

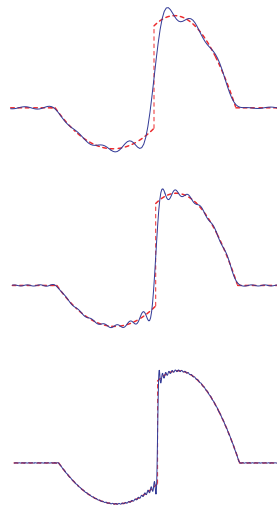


高知工科大学

Kochi University of Technology

# 「数学 8」

(フーリエ解析)



2011年度版

内容

- ◎ フーリエ級数
- ◎ フーリエ変換
- ◎ ラプラス変換

井上 昌昭 著

## &lt; 周期関数 &gt;

関数  $f(t)$  が周期関数であるとは、ある正定数  $p$  が存在してすべての実数  $t$  に対し  $f(t+p) = f(t)$  が成立するときをいう。このとき  $p$  を  $f(t)$  の周期という。

例 自然数  $n$  と定数  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  に対し、関数

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \text{ を三角多項式という。}$$

この関数は  $f(t+2\pi) = f(t)$  を満たすので、 $f(t)$  は周期  $2\pi$  の周期関数である。

補題

$p$  を正数とする。 $f(t)$  が周期  $p$  の周期関数のとき、任意の実数  $a$  に対し、

$$\int_a^{a+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt$$

が成り立つ。

[証明]  $np \leq a < (n+1)p$  ( $n$  は整数) のとき  $a = np + a'$  ( $0 \leq a' < p$ ) とおく。

$$\begin{aligned} \int_a^{a+p} f(t) dt &= \int_{np+a'}^{(n+1)p+a'} f(t) dt \\ &= \int_{a'}^{p+a'} f(s+np) ds = \int_{a'}^{p+a'} f(s) ds \\ &= \int_{a'}^p f(s) ds + \int_p^{p+a'} f(s) ds \\ &= \int_{a'}^p f(s) ds + \int_0^{a'} f(\tau+p) d\tau = \int_{a'}^p f(\tau) d\tau + \int_0^{a'} f(\tau) d\tau \\ &= \int_0^p f(\tau) d\tau \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

(注)  $f(t)$  が周期  $2\pi$  の周期関数のとき、任意の実数  $b$  に対し

$$\int_{-\pi+b}^{\pi+b} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

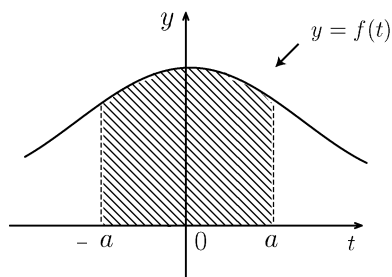
が成り立つ。

< 偶関数と奇関数 >

関数  $f(t)$  が  $f(-t) = f(t)$  を満たすとき、**偶関数**という。

例  $f(t) = K$  (定数),  $f(t) = t^{2n}$  ( $n$  は整数),

$f(t) = \cos t$ ,  $f(t) = \sin^2 t$  などは偶関数である。



◎  $f(t)$  が偶関数のとき、任意の正定数  $a$  に対し、

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

が成立する。

(証明)  $\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-s)(-1)ds$  ( $t = -s$ )  
 $= - \int_a^0 f(s)ds = \int_0^a f(s)ds$  よりわかる。 (証明終)

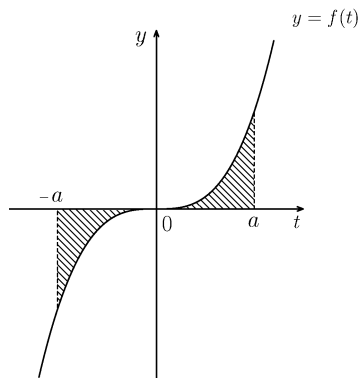
関数  $f(t)$  が  $f(-t) = -f(t)$  を満たすとき、**奇関数**という。

例  $f(t) = t^{2n-1}$  ( $n$  は整数),  $f(t) = \sin t$ ,  $f(t) = \tan t$ ,  
 などは奇関数である。

◎  $f(t)$  が奇関数のとき、任意の正定数  $a$  に対し、

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0$$

が成立する。



(証明)  $\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-s)(-1)ds = - \int_0^a f(s)ds$  よりわかる。 (証明終)

次の性質がある。

- ① 偶関数 × 偶関数 = 偶関数
- ② 奇関数 × 奇関数 = 偶関数
- ③ 偶関数 × 奇関数 = 奇関数
- ④ 偶関数 + 偶関数 = 偶関数
- ⑤ 奇関数 + 奇関数 = 奇関数

(注 1) 任意の関数  $f(t)$  にたいして、 $f(t) = g(t) + h(t)$  を満たす偶関数  $g(t)$  と奇関数  $h(t)$  が存在する。

(注 2) 偶関数かつ奇関数である関数は  $f(t) = 0$  (恒等的にゼロ) だけである。

< 区分的に連続な関数 >

$\{t : a \leq t \leq b\}$  を  $[a, b]$  と略記する。

[定義1] 関数  $f(t)$  が次の条件①, ②を満たすとき、区間  $[a, b]$  で**区分的に連続**であるという。

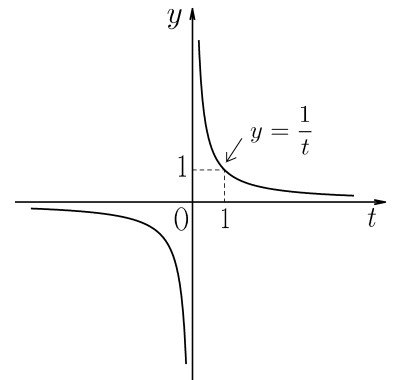
- ①  $[a, b]$  に属する有限個の点  $t_1, t_2, \dots, t_n$  を除いたところで  $f(t)$  は連続である。
- ② 各不連続点  $t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) で  $f(t)$  の左側極限と右側極限が存在し、有限の値である。  
 $a < t_k < b$  のとき

$$f(t_k - 0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(t_k - h) \quad , \quad f(t_k + 0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(t_k + h)$$

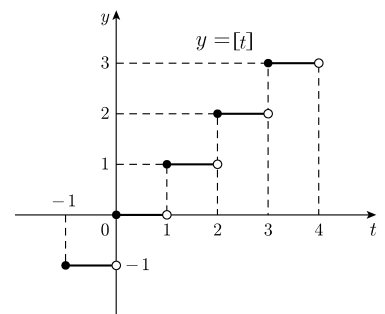
が存在し、有限の値である。 $t_k = a$  のときは右側極限  $f(t_k + 0)$  が存在し、有限の値である。 $t_k = b$  のときは左側極限  $f(t_k - 0)$  が存在し、有限の値である。

例1  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & : t \neq 0 \\ 0 & : t = 0 \end{cases}$  の場合

$f(0+0) = +\infty$  であるから  
 区間  $[0, 1]$  で区分的に連続ではない。



例2  $f(t) = [t]$  :  $t$  を超えない最大整数  
 の場合は不連続点は  $t = k$  ( $k$  は整数)  
 の場合だけである。 $f(t)$  は任意有限区間  
 で区分的に連続である。 $t = k$  (整数) のときは  
 $f(k - 0) = k - 1$  ,  $f(k + 0) = k$  である。



[定義2]  $f(t)$  が周期  $2p$  ( $p > 0$ ) の周期関数とする。この関数が区間  $[-p, p]$  で区分的に連続であるとき、単に**区分的に連続**であるという。

< 区分的に連続な関数の積分 >

定数  $a, b$  ( $a < b$ ) に対し、

$$\{t : t \in \mathbb{R}, a < t < b\} = (a, b), \quad \{t : t \in \mathbb{R}, a \leq t \leq b\} = [a, b]$$

と略記する。

定理

$[a, b]$  で積分可能な関数  $f(t)$  と  $g(t)$  が有限個の点  $s_1, s_2, \dots, s_m$  ( $a \leq s_i \leq b$ ) を除いて一致していれば

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$$

である。

(証明)  $[a, b]$  の分割  $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  に対し、 $f(t) - g(t)$  のリーマン和を

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) - g(\xi_k))(t_k - t_{k-1}) \quad (t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k),$$

分割の最大幅を  $|\Delta| = \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq n\}$  とおくと、

$t = s_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 以外では  $f(t) - g(t) = 0$  だから

$$|S_\Delta| \leq \sum_{i=1}^m |f(s_i) - g(s_i)| \cdot |\Delta|$$

より  $\int_a^b \{f(t) - g(t)\}dt = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta = 0$

よって  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$  が成り立つ。(証明終)

系

$[a, b]$  で定義された区分的に連続な関数  $f(t)$  と  $g(t)$  が有限個の点を除いて一致していれば

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$$

である。

(証明) 区分的に連続な関数は積分可能 (証明は [P.76](#)) であるから、定理より系が従う。(証明終)

## &lt; 準偶関数と準奇関数 &gt;

## 定理 1

正定数  $a$  に対し、区間  $[-a, a]$  で区分的に連続な関数  $f(t)$  が  $\pm t_1, \pm t_2, \dots, \pm t_n$  ( $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq a$ ) 以外で連続であり、その範囲で  $f(-t) = f(t)$  が成り立つとする。このとき

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad \text{が成り立つ。}$$

(注 1) 定理 1 の条件を満たす関数  $f(t)$  を  $[-a, a]$  で **準偶関数** ということにする。

$$\text{(証明)} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{f(t-0) + f(t+0)\} & : -a < t < a \\ 0 & : t = \pm a \end{cases} \quad \text{とおくと}$$

$t \neq \pm a, \pm t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) のとき  $g(-t) = f(-t) = f(t) = g(t)$  であり

$$\begin{aligned} g(-t_k) &= \frac{1}{2}\{f(-t_k-0) + f(-t_k+0)\} = \lim_{h>0} \frac{1}{2}\{f(-t_k-h) + f(-t_k+h)\} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{2}\{f(t_k+h) + f(t_k-h)\} = \frac{1}{2}\{f(t_k+0) + f(t_k-0)\} = g(t_k) \end{aligned}$$

$g(-a) = 0 = g(a)$  より  $g(-t) = g(t)$  が  $-a \leq t \leq a$  で成り立つ。

$f(t)$  と  $g(t)$  は  $t = \pm a, \pm t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 以外で一致しているから、

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^a g(t) dt = 2 \int_0^a g(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad \text{(証明終)}$$

## 定理 2

正定数  $a$  に対し、区間  $[-a, a]$  で区分的に連続な関数  $f(t)$  が  $\pm t_1, \pm t_2, \dots, \pm t_n$  ( $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq a$ ) 以外で連続であり、その範囲で  $f(-t) = -f(t)$  が成り立つとする。このとき

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0 \quad \text{が成り立つ。}$$

(注 2) 定理 2 の条件を満たす関数  $f(t)$  を  $[-a, a]$  で **準奇関数** ということにする。

$$\text{(証明)} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{f(t-0) + f(t+0)\} & : -a < t < a \\ 0 & : t = \pm a \end{cases} \quad \text{とおくと}$$

$g(-t) = -g(t)$  が  $-a \leq t \leq a$  で成り立つ。 $f(t)$  と  $g(t)$  は有限個の点を除いて一致しているから

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^a g(t) dt = 0 \quad \text{(証明終)}$$

< 三角関数の積分 >

三角関数の積分は半角の公式や積和公式を使って  $\sin(nt)$  や  $\cos(nt)$  の形にしてから積分する。

① 半角の公式 
$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

② 積和公式 
$$\begin{aligned} \sin\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \\ \cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \\ \sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \} \end{aligned}$$

例 1 (1) 
$$\int_0^\pi \cos^2(3t)dt = \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6t) \right\} dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{1}{12} \sin(6t) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

(2) 
$$\int_{-\pi}^\pi \sin(2t) \cos t dt = \int_{-\pi}^\pi \left\{ \frac{1}{2} \sin(3t) + \frac{1}{2} \sin t \right\} dt = \left[ -\frac{1}{6} \cos(3t) - \frac{1}{2} \cos t \right]_{-\pi}^\pi = 0$$

例 2 自然数  $m, n (m \neq n)$  に対し、次式が成立する。

① $\int_{-\pi}^\pi \cos^2(nt)dt = \pi$	② $\int_{-\pi}^\pi \sin^2(nt)dt = \pi$
③ $\int_{-\pi}^\pi \cos(nt) \cos(mt)dt = 0$	④ $\int_{-\pi}^\pi \cos(nt) \sin(nt)dt = 0$
⑤ $\int_{-\pi}^\pi \cos(nt) \sin(mt)dt = 0$	⑥ $\int_{-\pi}^\pi \sin(nt) \sin(mt)dt = 0$
⑦ $\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)dt = 0$	⑧ $\int_{-\pi}^\pi \sin(nt)dt = 0$
⑨ $\int_{-\pi}^\pi 1dt = 2\pi$	

この①～⑨は区間  $[-\pi, \pi]$  を定義域とする関数  $f(t)$  の集合を線形空間と考えたとき、

内積  $(f, g) = \int_{-\pi}^\pi f(t)g(t)dt$  に関し  $\{1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(nt), \sin(nt), \dots\}$

が互いに直交 ( $f \neq g$  ならば  $(f, g) = 0$ ) することを意味する。

## &lt; 三角多項式の係数 &gt;

例 自然数  $n$  と定数  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  に対し, 関数

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^n \{a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)\}$$

を三角多項式という。

$1 \leq k \leq n$  なる自然数  $k$  に対し, 前ページの結果より

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)) \right\} \cos(kt) dt \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt + \sum_{j=1}^n \left\{ a_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) \cos(kt) dt + b_j \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jt) \cos(kt) dt \right\} \\ &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt) dt = \pi a_k \end{aligned}$$

問 例の  $f(t)$  と自然数  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) に対し, 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

< フーリエ級数 1 >

三角多項式

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^n \{a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)\}$$

