathrm{B}(\alpha\mathrm{E}) = \mathrm{BA}$ 。
$\Leftarrow$：A の (i,j) 成分を a_{ij} とおく。例1.6 よりすべての $i, j (1 \leqq i,\ j \leqq n)$ に対して

$$\begin{array}{c c} & \\ \text{第 } i \text{ 行} & \end{array}\begin{bmatrix} & 0 & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & 0 & \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & a_{1i} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{ni} & \end{bmatrix} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

となる。よって $a_{ii} = a_{jj},\ i \neq j \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0$ がわかる。従って A はスカラー行列となる。

補題 1.1　A を (ℓ, m) 形行列、 B を (m, n) 形行列とする。 $\ell = \ell_1 + \cdots + \ell_r,\ m = m_1 + \cdots + m_s,\ n = n_1 + \cdots + n_t$ とし、これらによって決まる分割により A, B をブロック表示する；

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \overset{m_1}{\longleftrightarrow} \quad \cdots \quad \overset{m_s}{\longleftrightarrow} \\ \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{r1} & \cdots & \mathrm{A}_{rs} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow\ \ell_1 \\ \vdots \\ \updownarrow\ \ell_r \end{array}, \quad \mathrm{B} = \begin{array}{c} \overset{n_1}{\longleftrightarrow} \quad \cdots \quad \overset{n_t}{\longleftrightarrow} \\ \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \cdots & \mathrm{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{B}_{s1} & \cdots & \mathrm{B}_{st} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow\ m_1 \\ \vdots \\ \updownarrow\ m_s \end{array}$$

このとき $\mathrm{C}_{pq} = \displaystyle\sum_{w=1}^{s} \mathrm{A}_{pw}\mathrm{B}_{wq} (1 \leqq p \leqq r,\ 1 \leqq q \leqq t)$ とおけば

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rt} \end{bmatrix}$$

となる。即ち行列を成分とする行列の乗法は通常の数を成分とする行列の乗法と全く同様に実行される。

証明　上の右辺の行列を C とおいて、 $\mathrm{AB} = \mathrm{C}$ を示す。まず A_{pw} は (ℓ_p, m_w) 形、 B_{wq} は (m_w, n_q) 形だから $\mathrm{A}_{pw}\mathrm{B}_{wq}$ は (ℓ_p, n_q) 形、即ち C_{pq} は (ℓ_p, n_q) 形となることに注意する。よって C は (ℓ, n) 形とな

り AB と同じサイズであることがわかる。

任意の (i,j), $1 \leqq i \leqq \ell$, $1 \leqq j \leqq n$ をとれば、 $i = \ell_1 + \cdots + \ell_{p-1} + u$, $j = n_1 + \cdots + n_{q-1} + v$ となる p, u, q, v が存在する。このとき C の (i,j) 成分は C_{pq} の (u,v) 成分に等しい。

$\mathrm{A}_{pw}\mathrm{B}_{wq}$ の (u,v) 成分は $\displaystyle\sum_{k=m_1+\cdots+m_{w-1}+1}^{m_1+\cdots+m_{w-1}+m_w} a_{ik}b_{kj}$ であるから c_{pq} の (u,v) 成分は $\displaystyle\sum_{w=1}^{s}\sum_{k=m_1+\cdots+m_{w-1}+1}^{m_1+\cdots+m_{w-1}+m_w} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ となる。これは AB の (i,j) 成分に等しい。従って $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ がわかる。

証明終

<u>例 1.2′</u> (ℓ, m) 形行列 A の行ベクトルによる分割を $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix}$ とし、 (m,n) 形行列 B の列ベクトルによる分割を $\mathrm{B} = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n]$ とする。ここで $\mathbf{a}_i \in {}^t\mathbb{C}^m$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$, $\mathbf{b}_j \in \mathbb{C}^m$ $(1 \leqq j \leqq n)$ である。このとき

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_\ell\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_\ell\mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathrm{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_\ell\mathrm{B} \end{bmatrix} = [\mathrm{A}\mathbf{b}_1 \cdots \mathrm{A}\mathbf{b}_n]$$

となる。また $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathrm{B}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$$

となる。

<u>例 1.7</u> $\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{22} \\ \mathrm{A}_{21}\mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{21}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{22} \end{bmatrix}$
となる。特に

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ 0 & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{11} & \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{22} \\ 0 & \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{22} \end{bmatrix}$$

