第１章

この章では行列を定義しその基本的な性質を述べる。行列の加法、減法、乗法を定義し除法の可能性をさぐる。また行列を写像とみるみかたを説明する。

1.1　定義と例

定義　m, n を 1 以上の整数とする。mn 個の複素数 $a_{ij}(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ により

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と表されるものを行列という。より詳しくは m 行 n 列の行列あるいは (m, n) 形行列という。上から i 番目にある n 個の数

$$a_{i1} \ \cdots \ a_{in}$$

を A の第 i 行といい、左から j 番目にある m 個の数

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

を A の第 j 列という $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ 。また第 i 行第 j 列にある数 a_{ij} を A の (i, j) 成分といい、(m, n) を A のサイズという。
(m, n) 形行列

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と (p, q) 形行列

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

は、$m = p,\ n = q$ かつすべての $i = 1, \cdots, m = p, j = 1, \cdots, n = q$ に対して $a_{ij} = b_{ij}$ となるとき等しいといわれ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ と表される。即ち $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ とは A, B のサイズが等しく、対応する成分がすべて等しいときをいう。

(m, n) 形行列の全体を $\mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{C})$ と書く。$(1, 1)$ 形行列は数と同一視する。即ち $[a] = a$ と書いて $\mathrm{M}(1, 1\ ;\ \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ と考える。すべての成分が実数であるような (m, n) 形行列を実行列といい、その全体を $\mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{R})$ で表す。同様に $\mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{Q})$ や $\mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{Z})$ も定義され

る。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $(2,2)$ 形行列である。 A の $(1,1)$ 成分は a、$(1,2)$ 成分は b、$(2,1)$ 成分は c、$(2,2)$ 成分は d である。

<u>問</u>　上の行列の第１行は何か。第２列は何か。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & d \end{bmatrix}, \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 3 & b \\ c & 5 \end{bmatrix}$ のとき、 $\mathrm{A}=\mathrm{B} \Leftrightarrow a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=5$ 。
また $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ のとき、どのような a_{ij}, b_{kl} に対しても $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ である。

<u>転置</u>　(m,n) 形行列 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ に対して ${}^t\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & a_{ji} & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ とおき、 A の転置行列という。
${}^t\mathrm{A}$ は (n,m) 形行列で、 A の行と列とを取りかえたものである。転置行列を考えることにより、行に関する事柄を列に関する事柄に、また列に関する性質を行に関する性質に変えることができる。${}^t({}^t\mathrm{A})=\mathrm{A}$ にも注目する。転置をとる操作は

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}(m,n\ ;\ \mathbb{C}) & \to & \mathrm{M}(n,m\ ;\ \mathbb{C}) \\ \Cup & & \Cup \\ \mathrm{A} & \mapsto & {}^t\mathrm{A} \end{array}$$

という写像を定義する。これは全単射である。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ならば ${}^t\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ である。

<u>分割</u>（ブロック表示）　(m,n) 形行列 A を $s-1$ 本の横線と $t-1$ 本の縦線とによって st 個の行列に分割する。上から p 番目左から q 番目の行列を $\mathrm{A}_{pq}(1 \leqq p \leqq s,\ 1 \leqq q \leqq t)$ とおき、

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{s1} & \cdots & \mathrm{A}_{st} \end{bmatrix}$$

と表す。これを A のブロック表示という。従って A は行列 A_{pq} を成分とする行列を考えることもできる。 A_{pq} が (m_p, n_q) 形行列であれ

ば $m = m_1 + \cdots + m_s,\ n = n_1 + \cdots + n_t$ となる。逆にこのような $(m_1, \cdots, m_s), (n_1, \cdots, n_t)$ が与えられれば (m, n) 形行列がブロック表示される。

例　$(3,4)$ 形行列　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ に対し、$s = 2, t = 2$ として $\mathrm{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right]$ と分割する。

$$\mathrm{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{22} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}$$

とおけば　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$ と表せる。ここで $m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ n_1 = 3,\ n_2 = 1$ である。

問　上記行列 A を $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1$ に関してブロック表示せよ。

解　$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right]$ より

$$\mathrm{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{13} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}_{21} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{23} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

とおけば $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \end{bmatrix}$ となる。

例 1.1　${}^t\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{A}_{11} & {}^t\mathrm{A}_{12} \\ {}^t\mathrm{A}_{21} & {}^t\mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$