は周期  $2\pi$  の周期関数である。前ページの結果より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 2\pi a_0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \pi a_k, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \pi b_k$$

( $1 \leq k \leq n$ ) だから、各係数は

$$(*) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

と表される。

フランスの数学者 J.B.J.Fourier(1768~1830) は任意の周期  $2\pi$  の周期関数が三角多項式の極限として表されることを信じた。

一般の周期  $2\pi$  の周期関数  $f(t)$  に対し、(\*) で定められた係数  $a_0, a_k, b_k$  をとるとき、無限級数

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \cdots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \end{aligned}$$

は  $f(t)$  を近似していると考え、

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

と書き、発見者の名前をつけて  $f(t)$  のフーリエ級数 (Fourier series) という。また  $a_0, a_k, b_k$  ( $1 \leq k$ ) をフーリエ係数という。

例  $f(t)$  が偶関数のときは  $f(t) \cos(kt)$  は偶関数であり、 $f(t) \sin(kt)$  は奇関数だから

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0 \end{aligned} \quad \text{である。}$$

よって偶関数  $f(t)$  のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) \quad \left( a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \right)$$

となる

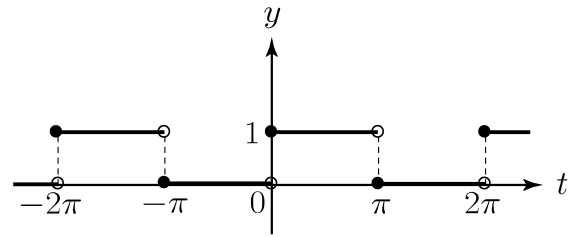
問  $f(t)$  が奇関数の場合にフーリエ級数とフーリエ係数を求めよ。

< フーリエ級数 2 >

例  $f(t)$  が図 1 のような周期関数の場合のフーリエ級数を求めたい。

$-\pi \leq t \leq \pi$  の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : t = \pi \\ 1 & : 0 \leq t < \pi \\ 0 & : -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$



(図1)

である。 $f(t)$  は区分的に連続だからフーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 f(t) dt + \int_0^{\pi} f(t) dt \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dt = \frac{1}{2\pi} [t]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{k} \sin(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

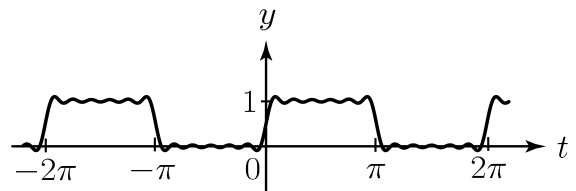
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{k} \cos(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{k} \cos(k\pi) + \frac{1}{k} \cos(0) \right) = \frac{1}{\pi k} \{-\cos(k\pi) + 1\} = \begin{cases} 0 & : k \text{ が偶数} \\ \frac{2}{k\pi} & : k \text{ が奇数} \end{cases}$$

である。フーリエ級数は

$$\begin{aligned} f(t) &\sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t + \frac{2}{3\pi} \sin(3t) + \frac{2}{5\pi} \sin(5t) + \frac{2}{7\pi} \sin(7t) + \frac{2}{9\pi} \sin(9t) + \frac{2}{11\pi} \sin(11t) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \sin t + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \frac{1}{7} \sin(7t) + \frac{1}{9} \sin(9t) + \frac{1}{11} \sin(11t) + \dots \right\} \end{aligned}$$

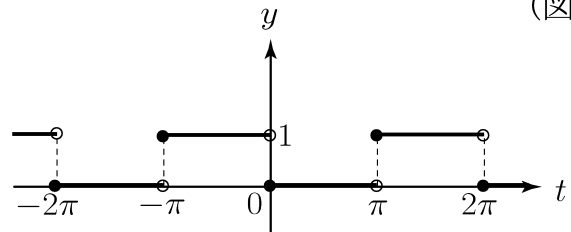
となる。右図 (図 2) はこのフーリエ級数の  $k = 11$  までの部分和のグラフである。



(図2)

問  $f(t)$  は周期  $2\pi$  の周期関数で

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : t = \pi \\ 0 & : 0 \leq t < \pi \\ 1 & : -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$



(図3)

のとき、 $f(t)$  のフーリエ級数を求めよ。

< フーリエ級数 3 >

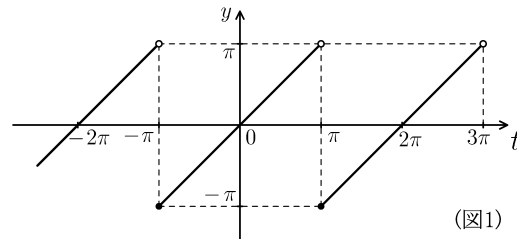
例  $f(t)$  が周期  $2\pi$  の周期関数で

$-\pi \leq t < \pi$  のとき  $f(t) = t$ ,

$f(\pi) = -\pi$  の場合,  $f(t)$  は準

奇関数 (P.5) であるから, 奇関数

と考えて積分してよい。



(図1)

8 ページの結果より奇関数の場合, フーリエ係数は

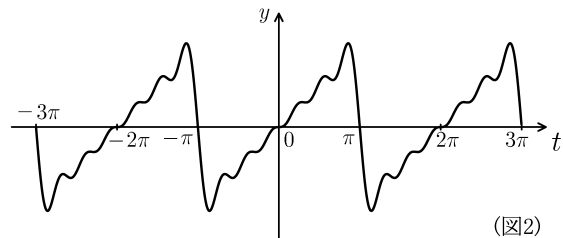
$$a_0 = 0 \quad , \quad a_k = 0 \quad (k \geq 1), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(kt) dt$$

となり, 部分積分法より

$$\int_0^{\pi} t \sin(kt) dt = \left[ t \frac{-\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(kt)}{k} dt = -\frac{\pi}{k} \cos(k\pi)$$

であるから

$$b_k = -\frac{2}{k} \cos(k\pi) = \begin{cases} \frac{2}{k} & : k \text{ が奇数} \\ -\frac{2}{k} & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$



(図2)

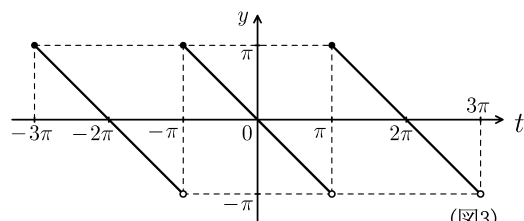
となり, フーリエ級数は

$$\begin{aligned} f(t) &\sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \} \\ &= \frac{2}{1} \sin t - \frac{2}{2} \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(3t) - \frac{2}{4} \sin(4t) + \frac{2}{5} \sin(5t) - \frac{2}{6} \sin(6t) + \dots \\ &= 2 \left\{ \sin t - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \frac{1}{4} \sin(4t) + \frac{1}{5} \sin(5t) - \frac{1}{6} \sin(6t) + \dots \right\} \end{aligned}$$

となる。図 2 のグラフはこのフーリエ級数の  $k = 6$  までの部分和のグラフである。

問  $f(t)$  が図 3 の周期関数であるとき,

$f(t)$  のフーリエ級数を求めよ。



(図3)

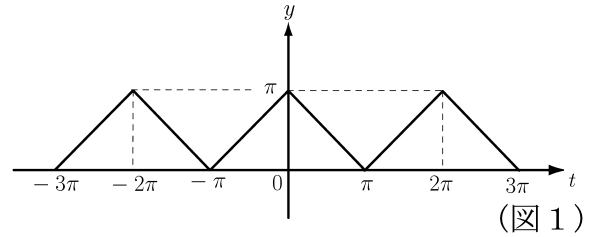
## &lt; フーリエ級数 4 &gt;

例  $f(t)$  が図 1 のような周期関数

のとき  $-\pi \leq t \leq \pi$  の範囲では

$$f(t) = \pi - |t|$$

であり,  $f(t)$  は偶関数である。



8 ページの例から偶関数の場合のフーリエ係数は

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \pi t - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ (\pi - t) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-1) \frac{\sin(kt)}{k} dt \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ 0 - 0 + \int_0^\pi \frac{\sin(kt)}{k} dt \right\} = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{\cos(k\pi)}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2} \right\} = \frac{2}{\pi k^2} \{-\cos(k\pi) + 1\} = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi} & : k \text{ が奇数} \\ 0 & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$

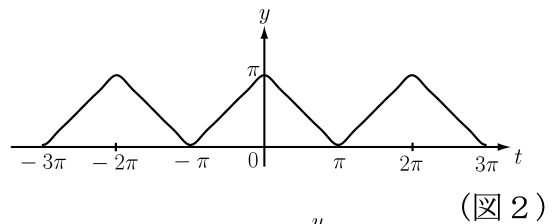
となる。よって  $f(t)$  のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left\{ \cos t + \frac{1}{9} \cos(3t) + \frac{1}{25} \cos(5t) + \frac{1}{49} \cos(7t) + \dots \right\}$$

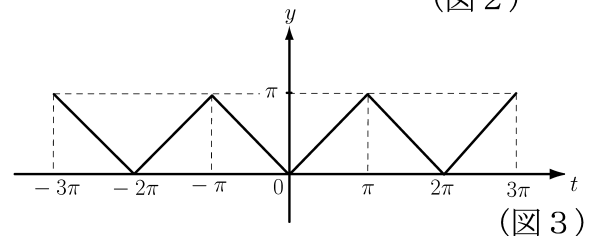
となる。

図 2 のグラフはこのフーリエ級数の  $k = 7$  までの部分和のグラフである。



問  $f(t)$  が図 3 の周期関数であるとき,

$f(t)$  のフーリエ級数を求めよ。



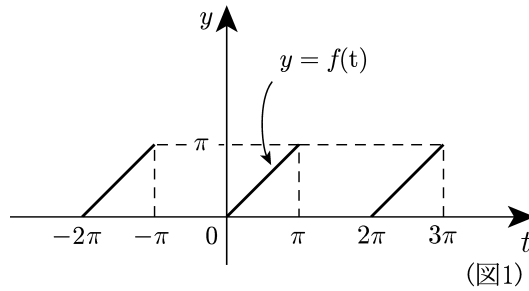
< フーリエ級数 5 >

例  $f(t)$  が図 1 のような周期関数のとき

$-\pi < t < \pi$  の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} t : 0 \leq t < \pi \\ 0 : -\pi < t < 0 \end{cases}$$

となるのでフーリエ係数は



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt = \frac{\cos(k\pi) - 1}{\pi k^2}$$

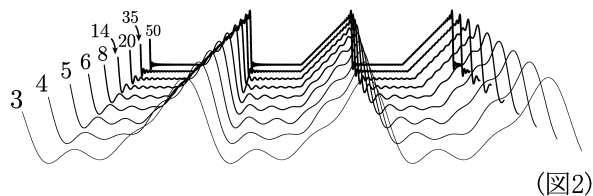
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(kt) dt = -\frac{\cos(k\pi)}{k}$$

となるのでフーリエ級数の第  $n$  部分  $S_n(t)$  は

$$\begin{aligned} S_n(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{\cos(k\pi) - 1}{\pi k^2} \right) \cos(kt) - \left( \frac{\cos(k\pi)}{k} \right) \sin(kt) \right\} \end{aligned}$$

となる。

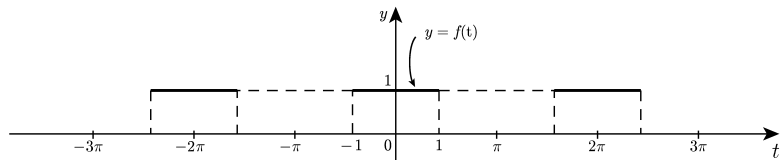
図 2 では  $n = 3, 4, 5, 6, 8, 14, 20, 35, 50$  のときの  $S_n(t)$  のグラフを  $-3\pi \leq t \leq 3\pi + 0.5$  までの範囲で手前から順に描いた図である。見やすくするために手前のグラフを拡大してある。



問  $f(t)$  が図 3 のような周期関数のとき

$-\pi \leq t \leq \pi$  の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} 0 : 1 < t \leq \pi \\ 1 : -1 \leq t \leq 1 \\ 0 : -\pi \leq t < -1 \end{cases}$$



となる。 $f(t)$  のフーリエ級数の第  $n$  部分  $S_n(t)$  を求め、例のように  $\sum$  で表せ。

< フーリエ級数 6 >

関数  $f(t)$  に対するフーリエ級数の第  $n$  部分和を

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

とする。フーリエ級数  $S_\infty(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)$  は元の関数  $f(t)$  と一致するかどうかは場合によって異なる。

**例 1**  $f(t)$  が 11 ページの例のような連続な周期関数のとき、 $f(t)$  と第 7 部分和  $S_7(t)$  のグラフはほとんど一致しているように見える。実際に、この場合は全ての実数  $t$  でフーリエ級数と元の関数  $f(t)$  が一致している。つまり

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} = S_\infty(t)$$

が全ての実数  $t$  で成り立つ。

**例 2**  $f(t)$  が 10 ページの例の関数の場合、 $t = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$  で  $f(t)$  は不連続になる。図 1 は  $n = 6$  までの部分 and  $S_6(t)$  と  $f(t)$  のグラフを重ねて表したもので

ある。このグラフでは  $t = \pi$  のとき

$$f(\pi) = -\pi, \quad S_6(\pi) = 0$$

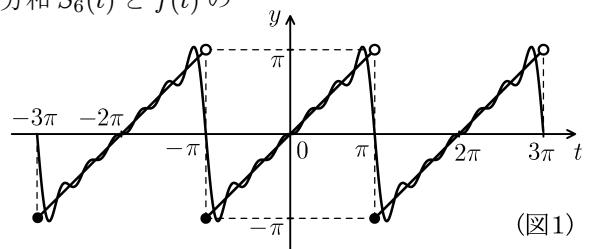
である。実際フーリエ級数  $S_\infty(t)$  は

$$S_\infty(t) = 2 \left\{ \frac{1}{1} \sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \frac{1}{4} \sin(4t) + \frac{1}{5} \sin(5t) - \frac{1}{6} \sin(6t) + \dots \right\}$$