となる。これより

(1.14) A, B が上半３角行列 $\Rightarrow$ AB も上半３角行列

がわかる。さらに

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{22} \end{bmatrix}$$ も成り立つ。

たとえば

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}[5] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$ となる。

$(1.17)'$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{bmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{AB} = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\beta_n \end{bmatrix}$$

となる。

<u>例 1.4′</u> A を (ℓ, m) 形行列、B を (m, n) 形行列とするとき、${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$ 。

<u>証明</u> AB は (ℓ, n) 形だから ${}^t(\mathrm{AB})$ は (n, ℓ) 形。一方 ${}^t\mathrm{B}$ は (n, m) 形かつ ${}^t\mathrm{A}$ は (m, ℓ) 形だから ${}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$ は (n, ℓ) 形。よってこれらのサイズは等しい。${}^t\mathrm{A}$ の (k, j) 成分を a'_{kj}, ${}^t\mathrm{B}$ の (i, k) 成分を b'_{ik} とすれば $a'_{kj} = a_{jk},\ b'_{ik} = b_{ki}$ となる。よって ${}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$ の (i, j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} b'_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki}$ でこれは AB の (j, i) 成分、即ち ${}^t(\mathrm{AB})$ の (i, j) 成分に等しい。

証明終

<u>例 1.5′</u> A, B を n 次正方行列とする。
(i) $tr(\mathrm{AB}) = tr\mathrm{A} \cdot tr\mathrm{B}$ は一般には成り立たない。
(ii) $tr(\mathrm{AB}) = tr(\mathrm{BA})$ は成り立つ。

<u>証明</u> (i) $n \geqq 2,\ \mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{E}$ のとき $tr(\mathrm{AB}) = tr(\mathrm{E}) = n,\ tr\mathrm{A} \cdot tr\mathrm{B} = n^2$ となるから $tr(\mathrm{AB}) \neq tr\mathrm{A} \cdot tr\mathrm{B}$ である。
(ii) AB の (i, i) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$ 、BA の (j, j) 成分は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$ であるから $\displaystyle tr(\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right) = tr(\mathrm{BA})$ となる。

証明終

<u>問題</u> $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{E}$ となる正方行列 A, B は存在しないことを示せ。

解答　存在すると仮定して両辺のトレースをとれば例 1.5 より $0 = tr(\mathrm{AB}-\mathrm{BA}) = tr\mathrm{E} = n$ となり矛盾する。

解答終

累乗　A が正方行列ならば積 AA も正方行列である。 $\mathrm{A}^2 = \mathrm{AA}$ と書く。同様に A の n 個の積 A^n が定義される。このとき、 $m, n \geqq 1$ に対して

$$(1.15) \qquad \mathrm{A}^{m+n} = \mathrm{A}^m\mathrm{A}^n\ ,\ \mathrm{A}^{mn} = (\mathrm{A}^m)^n \qquad \text{（指数法則）}$$

が成り立つ。

例　正方行列 A, B に対し $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ が成り立てば、任意の $n \geqq 1$ に対して $(\mathrm{AB})^n = \mathrm{A}^n\mathrm{B}^n\ ,\ (\mathrm{A}+\mathrm{B})^n = \sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \mathrm{A}^r\mathrm{B}^{n-r}$ （２項定理）が成り立つ。

例 1.8　A が n 次の上半３角行列で対角成分がすべて 0 ならば $\mathrm{A}^n = 0$ となる；

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C}) \ \Rightarrow\ \mathrm{A}^n = 0$$

証明　A^ℓ の (i,j) 成分を $a_{ij}^{(\ell)}$ とおく $(\ell = 1,2,3,\cdots,n)$ 。 (1.14) より A^ℓ は上半３角行列となるから「 $i > j \ \Rightarrow\ a_{ij}^{(\ell)} = 0$ 」となる。仮定より $a_{ii}^{(1)} = 0$ が成り立つ。

$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ であるから、$a_{ii}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki+1} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki+1} = 0$, $a_{ii+1}^{(2)} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}a_{ki+1} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki+1} = 0$ を得る。同様に $a_{ii}^{(3)} = a_{ii+1}^{(3)} = a_{ii+2}^{(3)} = 0$ を得る。あとはこれをくり返して $a_{ij}^{(n)} = 0$ 、即ち $\mathrm{A}^n = 0$ がわかる。

証明終

<u>注意</u>　この証明はつまり

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ \mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\cdots,\ \mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ということを示している。