第０章　複素数

0.1　代数的性質

<u>導入</u>　実数の範囲において１次方程式は常に解ける。実際

$$ax+b=0 \iff x=-\frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

２次方程式については公式：

$$ax^2+bx+c=0 \iff x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a \neq 0)$$

があるが、 $b^2-4ac<0$ となることがあるから実数の範囲で常に解けるとはいえない。２乗して -1 になる実数が存在しないというのがその理由である。

<u>定義</u>　２乗して -1 となる新しい数を導入し、これを $\sqrt{-1}$ または i で表す。実数 a, b を用いて

$$a+ib \text{ (これを } a+bi \text{ と書くこともある； } a+ib=a+bi)$$

と表される数を複素数という。ここで

$$a+ib=c+id \iff a=c \text{ かつ } b=d \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$$

により複素数の相等を定義する。複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く；

$$\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

これも集合となる。

複素数を $\alpha=a+ib$ と書くとき、 $a=\Re\alpha$ とおき α の実数部分（実部）という。また $b=\Im\alpha$ とおき α の虚数部分（虚部）という。$\alpha=a+ib$ で $b=0$ となるもの、即ち $\alpha=a+i0$ を実数 a と同一視して $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ と考える； $\mathbb{R}=\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \Im\alpha=0\}$ 。

<u>和と積</u>　複素数 $\alpha=a+ib, \beta=c+id$ に対して

$$\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$$

により α と β の和を、

$$\alpha\beta=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

により α と β の積を定義する。このとき $i^2=-1$ となることに注意する。また $(-1)\beta=-c+i(-d)$ となるが、これを $-\beta=-c-id$ と書く。従って $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a-c)+i(b-d)$ により差を定義される。商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ についてはもう少しあとで考える。

<u>複素共役</u>　$\alpha = a + ib$ に対し $\overline{\alpha} = a - ib$ とおき α の共役（複素数）という。

<u>性質</u>　$\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta},\ \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta},\ \overline{\overline{\alpha}} = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \alpha = \overline{\alpha},$
$\Re\alpha = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2},\ \Im\alpha = \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}.$

<u>絶対値</u>　$\alpha = a + ib$ に対し $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおき α の絶対値という。明らかに $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha},\ |\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = |\overline{\alpha}|$ が成り立つ。

<u>性質</u>　$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|,\ |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|,\ \alpha = 0 \ \Leftrightarrow\ |\alpha| = 0$
よって $\beta \neq 0$ ならば $\beta \cdot \dfrac{\overline{\beta}}{|\beta|^2} = 1,$ 即ち $\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\overline{\beta}}{|\beta|^2}$ となる。いいかえると

$$\beta = c + id \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\beta} = \frac{c}{c^2 + d^2} + i\frac{-d}{c^2 + d^2} \ \in\ \mathbb{C}.$$

従って $\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \dfrac{1}{\beta}$ により商（ 0 で割ることは除く）も定義される。

以上により複素数の全体 $\mathbb{C}$ において、加減乗除の 4 則が自由にできることが示された。複素数の 4 則演算は i を文字だと思って計算し、i^2 が出て来たら -1 を代入すればよい。

<u>例</u>　$\alpha = -2 + 3i,\ \beta = 1 + i$ のとき、
$\alpha + \beta = (-2 + 1) + (3 + 1)i = -1 + 4i$,
$\alpha - \beta = (-2 - 1) + (3 - 1)i = -3 + 2i$,
$\alpha\beta = -2 + 3i^2 + (-2 + 3)i = -5 + i$,
$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{(-2 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{(-2 + 3) + (3 + 2)i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$
複素数の 4 則演算に関して次が成り立つ；$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対して

$$\left.\begin{array}{ll} (0.1) & (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \\ (0.2) & \alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha \\ (0.3) & (-\alpha) + \alpha = 0 = \alpha + (-\alpha) \\ (0.4) & \alpha + \beta = \beta + \alpha \end{array}\right\} \text{和の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (0.9) & (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \\ (0.10) & \alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha \end{array}\right\} \text{積の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (0.11) & (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \\ (0.12) & \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \end{array}\right\} \text{和と積の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (0.14) & \alpha\beta = \beta\alpha \\ (0.15) & \alpha \neq 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\alpha}\alpha = 1 = \alpha\dfrac{1}{\alpha} \end{array}\right\} \text{積の性質}$$

注意　番号のとびは無視する。また (0.14), (0.15) を最後に書いた理由は第１章で明らかになる。