であるが、 $\sin(n\pi) = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であるから  $S_\infty(\pi) = 0$  より  $f(\pi) \neq S_\infty(\pi)$  である。よって

$$f(n\pi) = -\pi, \quad S_\infty(n\pi) = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

となる。しかし、それ以外の  $t$  では  $f(t) = S_\infty(t)$  となる。



**問**  $f(t)$  が 9 ページの例の関数のとき、フーリエ級数は

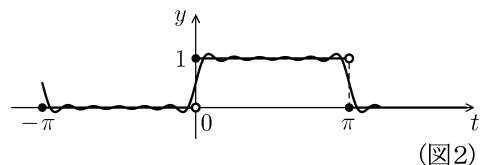
$$S_\infty(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \frac{1}{7} \sin(7t) + \frac{1}{11} \sin(11t) + \dots \right\}$$

となる。(図 2 の実線は  $S_{11}(t)$  のグラフである。)

次の値を求めよ。

(1)  $f(0) =$  ,  $S_\infty(0) =$

(2)  $f(\pi) =$  ,  $S_\infty(\pi) =$



< 区分的になめらかな関数 1 >

[定義1] 関数  $f(t)$  が次の条件①, ②を満たすとき, 区間  $[a, b]$  で区分的に滑らかであるという。

①  $[a, b]$  に属する有限個の点  $t_1, \dots, t_n$  を除いたところで  $f(t)$  は微分可能であり, その範囲で導関数  $f'(t)$  は連続である。

②点  $t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) で  $f(t)$  および  $f'(t)$  の左側極限と右側極限が存在して有限である。  $a < t_k < b$  のときは

$$f(t_k - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t_k - h) \quad , \quad f(t_k + 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t_k + h)$$

$$f'(t_k - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(t_k - h) \quad , \quad f'(t_k + 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(t_k + h)$$

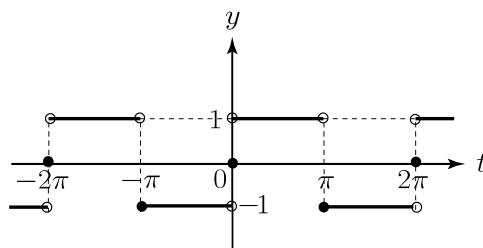
が存在して有限である。  $t_k = a$  のときは右極限  $f(t_k + 0), f'(t_k + 0)$  が存在して有限である。  $t_k = b$  のときは左側極限  $f(t_k - 0), f'(t_k - 0)$  が存在して有限である。

[定義2]  $f(t)$  が周期  $2p$  ( $p > 0$ ) の周期関数とする。この関数が  $[-p, p]$  上で区分的に滑らかであるとき,  $f(t)$  を単に区分的に滑らかであるという。

例 1 関数  $f(t)$  が周期  $2\pi$  をもつ周期関数で, 微分可能であり, かつその導関数が連続であれば, 区分的に滑らかである。

例 2  $f(t)$  が周期  $2\pi$  の周期関数で

$$f(t) = \begin{cases} -1 & : -\pi \leq t < 0 \\ 0 & : t = 0 \\ 1 & : 0 < t < \pi \end{cases}$$



のとき  $f(t)$  は区分的に滑らかであり

$$f(0 - 0) = -1 \quad , \quad f(0 + 0) = 1 \quad , \quad f(-\pi - 0) = 1 \quad , \quad f(-\pi + 0) = -1$$

$$f'(0 - 0) = 0 \quad , \quad f'(0 + 0) = 0 \quad , \quad f'(-\pi - 0) = 0 \quad , \quad f'(-\pi + 0) = 0$$

である。

## &lt; 区分的になめらかな関数 2 &gt;

定理

周期  $p$  ( $p > 0$ ) の周期関数  $f(t)$  が区分的に滑らかであれば

次式が成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t+0)}{h} = f'(t+0)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t-h) - f(t-0)}{-h} = f'(t-0)$$

[証明] &lt;①の証明&gt;

 $t$  に対し、正数  $\delta$  ( $> 0$ ) を十分小さくとり、

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & : t < s \leq t + \delta \\ f(t+0) & : s = t \end{cases}$$

とおくと  $\tilde{f}(s)$  は  $[t, t + \delta]$  で連続であり、 $(t, t + \delta)$  で微分可能であるようにできる。 $\delta > h > 0$  である  $h$  に対し、 $\tilde{f}$  の区間  $[t, t + h]$  での平均値の定理から

$$f(t+h) - f(t+0) = \tilde{f}(t+h) - \tilde{f}(t) = h\tilde{f}'(c) = hf'(c)$$

をみたす  $c$  ( $t < c < t + h$ ) が存在する。よって

$$\frac{f(t+h) - f(t+0)}{h} = f'(c) \quad (t < c < t + h)$$

が成り立つ。 $f$  は区分的になめらかであるから  $h \rightarrow 0$  ( $h > 0$ ) とすると $c \rightarrow t+0$ ,  $f'(c) \rightarrow f'(t+0)$  より

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t+0)}{h} = f'(t+0)$$

が成り立つ。

②の証明も同様である。

< フーリエ級数の収束 >

$f(t)$  を周期  $2\pi$  の周期関数とする。 $f(t)$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和を

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

とおく。ここで

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

である。

[定理]

$f(t)$  が区分的に滑らかであれば、全ての点  $t \in [-\pi, \pi]$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\}$$

が成立する。

(証明は P.24, P.25)

例  $f(t)$  が P.9 の例の場合、 $-\pi \leq t < \pi$  では  $f(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq t < \pi \\ 0 & : -\pi \leq t < 0 \end{cases}$  である。

$$(*) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \sin t + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots + \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1} + \dots \right\} = \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\}$$

が成立する。

①  $t = 0$  のとき (\*) の左辺 =  $\frac{1}{2}$ 。また  $f(0-0) = 0$ ,  $f(0+0) = 1$  より

(\*) の右辺 =  $\frac{1}{2} \{0 + 1\} = \frac{1}{2}$  である。

②  $t = \frac{\pi}{2}$  のとき

$$\begin{aligned} (*) \text{ の左辺} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} \sin \left( \frac{2n-1}{2} \pi \right) + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots \right\} \end{aligned}$$

となる。この式が (\*) の右辺 =  $\frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) \right\} = \frac{1}{2} \{1 + 1\} = 1$  に等しいから

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots \right\} = 1$$

となる。この式より等式

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

が成立する。この式の左辺をライプニッツ (Leibniz) の級数という。

## &lt; 一般周期のフーリエ級数 &gt;

正数  $L (> 0)$  と自然数  $n (\geq 1)$  および定数  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  に対し,

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) \right\}$$

とおくと,  $S(t+L) = S(t)$  が成り立つ。すなわち  $S(t)$  は周期  $L$  の周期関数である。このとき

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(t) dt = a_0 \quad , \quad \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) dt = a_k \quad , \quad \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(t) \sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) dt = b_k$$

が成り立つ。

上の結果より, 一般の周期  $L$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) \right\}$$

$$\left( a_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) dt \right)$$

と表わされる。

前ページの定理と同様にして, 次の定理が成り立つ。

[定理]

周期  $L$  の周期関数  $f(t)$  が区分的に滑らかであればフーリエ級数は  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  の各点で収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) \right\} \right] = \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\}$$

が全ての  $t \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  で成立する。

(証明は P.24, P.25)

(注)  $f(t)$  が  $t = \tau$  で連続であれば,  $f(\tau-0) = f(\tau+0) = f(\tau)$  より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}\tau\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{L}\tau\right) \right\} \right] = f(\tau)$$

が成立する。

< 複素数値関数 >

まず複素数の計算を復習する。

複素数  $z = x + iy$  ( $i = \sqrt{-1}$ ,  $x$  と  $y$  は実数) に対し  $\bar{z} = x - iy$  を  $z$  の共役な複素数,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  を  $z$  の絶対値という。次式が成り立つ。ただし  $K$  は実数とする。

①  $z\bar{z} = |z|^2$     ②  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$     ③  $\overline{Kz} = K\bar{z}$     ④  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(証明) ①, ②, ③は明らか。④を示す。  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$  ( $x_1, y_1, x_2, y_2$  は実数)

とすると  $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$  より等しい。 (証明終)

実数変数  $t$  の複素数値関数  $z(t) = x(t) + iy(t)$  ( $x(t), y(t)$  は実数値関数) に対し

$$\frac{d}{dt} z(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \frac{d}{dt} x(t) + i \frac{d}{dt} y(t)$$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = z(t) \text{ のとき } \int_a^b z(t) dt = [Z(t)]_a^b = Z(b) - Z(a)$$

と定めると

$$\int_a^b (x(t) + iy(t)) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt$$

より  $\int_a^b \overline{z(t)} dt = \overline{\int_a^b z(t) dt}$  が成り立つ。また実数  $x, y$  に対し

オイラーの公式  $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$  より次式が従う。

⑤  $\frac{d}{dt} e^{(x+iy)t} = (x + iy)e^{(x+iy)t}$  ,    ⑥  $\int_a^b e^{(x+iy)t} dt = \left[ \frac{1}{x + iy} e^{(x+iy)t} \right]_a^b$

(ただし  $x, y$  は実数である。)

(証明) ⑤のみ証明する。

$$\frac{d}{dt} e^{(x+iy)t} = \frac{d}{dt} e^{xt} \cos(yt) + i \frac{d}{dt} e^{xt} \sin(yt)$$

$$= x e^{xt} \cos(yt) - y e^{xt} \sin(yt) + i \{ x e^{xt} \sin(yt) + y e^{xt} \cos(yt) \}$$

$$= (x + iy) e^{xt} \cos(yt) + (-y + ix) e^{xt} \sin(yt) = e^{xt} \{ (x + iy) \cos(yt) + i(x + iy) \sin(yt) \}$$

$$= (x + iy) e^{xt} \{ \cos(yt) + i \sin(yt) \} = (x + iy) e^{xt} \cdot e^{iyt} = (x + iy) e^{(x+iy)t} \quad (\text{証明終})$$

## &lt; フーリエ級数の複素数表示 1 &gt;

周期  $L (> 0)$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和を

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\}$$

とおく。ここで  $\omega = \frac{2\pi}{L}$ ,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

である。オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (i = \sqrt{-1} \text{ は虚数単位} \quad , \quad \theta \text{ は実数})$$

より  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  は

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad , \quad \sin \theta = \frac{i}{2} (e^{-i\theta} - e^{i\theta})$$

と表わされる。この式を  $S_n(t)$  の式に代入すると

$$\begin{aligned} S_n(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{a_k}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + \frac{b_k i}{2} (e^{-ik\omega t} - e^{ik\omega t}) \right\} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{a_k}{2} - \frac{b_k i}{2} \right) e^{ik\omega t} + \left( \frac{a_k}{2} + \frac{b_k i}{2} \right) e^{-ik\omega t} \right\} \end{aligned}$$

とある。ここで

$$c_0 = a_0 \quad , \quad c_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k i}{2} \quad , \quad c_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k i}{2} \quad (1 \leq k \leq n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} S_n(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^n \{c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t}\} \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \end{aligned}$$

と表わされる。

< フーリエ級数の複素数表示 2 >

前ページの  $c_k$  ,  $c_{-k}$  は

$$c_k = \frac{1}{2} \{a_k - b_k i\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt - \frac{2i}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \{ \cos(k\omega t) - i \sin(k\omega t) \} dt = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad ,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2} \{a_k + b_k i\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt + \frac{2i}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \{ \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t) \} dt = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{ik\omega t} dt$$

で,  $c_0 = a_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt$  だから,  $S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$  の係数  $c_k$  は

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

と表わされる。よって周期  $L$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

$(\omega = \frac{2\pi}{L})$  と表わされる。  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$  を  $f(t)$  のフーリエ級数の複素数表示

(または複素フーリエ級数) という。

(注)  $c_k$  と  $e^{ik\omega t}$  は共に複素数であるが,

$$c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t} = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

は実数である。

## &lt; ディリクレ核 &gt;

正数  $L$  に対し  $\omega = \frac{2\pi}{L}$  とおく。整数  $k$  に対し、次式が成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t} dt = \begin{cases} 1 & : k=0 \\ 0 & : k \neq 0 \end{cases}$$

(証明)  $k=0$  のときは明らか。  $k \neq 0$  のとき  $\omega t = u$  とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iku} du = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{ik} e^{iku} \right]_{u=-\pi}^{u=\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi ik} \{ e^{ik\pi} - e^{-ik\pi} \} = \frac{1}{2\pi ik} \{ \cos(k\pi) + i \sin(k\pi) - \cos(-k\pi) - i \sin(-k\pi) \} = 0 \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

自然数  $n$  に対し  $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\omega t}$  をディリクレ核という。

次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad D_n(-t) &= D_n(t) & \textcircled{3} \quad \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} D_n(t) dt &= 1 & \textcircled{4} \quad \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^0 D_n(t) dt &= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} D_n(t) dt = \frac{1}{2} \\ \textcircled{5} \quad D_n(t+L) &= D_n(t) & \textcircled{6} \quad D_n(t) &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)} \end{aligned}$$

(証明) ②は明らか。③は上記①よりわかる。④は②より偶関数であるから

$$\int_{-\frac{L}{2}}^0 D_n(t) dt = \int_0^{\frac{L}{2}} D_n(t) dt \text{ となることと③の結果よりわかる。⑤は}$$

$$e^{ik\omega(t+L)} = e^{ik\omega t + 2\pi ki} = e^{ik\omega t} (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^{ik\omega t} \text{ よりわかる。}$$