行列のブロック表示は行列に関する議論をより小さい行列に関する議論に帰着させるときに役立つ。特に第 3 節で行列の積を定義するが、ブロック表示は積の計算に関連して役に立つことが多い（補題 1.1、補題 1.4 などを参照のこと）。

次に後々必要となる特別な形の行列をいくつかとりあげる。

縦ベクトル（列ベクトル）　$(m, 1)$ 形の行列を m 項縦ベクトルあるいは m 項列ベクトルという。m 項縦ベクトル $\mathbf{x}$ は

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\ ;\ x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{C}$$

と表せる。この全体を $\mathbb{C}^m$ で表す ； $\mathbb{C}^m = \mathrm{M}(m, 1\ ;\ \mathbb{C})$ 。同様に $\mathbb{R}^m,\ \mathbb{Q}^m,\ \mathbb{Z}^m$ なども定義される。

注意　第０章第２節では $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ と考えたが、以下では $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$ と考える。

横ベクトル（行ベクトル）　$(1,n)$ 形の行列を n 項横ベクトルあるいは n 項行ベクトルという。n 項横ベクトル $\mathbf{y}$ は

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}\ ;\ y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{C}$$

と表せる。 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ に対して $\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}$ と書けるので、 n 項横ベクトルの全体を ${}^t\mathbb{C}^n$ で表す； ${}^t\mathbb{C}^n = \mathrm{M}(1, n\ ;\ \mathbb{C})$ 。同様に ${}^t\mathbb{R}^n,\ {}^t\mathbb{Q}^n,\ {}^t\mathbb{Z}^n$ なども定義される。

例 1.2　(m,n) 形行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ の第 j 列をとって $\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m\ (1 \leqq j \leqq n)$ とおくと $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ と表せる。これを A の列ベクトルによる分割という。同様に A の第 i 行をとって $\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \in {}^t\mathbb{C}^n\ (1 \leqq i \leqq m)$ とおくと $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix}$ と表せる。これを A の行ベクトルによる分割という。

正方行列　(n,n) 形行列を n 次正方行列といいその全体を $\mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ で表す； $\mathrm{M}(n;\mathbb{C}) = \mathrm{M}(n,n;\mathbb{C})$ 。同様に $\mathrm{M}(n;\mathbb{R}), \mathrm{M}(n;\mathbb{Q}), \mathrm{M}(n;\mathbb{Z})$ なども定義される。

例　行列 A が ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$ をみたすとき対称行列という。対称行列は正方行列である。特に $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき、 A は対称行列 $\Leftrightarrow b = c$ 。$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ は対称行列であり、$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ は対称行列ではない。

<u>３角行列と対角行列</u>　n 次正方行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ に対して $a_{ii}(1 \leqq i \leqq n)$ を A の対角成分という。
「$i > j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0$」となるとき A を上半３角行列といい、「$i < j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0$」となるとき下半３角行列という。上半３角行列であるかまたは下半３角行列であるものを単に３角行列という。上半３角行列でありかつ下半３角行列であるものを対角行列という。対角行列とは即ち対角成分以外がすべて 0 であるような正方行列である。対角成分がすべて等しい対角行列をスカラー行列という。スカラー行列は $\begin{bmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{bmatrix}$ $(a \in \mathbb{C})$ と書ける。

<u>性質</u>　(i)　スカラー行列 $\Rightarrow$ 対角行列 $\Rightarrow$ ３角行列 $\Rightarrow$ 正方行列。
(ii)　A は上半３角行列 $\Leftrightarrow$ ${}^t\mathrm{A}$ は下半３角行列。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ は上半３角行列で、対角成分は $1, 4, 6$ である。
$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ は対角行列であるがスカラー行列ではない。対角成分は $1, 2, 3$ である。

正方行列に対する分割は $s = t$ かつ $m_1 = n_1, \cdots, m_s = n_t$ となるものが重要である。このようなものを対称分割という。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$ は対称分割であり、$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$ は対称分割ではない。

<u>トレース</u>　正方行列 A の対角成分の和を A の固有和またはトレースといい、$tr\mathrm{A}$ で表す。即ち、

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ のとき } tr\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

これにより写像 $tr : \mathrm{M}(n\,;\,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ が定義されたことになる。$tr({}^t\mathrm{A}) = tr\mathrm{A}$ が成り立つ。

<u>例</u>　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ のとき、$tr\mathrm{A} = 1 + 5 + 9 = 15$ となる。

例　$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対角分割とするとき、$tr A = tr A_{11} + tr A_{22}$ となる。