⑥を示す。等比数列の和の公式から

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{k=-n}^n (e^{i\omega t})^k = (e^{i\omega t})^{-n} \sum_{k=0}^{2n} (e^{i\omega t})^k = e^{-in\omega t} \times \frac{1 - (e^{i\omega t})^{2n+1}}{1 - e^{i\omega t}} \\ &= \frac{e^{-in\omega t} - e^{i(n+1)\omega t}}{1 - e^{i\omega t}} = \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t}}{e^{-\frac{i\omega t}{2}} - e^{\frac{i\omega t}{2}}} \\ &= \frac{-2i \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{-2i \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)} \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

< ベッセルの不等式 >

周期  $L (> 0)$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和は

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \quad \left( \omega = \frac{2\pi}{L}, \quad c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \right)$$

と表わされる。関数  $f(t)$  は  $\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty$  であるとする。(これを  $f(t)$  は  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  で 2 乗可積分であるという。) このとき次式が成り立つ。

$$(*) \quad \boxed{\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt} \quad (n \geq 1)$$

(証明) 整数  $k, \ell$  に対し  $\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i(k-\ell)\omega t} dt = \begin{cases} 1 & : k = \ell \\ 0 & : k \neq \ell \end{cases}$  である。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |S_n(t)|^2 dt &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \right) \overline{\left( \sum_{\ell=-n}^n c_\ell e^{i\ell\omega t} \right)} dt \\ &= \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c_k e^{ik\omega t}) (\overline{c_\ell} e^{-i\ell\omega t}) dt = \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n c_k \overline{c_\ell} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i(k-\ell)\omega t} dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-n}^n c_k \cdot \overline{c_k} = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \text{ である。また } c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \text{ に対し}$$

$$\overline{c_k} = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \overline{f(t) e^{-ik\omega t}} dt = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \overline{f(t)} e^{ik\omega t} dt \quad (\overline{f(t)} = f(t) \text{ は実数) だから}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S_n(t) f(t) dt = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} c_k e^{ik\omega t} f(t) dt = \sum_{k=-n}^n c_k \times \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{ik\omega t} dt$$

$$= \sum_{k=-n}^n c_k \times \overline{c_k} = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \text{ である。同様にして}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \overline{S_n(t)} f(t) dt = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \times \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \times c_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \text{ である。}$$

この結果から

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |S_n(t) - f(t)|^2 dt = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (S_n(t) - f(t)) \overline{(S_n(t) - f(t))} dt$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (|S_n|^2 - S_n(t)f(t) - \overline{S_n(t)}f(t) + |f(t)|^2) dt$$

$$= \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt \text{ である。従って}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |S_n(t) - f(t)|^2 dt \geq 0 \text{ より}$$

不等式 (\*) が得られる。(証明終)

不等式 (\*) をベッセルの不等式という。

< リーマン・ルベーグの補題 >

$f(t)$  を区間  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  で 2 乗可積分  $\left( \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty \right)$  とする。

$f(t)$  の複素フーリエ係数  $c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt$  ( $\omega = \frac{2\pi}{L}$ ) と実フーリエ係数

$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt$ ,  $a_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt$ ,  $b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt$  の間には

$c_0 = a_0$ ,  $c_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}i$ ,  $c_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}i$  ( $1 \leq k \leq n$ ) という関係があった。

この関係から  $|c_0| = |a_0|$ ,  $|c_k|^2 = \frac{1}{4}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$  より前ページの不等式は

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt \quad (n \geq 1)$$

と表わされる。ここで  $n$  は任意の自然数であるから、 $n \rightarrow \infty$  の極限をとると左辺は単調増大数列で収束するので

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt$$

が成り立つ。この不等式を**ベッセルの不等式**という。このとき次式が成り立つ。

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \quad \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$$

(証明) ①を背理法で示す。

もし①が成り立たないと仮定すると、ある正定数  $\varepsilon (> 0)$

とある自然数列  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  が存在して  $|a_{n_k}| \geq \varepsilon$  が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^2 = +\infty$$

これはベッセルの不等式  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq 2 \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty$  に反する。

従って  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  でなければならない。②も同様である。(証明終)

$$\frac{L}{2} a_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad \frac{L}{2} b_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad \text{だから}$$

上記の①, ②より、次式が従う。

$$f(t) \text{ が } \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \text{ で 2 乗可積分であれば}$$

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = 0, \quad \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt = 0$$

この結果をリーマン・ルベーグの補題という。

< フーリエ級数の収束定理の証明 1 >

周期  $L$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数の収束定理は複素フーリエ級数を使うと次のようになる。

[定理] 周期  $L$  の周期関数  $f(t)$  が区分的に滑らかであれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\}$$

がすべての実数  $t$  で成り立つ。

[証明]

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\omega t} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{L}\right) \text{ をディリクレ核とすると } S_n(t) \text{ は}$$

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-n}^n \left\{ \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) e^{-ik\omega s} ds \right\} e^{ik\omega t} \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) \left\{ \sum_{k=-n}^n e^{ik\omega(t-s)} \right\} ds = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) D_n(t-s) ds \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) D_n(s-t) ds = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}-t}^{\frac{L}{2}-t} f(u+t) D_n(u) du \end{aligned}$$

と表わされる。ここで  $f(u+t)D_n(u)$  は周期  $L$  の  $(u)$  関数であるから P.1 より

$$S_n(t) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(u+t) D_n(u) du$$

と表わされる。ここで

$$\begin{aligned} I_n &= S_n(t) - \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\} \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(u+t) D_n(u) du - \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\} \end{aligned}$$

$$II_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^0 f(u+t) D_n(u) du - \frac{1}{2} f(t-0)$$

$$III_n = \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} f(u+t) D_n(u) du - \frac{1}{2} f(t+0)$$

とおく。

< フーリエ級数の収束定理の証明 2 >

ディリクレ核の性質  $\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^0 D_n(t) dt = \frac{1}{2}$ ,  $D_n(-t) = D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)}$  より

$$\begin{aligned} II_n &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^0 f(u+t) D_n(u) du - \frac{1}{2} f(t-0) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^0 \{f(u+t) - f(t-0)\} D_n(u) du \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \{f(t-s) - f(t-0)\} D_n(s) ds = \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \{f(t-s) - f(t-0)\} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega s\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)} ds \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \left\{ \frac{f(t-s) - f(t-0)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)} \right\} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega s\right) ds \end{aligned}$$

と表わされる。ここで

$$F(s) = \begin{cases} \frac{f(t-s) - f(t-0)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)} & : 0 < s \leq \frac{L}{2} \\ 0 & : s = 0 \end{cases}$$

とおく。 $f(t)$  は区分的に滑らかであるから

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} F(s) &= \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} \frac{f(t-s) - f(t-0)}{s} \times \frac{\frac{\omega}{2}s}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)} \times \frac{2}{\omega} \\ &= -f'(t-0) \times \frac{2}{\omega} = -\frac{L}{\pi} f'(t-0) \end{aligned}$$

より、 $F(s)$  は  $\left[0, \frac{L}{2}\right]$  で区分的に連続である。また

$$f_1(s) = \begin{cases} F(s) \cos\left(\frac{\omega}{2}s\right) & : 0 \leq s \leq \frac{L}{2} \\ 0 & : -\frac{L}{2} \leq s < 0 \end{cases} \quad f_2(s) = \begin{cases} F(s) \sin\left(\frac{\omega}{2}s\right) & : 0 \leq s \leq \frac{L}{2} \\ 0 & : -\frac{L}{2} \leq s < 0 \end{cases}$$

とおくと、 $f_1(s), f_2(s)$  は共に  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  で区分的に連続であるから、 $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  で 2 乗可積分である。 $f_1(s)$  と  $f_2(s)$  に対するリーマン・ルベーグの補題より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} II_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} F(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega s\right) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left\{ \int_0^{\frac{L}{2}} F(s) \cos\left(\frac{\omega}{2}s\right) \sin(n\omega s) ds + \int_0^{\frac{L}{2}} F(s) \sin\left(\frac{\omega}{2}s\right) \cos(n\omega s) ds \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left\{ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f_1(s) \sin(n\omega s) ds + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f_2(s) \cos(n\omega s) ds \right\} = 0 \end{aligned}$$

同様にして  $\lim_{n \rightarrow \infty} III_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} f(t+u) D_n(u) du - \frac{1}{2} f(t+0) = 0$  も示される。

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ S_n(t) - \frac{1}{2} (f(t-0) + f(t+0)) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (II_n + III_n) = 0 \quad (\text{証明終})$$

< フーリエ級数の練習 >

問 1 周期  $2\pi$  の周期関数  $f(t)$  が次の場合に,  $f(t)$  のフーリエ級数を求めよ。

$$(1) f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : 0 \leq t < \pi \\ 0 & : -\pi \leq t < 0 \end{cases} \quad (2) f(t) = \begin{cases} 0 & : \frac{\pi}{2} \leq t < \pi \\ \frac{\pi}{2} & : 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & : -\frac{\pi}{2} \leq t < 0 \\ 0 & : -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(3) f(t) = |t| - \pi \quad (-\pi \leq t < \pi) \quad (4) f(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

問 2 問 1(3) の結果を利用して, 次式を示せ。

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \dots$$

問 3 問 1(2) の結果を利用して, 次式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

問 4 問 1(4) の結果を利用して, 次式を示せ。

$$\textcircled{1} \quad \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

問 5 周期  $L(> 0)$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数の複素数表示は

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad , \quad c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt$$

である。(ただし  $\omega = \frac{2\pi}{L}$ ) この式から  $f(t)$  のフーリエ級数の実数表示を導け。

問 6 自然数  $n$  と正数  $t(> 0)$  に対し, 次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}$$

## &lt; 極限 &gt;

$x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を復習する。

$$\textcircled{1} \quad 0 < r < 1 \text{ のとき} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} r^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} r^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^y = +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad r > 1 \text{ のとき} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} r^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} r^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^y = 0$$

$$\text{例 1} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2b} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-2a} = +\infty$$

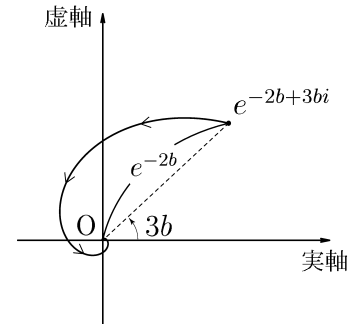
$$\text{例 2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0 \quad (\text{ロピタルの定理 (P85) より})$$

$$\text{例 3} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{(-2+3i)b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2b} \times \{\cos(3b) + i \sin(3b)\}$$

ここで  $|\cos(3b) + i \sin(3b)| = 1$  より

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} |e^{(-2+3i)b}| &= \lim_{b \rightarrow +\infty} |e^{-2b}| \cdot |\cos(3b) + i \sin(3b)| \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2b} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{(-2+3i)b} = 0$$



(注) 例 3 の収束は複素平面上の点が原点 O に近づくことを意味する。

問 次の極限值を求めよ。ここで  $\alpha, \beta > 0$  とする。

$$(1) \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\alpha b} \qquad (2) \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\beta b}$$

$$(3) \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{\beta a} \qquad (4) \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\beta a}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \qquad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

$$(7) \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-(2+3i)b} \qquad (8) \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)a}$$

< 広義積分 1 >

任意有限区間で積分可能な関数  $f(t)$  に対して

$$\text{極限 } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(t) dt, \quad \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(t) dt$$

が存在する場合に、その値を

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt = \int_a^\infty f(t) dt, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(t) dt = \int_{-\infty}^b f(t) dt$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(t) dt = \int_{-\infty}^\infty f(t) dt$$

と書き、**広義の定積分**または**広義積分**という。

例 
$$\int_0^\infty e^{(-2+3i)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(-2+3i)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{-2+3i} e^{(-2+3i)t} \right]_0^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{-2+3i} e^{(-2+3i)b} - \frac{1}{-2+3i} e^0 \right\} = \frac{1}{2-3i}$$

問 次の値を求めよ。ただし  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 1$ ) は定数とする。

(1) 
$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$$

(2) 
$$\int_{-\infty}^0 e^{\beta t} dt$$

(3) 
$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\gamma} dt$$

(4) 
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha|t|+\beta ti} dt$$

## &lt; 広義積分 2 &gt;

**定理** 定数  $\alpha, \beta$  に対し、次式が成り立つ。ただし  $\alpha > 0$ 。

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(\beta t) dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$(2) \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin(\beta t)}{t} dt = \tan^{-1} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

$$(3) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

## &lt; 証明の概略 &gt;

(1)  $I = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(\beta t) dt$  とおくと部分積分法より

$$\begin{aligned} I &= \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \cos(\beta t) \right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \beta \sin(\beta t) dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \left\{ \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \beta \cos(\beta t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(\beta t) dt = \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 I \end{aligned}$$

であるから

$$I = \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

(2)  $f_{\alpha}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$  とおいて  $x$  で微分すると

$$\frac{d}{dx} f_{\alpha}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{d}{dx} \frac{\sin(xt)}{t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(xt) dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$$

よって  $f_{\alpha}(x) = \tan^{-1} \left( \frac{x}{\alpha} \right) + C$  ( $C$  は定数)。ここで  $x = 0$  のとき

$$f_{\alpha}(0) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{0}{t} dt = 0 \quad \text{より} \quad C = 0 \quad \text{よって} \quad f_{\alpha}(x) = \tan^{-1} \left( \frac{x}{\alpha} \right)$$

$$\text{従って} \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin(\beta t)}{t} dt = f_{\alpha}(\beta) = \tan^{-1} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

$$(3) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\pi}{2}$$

(注) 上記定理の厳密な証明は P91,93,94 を参照されたい。

< 広義積分 3 >

定理  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

< 証明 >

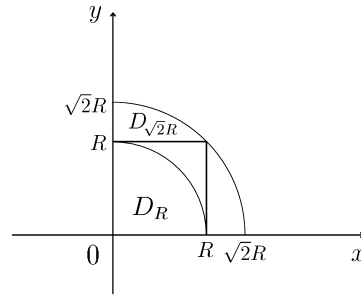
$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} dx dy\right)$$

$$D_R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

とおくと

$$D_R \subset \{(x, y) : 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\} \subset D_{\sqrt{2}R}$$

より



$$(*) \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

である。  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  と変数変換すると  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$  より

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \times \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

である。(※) より

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

ここで  $R \rightarrow \infty$  とすると

$$\frac{\pi}{4} \leq \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}$$

より  $\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$  となる。(証明終)

(注 1)  $f(x) = e^{-x^2}$  は急減少関数 (P.38) であるから

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x^2} dx \text{ は収束する。}$$

(注 2) 多項式 (整式), 分数関数, べき関数, 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数, 双曲線関数,

逆双曲線関数およびそれらの関数を組み合わせて得られる関数を **初等関数** という。

不定積分  $\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{1}{\log x} dx, \int \frac{1}{xe^x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \sin(x^2) dx$  等は初等関数では表されることがわかっている。

しかし不定積分がわからなくても, 定積分が求まることもある。

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

はその代表的な例であり, その結果は良く知られている。

## &lt; フーリエ変換の導出 &gt;

周期  $L$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数は

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad (\text{フーリエ級数})$$

であった。ここで

$$\omega = \frac{2\pi}{L}, \quad c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (\text{フーリエ係数})$$

である。

$f(t)$  が周期関数でないときは、 $f(t)$  をフーリエ級数では表現できない。そのときは

周期  $L$  が無限大 ( $=\infty$ ) の関数と考え、 $L \rightarrow \infty$  の極限を考える。

$$F_L(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ixt} dt, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

とおくと  $\omega = \frac{2\pi}{L}$  より

$$c_k = \frac{1}{L} F_L(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi} F_L(k\omega)$$

である。ここで  $\omega = \Delta x$  とおくと  $L \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta x \rightarrow 0$  であり、 $F_L(x) \rightarrow F(x)$

であるから、 $k\Delta x \rightarrow x$  と考えて

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi} F_L(k\omega) e^{ik\omega t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F_L(k\Delta x) e^{ik\Delta x t} \Delta x \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(x) e^{ixt} dx \end{aligned}$$

と考えられる。従って

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

が得られる。 $F(x)$  を  $f(t)$  のフーリエ変換という。

(注) このページの収束は厳密な証明ではない。

この収束の厳密な証明については [P101](#) を参照されたい。

< フーリエ変換の定義 >

前ページの結果より

$$(*) \quad f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt$$

が得られた。 $F(x)$  を  $f(t)$  のフーリエ変換という。また  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx$  をフーリエ逆変換という。フーリエ変換にはいろいろな定義式があるが、このワークブックでは (\*) 式を用いることにする。

(注 1) 信号処理や通信理論の本では (\*) 式の変数  $x$  を  $\omega$  で表す場合が多い。(\*) 式のかわりに

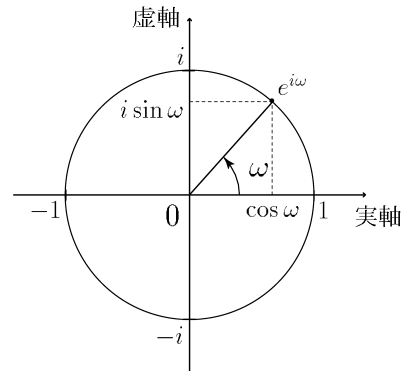
$$(*)' \quad f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

を用いる。 $t$  が時間を表す変数の場合に、 $\omega$  を角周波数という。

$t$  の単位が秒であれば、関数

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

は複素平面上の単位円を 1 秒間に角度  $\omega$  だけ回転する。



(注 2) フーリエ変換の別の定義式を紹介しておく。(\*)' 式において

$$\ell = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \mathcal{F}(\ell) = F(2\pi\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t} dt$$

とおくと  $\omega = 2\pi\ell$ ,  $d\omega = 2\pi d\ell$  より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi\ell)e^{i2\pi\ell t} 2\pi d\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t} d\ell$$

となるので、(\*)' は

$$(**) \quad f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t} d\ell, \quad \mathcal{F}(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t} dt$$

と書きなおせる。(\*\*) もフーリエ変換の定義式としてよく使われる。 $t$  が時間を示す変数のとき、 $\ell$  を周波数という。関数  $e^{i2\pi\ell t}$

$$e^{i2\pi\ell t} = \cos(2\pi\ell t) + i \sin(2\pi\ell t)$$

の実部  $\cos(2\pi\ell t)$  と虚部  $\sin(2\pi\ell t)$  は基本周期が  $\frac{1}{\ell}$  である。 $t$  の単位が秒であれば、1 秒間に基本波形が  $\ell$  回現れる。

## &lt; フーリエ変換 1 &gt;

$f(t)$  のフーリエ変換  $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt$  を

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt} \quad (f(t) \text{ のフーリエ変換})$$

と書くことにする。

(注) 関数  $f$  が任意有限区間で積分可能であり  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  であるとき、絶対可積分であるという。

$$\text{このとき } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-ixt}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

より  $\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(t)e^{-ixt} dt$  は収束する。(P91 参照)

今後  $f$  は絶対可積分とする。このとき  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(t)e^{-ixt} dt$  が成り立つ。

例 オイラーの公式より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

であるから、 $f(t)$  のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \cos(xt) - i \sin(xt) \} dt$$

と書きなおせる。

今  $f(t)$  が偶関数であれば  $f(t) \cos(xt)$  も偶関数であり、 $f(t) \sin(xt)$  は奇関数であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt) dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(xt) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt = 0$$

となる。従ってこのときのフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(xt) dt \quad \dots \quad \text{偶関数のフーリエ変換}$$

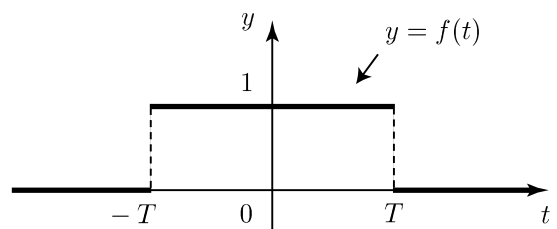
となる。

問 1  $f(t)$  が奇関数のとき、フーリエ変換  $\mathcal{F}[f(t)]$  を例のように簡単にせよ。

問 2 定数  $T > 0$  に対し、

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : |t| \leq T \\ 0 & : |t| > T \end{cases}$$

とする。このとき  $\mathcal{F}[f(t)]$  を求めよ。



< フーリエ変換 2 >

問 1 正定数  $T(> 0)$  に対し

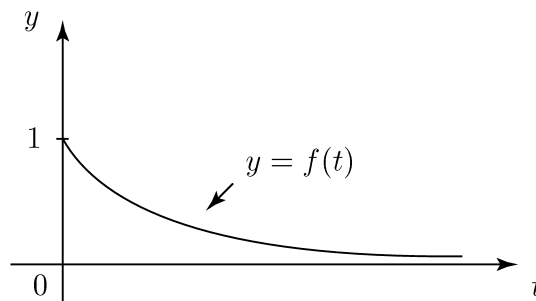
$$f(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq t \leq T \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

とする。このとき  $\mathcal{F}[f(t)]$  を求めよ。

例 正定数  $\alpha(> 0)$  に対し

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

のとき、 $f(t)$  のフーリエ変換は



$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-ixt} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(\alpha+ix)t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{-(\alpha+ix)} e^{-(\alpha+ix)t} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{\alpha+ix} e^{-(\alpha+ix)b} + \frac{1}{\alpha+ix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-(\alpha+ix)b} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\alpha b} \times e^{-ixb} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\alpha b}} (\cos(xb) - i \sin(xb)) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{より } \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\alpha+ix}$$

問 2 正定数  $\alpha > 0$  に対し  $f(t) = \begin{cases} 0 & : t > 0 \\ e^{\alpha t} & : t \leq 0 \end{cases}$  のときフーリエ変換  $\mathcal{F}[f(t)]$  を求めよ。

## &lt; フーリエ変換 3 &gt;

問 1  $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & : |t| \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases}$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}[f(t)]$  を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{例 } \mathcal{F}[e^{-|t|}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-ixt} dt = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b e^{-|t|} e^{-ixt} dt \\ &= \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left\{ \int_a^0 e^t e^{-ixt} dt + \int_0^b e^{-t} e^{-ixt} dt \right\} \\ &= \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left\{ \left[ \frac{1}{1-ix} e^{(1-ix)t} \right]_{t=a}^{t=0} + \left[ \frac{1}{-(1+ix)} e^{-(1+ix)t} \right]_{t=0}^{t=b} \right\} \\ &= \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left\{ \frac{1}{1-ix} - \frac{1}{1-ix} e^{(1-ix)a} - \frac{1}{1+ix} e^{-(1+ix)b} + \frac{1}{1+ix} \right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-(1+ix)b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} (\cos(xb) - i \sin(xb)) = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} e^{(1-ix)a} = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a (\cos(xa) - i \sin(xa)) = 0$$

より

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}$$

問 2 正定数  $\alpha > 0$  に対して  $\mathcal{F}[e^{-\alpha|t|}]$  を求めよ。

< 絶対可積分関数 >

任意有限区間で積分可能な関数  $f(t)$  が  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$  をみたすとき、

$f(t)$  を 絶対可積分 であるという。

定理  $f(t)$  が絶対可積分であれば次式が成り立つ。

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_T^{\infty} |f(t)|dt = 0 \qquad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-T} |f(t)|dt = 0$$

$$(2) \quad \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = F(x) \text{ は有界で一様連続}$$

(3)  $f(t)$  が有界ならば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt)dt = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt)dt = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt)dt = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt)dt = 0$$

(注) ルベーグ積分の理論を使うと (3) の有界条件は不要になる。

(3) 式もリーマン・ルベーグの補題という。

[(3) の証明の概略]

(1) より任意の正数  $\epsilon > 0$  に対し、十分大きい  $T > 0$  をとると

$$\int_T^{\infty} |f(t)|dt + \int_{-\infty}^{-T} |f(t)|dt < \epsilon$$

となる。 $f(t)$  は有界だから  $[-T, T]$  で 2 乗可積分である。P.23 のリーマン・ルベーグの補題

から十分大きい  $x$  をとると

$$\left| \int_{-T}^T f(t) \cos(xt)dt \right| < \epsilon, \qquad \left| \int_{-T}^T f(t) \sin(xt)dt \right| < \epsilon$$

となるので  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt)dt \right| \leq \int_{-\infty}^{-T} |f(t)|dt + \left| \int_{-T}^T f(t) \cos(xt)dt \right| + \int_T^{\infty} |f(t)|dt < 2\epsilon$

より  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt)dt = 0$  が得られる。同様にして  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt)dt = 0$

が得られる。 $\cos(-xt) = \cos(xt)$   $\sin(-xt) = -\sin(xt)$  より

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt)dt = 0, \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt)dt = 0 \quad (\text{証明終})$$

(注) より詳しい証明は P.95、P.96 を参照せよ。

## &lt; 急減少関数 1 &gt;

実数全体 ( $\mathbb{R}$ ) で定義された実数値関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が何回でも微分可能であり、任意の非負整数  $m, n (\geq 0)$  に対し、

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^m \times |f^{(n)}(t)| < \infty \quad \left( f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right)$$

が成立するとき、 $f = f(t)$  を  $\mathbb{R}$  上の 急減少関数 という。 $\mathbb{R}$  上の急減少関数の全体を  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  で表し、Schwartz 空間 という。

例  $f(t) = e^{-t^2}$  は急減少関数である。

なぜなら、任意の非負整数  $m$  に対し、ロピタルの定理から

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^m e^{-t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^m}{e^{t^2}} = 0$$

がわかるので  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^m e^{-t^2} < \infty$  がわかる。また

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} = (t \text{ の } n \text{ 次式}) \times e^{-t^2}$$

より  $t^m f^{(n)}(t) = (t \text{ の } n+m \text{ 次式}) \times e^{-t^2}$  だから有界であることが

わかる。次の補題が成り立つ。

補題 1  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  とすると、全ての自然数  $r$  に対し

$$t^r f(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f^{(r)}(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

補題 2  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ならば  $f$  は絶対可積分  $\left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right)$  である。

補題 3  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  のとき、任意の自然数  $m$  に対して、

$$\frac{d^m}{dx^m} (\mathcal{F}[f(t)](x)) = (-i)^m \mathcal{F}[t^m f(t)](x) \text{ が成り立つ。}$$

(略証)  $m = 1$  のとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathcal{F}[f(t)](x) &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \frac{d}{dx} e^{-ixt} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-it) e^{-ixt} dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-ixt} dt = -i \mathcal{F}[t f(t)](x) \end{aligned} \quad \text{2 以上の } m \text{ についてはこれをくり返す。}$$

(注) 厳密な証明は P.97~99 を参照。

< 急減少関数 2 >

補題 4  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  と自然数  $m$  に対し、次式が成り立つ。

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^m}{dt^m}f(t)\right](x) = (ix)^m \mathcal{F}[f(t)](x)$$

(略証)  $m = 1$  のとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(t)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-ixt} dt = [f(t)e^{-ixt}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{d}{dt}e^{-ixt}\right) dt \\ &= 0 - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-ix)e^{-ixt} dt = ix \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = ix \mathcal{F}[f(t)](x) \end{aligned}$$

2 以上の  $m$  に対しては、これをくり返せば良い。

[定理]  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ならば  $\mathcal{F}[f(t)] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(証明) 任意の非負整数  $m, n$  に対して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^m \left| \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{F}[f(t)](x) \right| < \infty$$

を示す。補題 3, 4 より

$$\begin{aligned} (ix)^m \left( \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{F}[f(t)](x) \right) &= (ix)^m \times (-i)^n \mathcal{F}[t^n f(t)](x) \\ &= (-i)^n \mathcal{F}\left[\frac{d^m}{dt^m} \{t^n f(t)\}\right](x) = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d^m}{dt^m} t^n f(t) \right\} e^{-ixt} dt \\ &= (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^m {}^m C_k \left( \frac{d^k}{dt^k} t^n \right) \times f^{(m-k)}(t) \right\} e^{-ixt} dt \\ &= (-i)^n \sum_{k=0}^m {}^m C_k \cdot A_n(k) \int_{-\infty}^{\infty} t^{n-k} \times f^{(m-k)}(t) e^{-ixt} dt \end{aligned}$$

$$\text{ここで } A_n(k) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1) & : k \leq n \\ 0 & : k > n \end{cases} \text{ である。}$$

補題 1, 2 より、 $t^{n-k} f^{(m-k)}(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  で  $t^{n-k} f^{(m-k)}(t)$  は絶対可積分だから

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^m \left| \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{F}[f(t)](x) \right| \leq \sum_{k=0}^m {}^m C_k A_n(k) \int_{-\infty}^{\infty} |t^{n-k} f^{(m-k)}(t)| dt < \infty \quad (\text{証明終})$$

## &lt; フーリエ変換 4 &gt;

例  $\mathcal{F}[e^{-t^2}]$  を求めたい。  $\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt = F(x)$  とおく。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left( \frac{d}{dx} e^{-ixt} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (-it) e^{-ixt} dt \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (-2t) e^{-t^2} e^{-ixt} dt = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{dt} e^{-t^2} \right) e^{-ixt} dt = \frac{i}{2} \mathcal{F} \left[ \left( \frac{d}{dt} e^{-t^2} \right) \right] \end{aligned}$$

ここで前ページ補題 4 より  $\mathcal{F} \left[ \left( \frac{d}{dt} e^{-t^2} \right) \right] = ix \mathcal{F}[e^{-t^2}]$  だから

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{i}{2} \times ix \mathcal{F}[e^{-t^2}] = -\frac{x}{2} F(x)$$

となる。微分方程式  $\frac{d}{dx} F(x) = -\frac{x}{2} F(x)$  の解は

$$F(x) = C e^{-\frac{x^2}{4}} \quad (C \text{ は定数})$$

である。P.30 の結果より  $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  であり、

$$C = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^0 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \text{ より } C = \sqrt{\pi}。$$

よって

$$\mathcal{F}[e^{-t^2}] = F(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

問 正定数  $\alpha$  に対して  $\mathcal{F}[e^{-\alpha t^2}]$  を求めよ。

< 合成積 >

$-\infty < t < \infty$  の範囲で定義されている 2 つの関数  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  に対して  $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du$  が収束するとき

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du$$

を  $f_1$  と  $f_2$  の「合成積」(convolution) または「畳み込み (たたみこみ)」という。

◎  $(f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t)$

[証明]  $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du$       ここで  $t-u = s$  とおくと

$$= \int_{\infty}^{-\infty} f_1(s)f_2(t-s)(-1)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-s)f_1(s)ds = (f_2 * f_1)(t)$$

定理  $f_1, f_2$  が有界で連続かつ絶対可積分であれば  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(x)$ ,  $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(x)$  のとき

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)] = F_1(x)F_2(x)$$

[証明] の概略

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(t)e^{-ixt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du \right\} e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)e^{-ixt} dt \right\} f_2(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)e^{-ix(t-u)} dt \right\} f_2(u)e^{-ixu} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)e^{-ixs} ds \right\} f_2(u)e^{-ixu} du = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)f_2(u)e^{-ixu} du \\ &= F_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-ixu} du = F_1(x)F_2(x) \end{aligned}$$

(証明終)

(注) 詳しい証明は P.110~P.113 を参照せよ。

[問]  $\mathcal{F}[f(t)] = F(x)$  のとき  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)e^{-u^2} du$  のフーリエ変換を求めよ。

## &lt; フーリエ変換の対応表 &gt;

$f(t)$ (元の関数)	$\mathcal{F}[f(t)] = F(x)$ (フーリエ変換)
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x)$
$f(\alpha t)$ ( $\alpha \neq 0$ )	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$
$f(t - \alpha)$ ( $\alpha$ は定数)	$e^{-i\alpha x} F(x)$
$e^{i\alpha t} f(t)$ ( $\alpha$ は定数)	$F(x - \alpha)$
$f'(t)$ ( $f$ の導関数)	$ixF(x)$
$f^{(n)}(t)$ ( $f$ の $n$ 階導関数)	$(ix)^n F(x)$
$\int_{-\infty}^t f(u) du$	$\frac{1}{ix} F(x)$
$(-it)^n f(t)$	$F^{(n)}(x)$ ( $F(x)$ の $n$ 階導関数)
$(f_1 * f_2)(t)$ (合成積)	$F_1(x)F_2(x)$ (積)
$f_1(t)f_2(t)$ (積)	$\frac{1}{2\pi}(F_1 * F_2)(x)$ ( $\frac{1}{2\pi}$ 合成積)
$f(t) = \begin{cases} 1 & :  t  \leq T \\ 0 & :  t  > T \end{cases}$ ( $T > 0$ )	$\frac{2 \sin(Tx)}{x}$
$e^{-\alpha t }$ ( $\alpha > 0$ )	$\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}$
$e^{-\alpha t^2}$ ( $\alpha > 0$ )	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$
$\frac{2\alpha}{t^2 + \alpha^2}$ ( $\alpha > 0$ )	$2\pi e^{-\alpha x }$
$2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(t-u)^2 + \alpha^2} du$ ( $\alpha > 0$ ) (コーシー・ポアソン積分)	$2\pi e^{-\alpha x } F(x)$
$\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-u)^2}{4\alpha}} f(u) du$ ( $\alpha > 0$ ) (ガウス・ワイエルシュトラス積分)	$e^{-\alpha x^2} F(x)$

(注) コーシー・ポアソン積分は  $f(t)$  と  $\frac{2\alpha}{t^2 + \alpha^2}$  との合成積である。

ガウス・ワイエルシュトラス積分は  $f(t)$  と  $\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$  との合成積である。

< フーリエ逆変換 >

フーリエ変換の導出 (P31) で  $f$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dx = F(x)$  に対し、  
 $f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx$  であるので、 $F(x)$  のフーリエ逆変換を  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx$   
 と定義したいが、広義積分が収束しない場合がある。

例  $f(t) = \begin{cases} 1 & : |t| \leq 1 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$  のとき  $\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dx = \frac{2 \sin x}{x} = F(x)$

であるが、広義積分  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{2 \sin x}{x} e^{ixt} dx$  は

収束しない。(その証明は P115 を参照) しかし

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \frac{2 \sin x}{x} e^{ixt} dx$$

は収束し、その極限は  $\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \begin{cases} 1 & : |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & : t = \pm 1 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$  となる

そこで  $f$  のフーリエ変換  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dx = F(x)$  に対し、

フーリエ逆変換を

$$\mathcal{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n F(x)e^{ixt} dx$$

(フーリエ逆変換)

と定義する。

(注)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx$  を広義積分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  の**主値**という。

**定理**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が有界かつ絶対可積分で、任意有界区間で区分的に滑らかであれば、

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt} dt = F(x) \text{ のとき}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n F(x)e^{ixt} dx = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$$

が成り立つ。

この定理を**反転公式**という。

< 反転公式の証明 >

補題

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin au}{u} du = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : a > 0 \\ 0 & : a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & : a < 0 \end{cases}$$

(証明) ①  $a > 0$  のとき p29 の結果より  $au = t$  とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin au}{u} du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\sin au}{u} du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{an} \frac{\sin t}{\frac{t}{a}} \cdot \frac{1}{a} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{an} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

②  $a < 0$  のとき  $au = -t$  とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin au}{u} du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\sin au}{u} du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{-an} \frac{\sin(-t)}{-\frac{t}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{-an} -\frac{\sin t}{t} dt = -\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

[反転公式の証明]

正数  $R$  に対し、 $g_R(x) = \int_{-R}^R f(u)e^{-ixu} du$ ,  $g_{\infty}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu} du$  とおくと  $f$  は絶対可積分より

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |g_{\infty}(x) - g_R(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{|u| > R} f(u)e^{-ixu} du \right| \leq \int_{|u| > R} |f(u)| du \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

だから、任意の正数  $n$  と実数  $t$  に対し、

$$\left| \int_{-n}^n g_{\infty}(x)e^{ixt} dx - \int_{-n}^n g_R(x)e^{ixt} dx \right| \leq \int_{-n}^n |g_{\infty}(x) - g_R(x)| dx \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

よって  $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu} du$  に対し、

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n F(x)e^{ixt} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu} du \right\} e^{ixt} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n g_{\infty}(x)e^{ixt} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n g_R(x)e^{ixt} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \left( \int_{-R}^R f(u)e^{-ixu} du \right) e^{ixt} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \left\{ \int_{-R}^R f(u)e^{ix(t-u)} du \right\} dx \end{aligned}$$

ここで  $f(u)e^{ix(t-u)}$  は  $x$  に関して連続、 $u$  に関して区分的に滑らかだから

$(u, x) \in [-R, R] \times [-n, n]$  の範囲で積分順序が交換できる。(p109)

従って

$$S_n(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left\{ \int_{-n}^n f(u)e^{ix(t-u)} dx \right\} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ix(t-u)} dx \right\} f(u) du$$

< 反転公式の証明 2 >

[反転公式の証明の続き]

実数  $a$  に対し  $\rho_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixa} dx$  とおくと  $a \neq 0$  のとき  $\rho_n(a) = \frac{\sin(na)}{\pi a}$ ,

$a = 0$  のとき  $\rho_n(0) = \frac{n}{\pi}$  となる。よつて  $S_n(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(u) \rho_n(t-u) du = (\rho_n * f)(t) = (f * \rho_n)(t)$

$= \int_{-\infty}^0 f(t-s) \rho_n(s) ds + \int_0^{\infty} f(t-s) \rho_n(s) ds$  である。ここで  $\rho_n(-a) = \rho_n(a)$

より  $\int_{-\infty}^0 f(t-s) \rho_n(s) ds = \int_0^{\infty} f(t+u) \rho_n(u) du$  と書けるから

$S_n(t) = \int_0^{\infty} \{f(t+s) + f(t-s)\} \rho_n(s) ds$  と書ける。ここで補題より

$\int_0^{\infty} \rho_n(s) ds = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ns)}{\pi s} ds = \frac{1}{2}$  だから  $S_n(t) - \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\} = I_n$  とおくと

$$I_n = S_n(t) - \{f(t-0) + f(t+0)\} \int_0^{\infty} \rho_n(s) ds$$

$$= \int_0^{\infty} \{f(t-s) + f(t+s) - f(t-0) - f(t+0)\} \rho_n(s) ds = II_n + III_n$$

ただし

$$II_n = \int_0^{\infty} \{f(t-s) - f(t-0)\} \rho_n(s) ds, \quad III_n = \int_0^{\infty} \{f(t+s) - f(t+0)\} \rho_n(s) ds \text{ とする。}$$

今  $F(s) = \frac{f(t+s) - f(t+0)}{\pi s}$  とおくと p15 より  $\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} F(s) = \frac{1}{\pi} f'(t+0)$  より  $F(s)$  は区間  $[0, 1]$  で区分的に連続かつ有界である。また

$$\tilde{F}(s) = \begin{cases} F(s) & : 0 < s \leq 1 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}, \quad G(s) = \begin{cases} \frac{f(t+s)}{\pi s} & : s \geq 1 \\ 0 & : s < 1 \end{cases}$$

とおくと  $\tilde{F}$  と  $G$  は有界かつ絶対可積分だから、リーマンルベークの補題 (p36) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(s) \sin(ns) ds = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \sin(ns) ds = 0$$

である。従つて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{f(t+s) - f(t+0)}{\pi s} \cdot \sin(ns) ds = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{f(t+s)}{\pi s} \sin(ns) ds = 0$$

$$\text{一方 } \int_1^{\infty} \frac{f(t+0)}{\pi s} \sin(ns) ds = \frac{f(t+0)}{\pi} \int_n^{\infty} \frac{\sin u}{\frac{u}{n}} \cdot \frac{1}{n} du = \frac{f(t+0)}{\pi} \int_n^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} III_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \frac{f(t+s) - f(t+0)}{\pi s} \cdot \sin(ns) ds + \int_1^{\infty} \frac{f(t+s)}{\pi s} \sin(ns) ds - \int_1^{\infty} \frac{f(t+0)}{\pi s} \sin(ns) ds \right\} = 0$$

同様に  $\lim_{n \rightarrow \infty} II_n = 0$  。よつて  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) - \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (II_n + III_n) = 0$

(証明終)

## &lt; フーリエ逆変換の練習 &gt;

$f(t)$  を絶対可積分で有界かつ任意有界区間で区分的になめらかな関数とする。

フーリエ変換  $\mathcal{F}[f(t)] = F(x)$  に対して、反転公式から

$$\mathcal{F}^{-1}[F(x)] = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$$

である。ここで  $f(t)$  が連続関数のときは  $f(t+0) = f(t-0) = f(t)$  であるから

反転公式は

$$\mathcal{F}^{-1}[F(x)] = f(t) \quad (f(t) \text{ が連続のとき})$$

となる。

**例 1**  $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & : t > 0 \\ 0 & : t \leq 0 \end{cases}$  は  $t=0$  のとき不連続、 $t > 0$  または  $t < 0$  の範囲では連続である。

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{1+ix}, \quad \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+ix}\right] = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \begin{cases} e^{-t} & : t > 0 \\ \frac{1}{2} & : t = 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

**問 1** 次のフーリエ逆変換を求めよ。(ただし  $\alpha > 0$ )

$$(1) \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}\right]$$

$$(2) \mathcal{F}^{-1}\left[\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\right]$$

$$(3) \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2\sin(4x)}{x}\right]$$

**例 2**  $\mathcal{F}^{-1}[F_1(x)] = f_1(t)$ ,  $\mathcal{F}^{-1}[F_2(x)] = f_2(t)$  のとき  $\mathcal{F}^{-1}[a_1F_1(x) + a_2F_2(x)] = a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$  より

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+1}\right] &= \frac{1}{6}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{6}{x^2+9}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{6}e^{-3|t|} + \frac{1}{2}e^{-|t|} \end{aligned}$$

**問 2** 次のフーリエ逆変換を求めよ。

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{3}{x^2+1} + e^{-x^2}\right]$$

< デルタ関数 >

1929年にイギリスの物理学者 P.Dirac は、量子力学を記述するには次のような疑似関数  $\delta(t)$

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

が必要であると唱えた。そして Dirac は  $\delta(t)$  に関する導関数等のさまざまな形式的な計算を行って、量子力学の研究を進めていった。

1950年、フランスの数学者 L.Schwartz は Dirac の  $\delta(t)$  およびそれに関する計算の数学的な定義づけに成功した。定義の前にそのアイデアを紹介する。

正数  $\varepsilon > 0$  に対し、関数  $f_\varepsilon(t)$  を

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & : |t| < \varepsilon \\ 0 & : |t| \geq \varepsilon \end{cases}$$

とすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dt = 1 \quad \text{であり、} \quad t \neq 0 \quad \text{ならば} \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} f_\varepsilon(t) = 0$$

だから、 $f_\varepsilon(t)$  は  $\delta(t)$  を近似していると考えられる。そのように考え、形式的な計算を試みる。急減少関数  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対し、 $\psi(t) = \int \varphi(t) dt$  とおく。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) \varphi(t) dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(t) dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \psi(t) \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \{ \psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon) \}}{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (2\varepsilon)} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{2} = \varphi(0) \end{aligned}$$

よって  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対し、 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$  である。また部分積分の公式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \varphi(t) dt = \left[ \delta(t) \varphi(t) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi'(t) dt = -\varphi'(0)$$

となる。このような形式的な計算を考慮に入れることによって、 $\delta$  を関数としてではなく、むしろ  $\delta$  を

$$\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \varphi(0)$$

をみたす写像 (すなわち  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ ) とみなしたのである。そうすれば、 $\delta$  の導関数  $\delta'$  も

$$\delta' : \varphi \mapsto -\varphi'(0)$$

をみたす写像として得られる。そこで  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  の元  $\varphi$  から  $\mathbb{C}$  (複素数全体) への写像としてデルタ関数等の超関数を定義した。

## &lt; 超関数 &gt;

急減少関数  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に複素数の値を対応させる関数  $T$

$$T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

が次の性質 (1),(2) をもつとき、 $T$  を超関数という。

(1) (線形性) 任意の  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  に対し

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

(2) (連続性) 関数列  $\{\varphi_n\}$  ( $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ) が、任意の非負整数  $m$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l+k \leq m} \max_{t \in \mathbb{R}} |t|^k \cdot \left| \frac{d^l}{dt^l} \varphi_n(t) \right| = 0 \quad (l, k \text{ は非負整数})$$

をみたせば  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = 0$  をみたす。

(注) 実際に本書で扱われる超関数の例はすべて上の条件 (1),(2) をみたしている。

**例 1**  $f(t)$  は任意有限区間で積分可能であり、ある正定数  $C(> 0)$  と自然数  $n$  が存在して

$$|f(t)| \leq C(1 + |t|)^n \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立っているとする。このとき

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

と定めると、 $T_f$  は超関数となる。この超関数  $T_f$  を普通の関数  $f$  と同一視することにより、超関数を普通の関数の一般化と考えることができる。

**例 2** 実数  $\alpha$  に対し

$$\delta_\alpha(\varphi) = \langle \delta_\alpha, \varphi \rangle = \varphi(\alpha) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

とおくと  $\delta_\alpha$  は超関数である。この  $\delta_\alpha$  を「点  $\alpha$  に台をもつディラックのデルタ ( $\delta$ ) 関数」または簡単に「点  $\alpha$  におけるデルタ関数」という。なお  $\alpha = 0$  のとき  $\delta_0$  を単に「デルタ関数」という。

**問** 正数  $\varepsilon(> 0)$  と実数  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対し、 $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & : |t - \alpha| < \varepsilon \\ 0 & : |t - \alpha| \geq \varepsilon \end{cases}$  とおく。

任意の  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対し、 $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} T_{f_\varepsilon}(\varphi) = \delta_\alpha(\varphi)$  であることを証明せよ。

< デルタ関数の近似関数列 >

フーリエ逆変換の収束の証明より、 $\rho_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(nt)}{\pi t} & : t \neq 0 \\ \frac{n}{\pi} & : t = 0 \end{cases}$  とおくと

絶対可積分で有界かつ任意有界区間で区分的に滑らかな関数  $f$  に対して

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f * \rho_n)(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\rho_n(s)ds = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$$

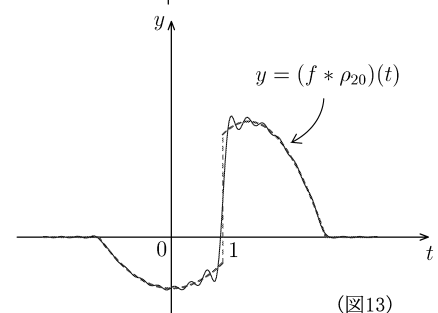
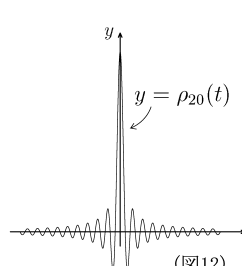
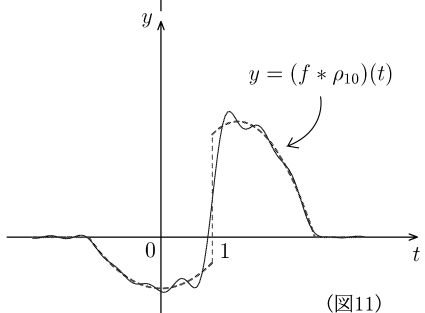
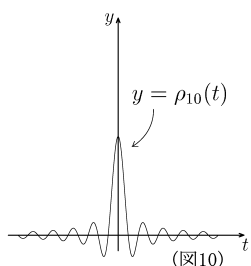
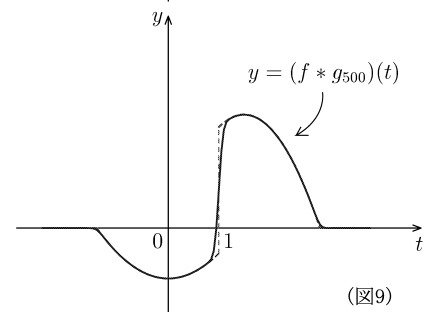
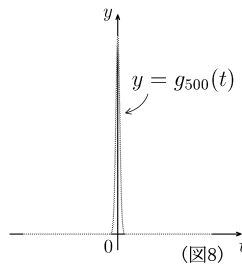
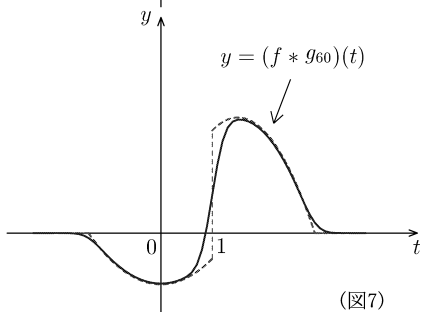
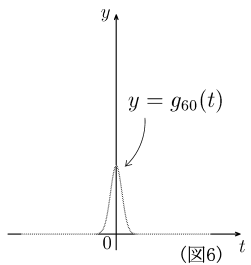
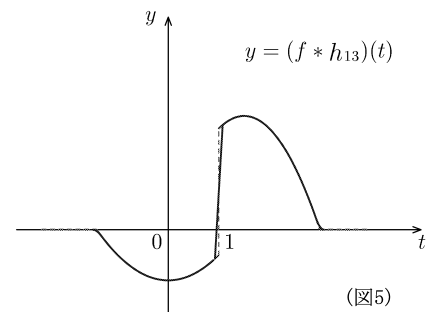
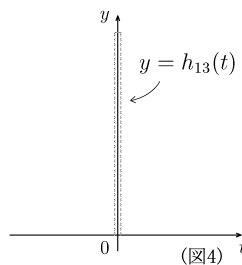
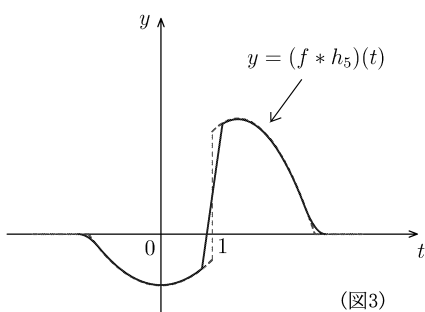
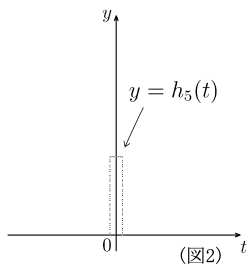
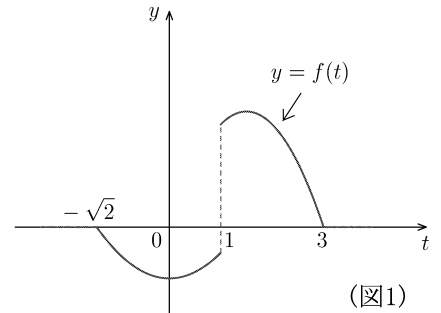
が成立する。特に  $f$  が連続関数の場合は  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f * \rho_n)(t) = f(t) = \delta_t(f)$  が成立する。そこで  $(*)$  式が成り立つような関数列  $\{\rho_n(t)\}$  をデルタ関数の近似関数列ということにする。このような関数列は  $\{\rho_n\}$  以外にもある。

例  $h_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & : |t| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & : |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$      $\varphi$      $g_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n}{4}t^2}$

もデルタ関数の近似関数列である。 $f(t)$  が図1のような関数の場合、

$h_n(t)$  のグラフ (図2, 図4) と  $(f * h_n)(t)$  のグラフ (図3, 図4)、  
 $g_n(t)$  のグラフ (図6, 図8) と  $(f * g_n)(t)$  のグラフ (図7, 図8)、  
 $\rho_n(t)$  のグラフ (図10, 図11) と  $(f * \rho_n)(t)$  のグラフ (図11, 図13)

を見て、収束の様子をわかってほしい。



## &lt; 超関数のフーリエ変換 1 &gt;

**補題** 任意の  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対し、 $\mathcal{F}[\tilde{F}] = \varphi$  を満たす  $\tilde{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  が存在する。

(証明)  $\mathcal{F}[\varphi] = F$  とすると  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-ixt} dt = F(x)$  である。反転公式より

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx = \varphi(t) \text{ である。この式で } x \rightarrow -s \text{ と置き換える}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-s)e^{-ist}(-1)ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-s)e^{-ist} ds \text{ である。}$$

$$\text{さらに } t \rightarrow x \text{ と置き換えると } \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(-s)e^{-isx} ds \text{ である。よって}$$

$$\tilde{F}(t) = \frac{1}{2\pi} F(-t) \text{ とおくと } \mathcal{F}[\tilde{F}] = \varphi \text{ となる。} \quad (\text{証明終})$$

急減少関数  $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対して、 $\mathcal{F}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt$  だから超関数  $T_{\mathcal{F}[f]}$  は

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{F}[f]}(\varphi) &= \langle T_{\mathcal{F}[f]}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](x) \cdot \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt \right\} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-ixt} dx \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \mathcal{F}[\varphi](t) dt = \langle T_f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \end{aligned}$$

となる。そこで、任意の超関数  $T$  に対し、 $T$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}[T]$  を

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

で定義する。また補題より任意の  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対し、 $\mathcal{F}[\tilde{F}] = \varphi$  を満たす  $\tilde{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  が存在する。反転公式より  $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] = \tilde{F}$  である。すなわち任意の  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対し  $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  が存在する。そこで、超関数  $T$  の逆フーリエ変換を

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle$$

で定義する。

**例**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を有界で絶対可積分かつ任意有界区間で区分的に滑らかな関数とする。

このとき  $T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$  で定められた超関数  $T_f$  のフーリエ変換

$$\langle \mathcal{F}[T_f], \varphi \rangle = \langle T_f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}[\varphi](t)dt \text{ に対し、そのフーリエ逆変換は}$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T_f]], \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[T_f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle T_f, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] \rangle \text{ となる。}$$

ここで補題より  $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] = \mathcal{F}[\tilde{F}] = \varphi$  だから

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T_f]](\varphi) = T_f(\varphi)$$

となる。一方  $f$  に対し  $\tilde{f}(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$  とおくと  $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \tilde{f}$  となる。

この理由は  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \tilde{f}(t)| dt = 0$  より

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\varphi(t)dt = T_{\tilde{f}}(\varphi) \text{ が成り立つことによる。}$$

< 超関数のフーリエ変換 2 >

**例 1**  $T = \delta_\alpha$  ( $\alpha$  におけるデルタ関数) の場合

$$\langle \mathcal{F}[\delta_\alpha], \varphi \rangle = \langle \delta_\alpha, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-i\alpha t} dt = \langle T_{e^{-i\alpha\cdot}}, \varphi \rangle$$

ここで関数  $e^{-i\alpha\cdot}$  は  $t$  に対し  $e^{-i\alpha t}$  を対応させる関数である。

この結果  $\mathcal{F}[\delta_\alpha] = T_{e^{-i\alpha\cdot}}$  を略して  $\mathcal{F}[\delta_\alpha](x) = e^{-i\alpha x}$  と書くこともある。

**例 2**  $T = T_1$  の場合

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T_1], \varphi \rangle &= \langle T_1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times \mathcal{F}[\varphi](x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \mathcal{F}[\varphi](x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-ixt} dt \right\} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left\{ \int_{-R}^R \varphi(t)e^{-ixt} dt \right\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left\{ \int_{-n}^n \varphi(t)e^{-ixt} dx \right\} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left( \int_{-n}^n e^{-ixt} dx \right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{2\sin(nt)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) 2\pi\rho_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi(\varphi * \rho_n)(0) = 2\pi\varphi(0) \\ &= \langle 2\pi\delta_0, \varphi \rangle \quad \text{より } \mathcal{F}[T_1] = 2\pi\delta_0 \text{ となる。これを略して } \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta_0 \text{ と書くこともある。} \end{aligned}$$

**例 3** 実数  $\alpha$  に対し、関数  $e^{i\alpha\cdot} : t \mapsto e^{i\alpha t}$  に対応する超関数  $T_{e^{i\alpha\cdot}}$  のフーリエ変換を求める。  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対して

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T_{e^{i\alpha\cdot}}], \varphi \rangle &= \langle T_{e^{i\alpha\cdot}}, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \mathcal{F}[\varphi](x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{i\alpha x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-ixt} dt \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left( \int_{-n}^n e^{i(\alpha-t)x} dx \right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) 2\pi\rho_n(\alpha-t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi(\varphi * \rho_n)(\alpha) = 2\pi\varphi(\alpha) = \langle 2\pi\delta_\alpha, \varphi \rangle \end{aligned}$$

より  $\mathcal{F}[T_{e^{i\alpha\cdot}}] = 2\pi\delta_\alpha$  となる。これを略して  $\mathcal{F}[e^{i\alpha\cdot}] = 2\pi\delta_\alpha$  と書くこともある。

**例 4** 実数  $\alpha$  に対し、関数  $\cos(\alpha\cdot) : t \mapsto \cos(\alpha t)$  に対応する超関数  $T_{\cos(\alpha\cdot)}$  のフーリエ変換を求める。  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対して

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T_{\cos(\alpha\cdot)}], \varphi \rangle &= \langle T_{\cos(\alpha\cdot)}, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) \mathcal{F}[\varphi](x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} \mathcal{F}[\varphi](x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \mathcal{F}[\varphi](x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \mathcal{F}[\varphi](x) dx \\ &= \frac{1}{2} \{ 2\pi\varphi(\alpha) + 2\pi\varphi(-\alpha) \} = \pi\delta_\alpha(\varphi) + \pi\delta_{-\alpha}(\varphi) = \langle \pi(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}), \varphi \rangle \end{aligned}$$

より  $\mathcal{F}[T_{\cos(\alpha\cdot)}] = \pi(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})$  となる。これを略して、  $\mathcal{F}[\cos(\alpha\cdot)] = \pi(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})$  と書くこともある。

**問** 実数  $\alpha$  に対し、関数  $\sin(\alpha\cdot) : t \mapsto \sin(\alpha t)$  に対応する超関数  $T_{\sin(\alpha\cdot)}$  のフーリエ変換を求めよ。

## &lt; フーリエ変換の練習 &gt;

**問 1** 関数  $f(t)$  が次の各場合に、 $f(t)$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}[f(t)]$  を求めよ。

ただし  $K, n$  は正の定数とする。

$$(1) f(t) = \begin{cases} K & : |t| \leq n \\ 0 & : |t| > n \end{cases} \quad (2) f(t) = \begin{cases} t & : |t| \leq n \\ 0 & : |t| > n \end{cases}$$

$$(3) f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases} \quad (4) f(t) = e^{-3|t|}$$

**問 2**  $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt = F(x)$  とおく。

(1)  $\frac{d}{dx}F(x)$  を  $F(x)$  を用いて表せ。

(2)  $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  を用いて  $F(x)$  を求めよ。

**問 3**  $\mathcal{F}[f(t)] = F(x)$  とする。  $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-3|t-u|} du$  のフーリエ変換を求めよ。

**問 4** 次のフーリエ逆変換を求めよ。

$$(1) \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2+ix}\right] \quad (2) \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{3}{x^2+1}\right]$$

$$(3) \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{x^2}{4}}\right] \quad (4) \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2\sin(3x)}{x}\right]$$

**問 5** 有界かつ区分的に滑らかで絶対可積分である関数  $f(t)$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}[f(t)] = F(x)$  に対し、 $F(x)$  のフーリエ逆変換が

$$\mathcal{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (f * \rho_n)(t)$$

と表されることを示せ。ただし  $\rho_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(nt)}{\pi t} & : t \neq 0 \\ \frac{\pi}{n} & : t = 0 \end{cases}$  とする。

**問 6** 関数  $f(t)$  は絶対可積分で有界かつ任意有限区間で区分的に連続であるとする。今、正数  $\varepsilon (> 0)$  に対し、

$$k_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & : |t| \leq \varepsilon \\ 0 & : |t| > \varepsilon \end{cases}$$

とおくとき  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (f * k_\varepsilon)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$  が成り立つことを示せ。

< ラプラス変換の導出 >

正定数  $\sigma (> 0)$  と関数  $f(t)$  に対して,

$$f_{\sigma}(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

とおき,  $f_{\sigma}(t)$  のフーリエ変換を  $F_{\sigma}(x)$  とおくと

$$F_{\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma}(t)e^{-ixt} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+ix)t} dt$$

となる。  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  とおくと  $F_{\sigma}(x) = F(\sigma + ix)$  となる。

$F_{\sigma}(x)$  のフーリエ逆変換は

$$f_{\sigma}(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\sigma}(x)e^{ixt} dx$$

となるので  $t > 0$  のとき  $f_{\sigma}(t) = f(t)e^{-\sigma t}$  より

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\sigma}(x)e^{ixt} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\sigma}(x)e^{(\sigma+ix)t} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n F(\sigma + ix)e^{(\sigma+ix)t} dx && (s = \sigma + ix \text{ とおく}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st} ds \end{aligned}$$

となる。そこで  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  をラプラス変換といい,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (= F(s)) \quad \dots (\text{ラプラス変換})$$

と書くことにすると, その逆変換は

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st} ds \quad \dots (\text{ラプラス逆変換})$$

となる。

## &lt; ラプラス変換 1 &gt;

関数  $f(t)$  のラプラス変換は

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

である。ここで  $s$  は一般には複素数  $\sigma + ix$  で、その実数部分  $\sigma$  が正の数である。(これを  $\operatorname{Re}(s) > 0$  と書く) ただし、ラプラス変換を求めるときには、複素数であることを意識しなくても良い。 $s$  を正の定数と考えて、計算しても良い。

$$\begin{aligned} \text{例 1} \quad \mathcal{L}[t] &= \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b te^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[ t \times \frac{1}{-s} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \frac{1}{s} e^{-st} dt \right\} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{b}{s} e^{-sb} + \left[ -\frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=b} \right\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{b}{-se^{sb}} - \frac{1}{s^2} e^{-sb} + \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

(注) ここで  $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{sb}} = 0$  であり、ロピタルの定理より

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^{sb}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{db}(b)}{\frac{d}{db}(e^{sb})} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{se^{sb}} = 0$$

となる。

例 2 実数定数  $\alpha$  に対し、 $\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$  を求める。

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t} dt$$

この積分は  $s > \alpha$  のときのみ存在する。そこで  $s > \alpha$  になる  $s$  に対して、ラプラス変換を求めると、

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{s-\alpha}$$

となる。

問 次のラプラス変換を求めよ

(1)  $\mathcal{L}[1]$

(2)  $\mathcal{L}[e^{-t}]$

(3)  $\mathcal{L}[e^{it}]$

< ラプラス変換 2 >

ラプラス変換の性質をいくつか示す。

$$\boxed{1} \quad \mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\boxed{2} \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ のとき } \mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

$$\boxed{3} \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ のとき } \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$$

(証明)

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt = F(s - \alpha)$$

$$\boxed{4} \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ のとき } \mathcal{L}[f_{\alpha}(t)] = e^{-\alpha s} F(s) \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{ここで } f_{\alpha}(t) = \begin{cases} f(t - \alpha) & : t \geq \alpha \\ 0 & : t < \alpha \end{cases}$$

(証明)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_{\alpha}(t)] &= \int_{\alpha}^{\infty} f(t - \alpha) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s(\tau + \alpha)} d\tau \quad (t - \alpha = \tau) \\ &= e^{-\alpha s} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-\alpha s} F(s) \end{aligned}$$

$$\text{例 1} \quad \mathcal{L}[e^{ikt}] = \int_0^{\infty} e^{(ik-s)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{ik - s} e^{(ik-s)t} \right]_{t=0}^{t=b} = \frac{1}{s - ik} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad \mathcal{L}[\cos(kt)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}\right] = \frac{1}{2} \{ \mathcal{L}[e^{ikt}] + \mathcal{L}[e^{-ikt}] \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - ik} + \frac{1}{s + ik} \right\} = \frac{s}{s^2 + k^2} \end{aligned}$$

問 次のラプラス変換を求めよ。ただし  $\alpha, k$  は実数の定数とする。(2)~(4) のラプラス変換の変数  $s$  は  $s > \alpha$  とする。

(1)  $\mathcal{L}[\sin(kt)]$

(2)  $\mathcal{L}[e^{(\alpha+ki)t}]$

(3)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cos(kt)]$

(4)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \sin(kt)]$

## &lt; ラプラス変換 3 &gt;

$$\boxed{5} \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ のとき } \mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$$

(証明)  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  を  $s$  で微分すると

$$F'(s) = \int_0^{\infty} f(t)(-t)e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = -\mathcal{L}[tf(t)]$$

$$\boxed{6} \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ のとき } \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

問 次のラプラス変換を求めよ。ただし  $\alpha$  と  $k$  は実数の定数とする。(4),(5) のラプラス変換の変数  $s$  は  $s > \alpha$  と考える。

(1)  $\mathcal{L}[t^2]$

(2)  $\mathcal{L}[t^3]$

(3)  $\mathcal{L}[t^n]$

(4)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$

(5)  $\mathcal{L}[te^{\alpha t}]$

(6)  $\mathcal{L}[t \cos(kt)]$

(7)  $\mathcal{L}[t \sin(kt)]$

(8)  $\mathcal{L}[\sinh(kt)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt})\right]$

(9)  $\mathcal{L}[\cosh(kt)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt})\right]$

< ラプラス変換 4 >

$\int_0^\infty |f(t)|dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n |f(t)|dt$  が有限の値に収束するとき、関数  $f(t)$  は絶対可積分という。

□7  $f(t)e^{-st}$  および  $f'(t)e^{-st}$  が共に絶対可積分であるとき、

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ であれば } \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

(証明) 絶対可積分より  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[ f(t)e^{-st} \right]_0^b + \int_0^b f(t)se^{-st} dt \right\} \\ &= 0 - f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned} \quad (\text{証明終})$$

□8  $f(t)e^{-st}$ ,  $f'(t)e^{-st}$ ,  $f''(t)e^{-st}$  が共に絶対可積分であり、

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ であれば } \mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

(証明) □7より  $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$

よって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= \mathcal{L}[(f'(t))'] = s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) \\ &= s \{ s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \} - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

問  $f(t)e^{-st}$ ,  $f'(t)e^{-st}$ ,  $f''(t)e^{-st}$ ,  $f'''(t)e^{-st}$  が共に絶対可積分であり、 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  のとき  $\mathcal{L}[f'''(t)]$  を求めよ。

## &lt; ラプラス変換 5 &gt;

$t \geq 0$  で定義されている 2 つの関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  に対し,  $t < 0$  では常に  $f(t) = 0$ ,  $g(t) = 0$  と定めると,  $f(t)$  と  $g(t)$  の合成積は

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

となる。これは定義域が  $[0, \infty)$  である関数の合成積である。ラプラス変換を考えるときは常に  $t \geq 0$  の範囲で考えるので, 合成積は  $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$  ( $= \int_0^t f(u)g(t-u)du$ ) とする。

9

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ,  $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$  のとき

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s)G(s)$$

(証明) 正定数の  $\sigma$  に対し

$$f_{\sigma}(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}, \quad g_{\sigma}(t) = \begin{cases} g(t)e^{-\sigma t} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

の合成積は

$$\begin{aligned} \text{(i) } t \geq 0 \text{ のとき } (f_{\sigma} * g_{\sigma})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma}(t-u)g_{\sigma}(u)du = \int_0^t f_{\sigma}(t-u)g_{\sigma}(u)du \\ &= \int_0^t f(t-u)e^{-\sigma(t-u)}g(u)e^{-\sigma u}du = e^{-\sigma t} \int_0^t f(t-u)g(u)du = e^{-\sigma t}(f * g)(t) \end{aligned}$$

$$\text{(ii) } t < 0 \text{ のとき } (f_{\sigma} * g_{\sigma})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\sigma}(t-u)}_0 g_{\sigma}(u)du = 0$$

一方フーリエ変換の性質より

$$\mathcal{F}[(f_{\sigma} * g_{\sigma})(t)] = \mathcal{F}[f_{\sigma}(t)] \times \mathcal{F}[g_{\sigma}(t)] \quad \dots (*)$$

$$(*) \text{ 左辺} = \int_{-\infty}^{\infty} (f_{\sigma} * g_{\sigma})(t)e^{-ixt}dt = \int_0^{\infty} (f * g)(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt = \mathcal{L}[(f * g)(t)](\sigma + ix)$$

$$(*) \text{ 右辺} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt \times \int_0^{\infty} g(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt = F(\sigma + ix) \times G(\sigma + ix)$$

$\sigma + ix = s$  とおくと

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = F(s) \times G(s) \quad (\text{証明終})$$

< ラプラス変換 6 >

補題 正定数  $b(> 0)$  に対し  $I = \int_0^\infty e^{-(\tau - \frac{b}{\tau})^2} d\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(証明)  $\lambda = \frac{b}{\tau}$  とおくと

$$\textcircled{1} I = \int_0^\infty e^{-(\tau - \frac{b}{\tau})^2} d\tau = \int_\infty^0 e^{-(\frac{b}{\lambda} - \lambda)^2} \left(-\frac{b}{\lambda^2}\right) d\lambda = \int_0^\infty \frac{b}{\lambda^2} e^{-(\lambda - \frac{b}{\lambda})^2} d\lambda$$

$\tau$  と  $\lambda$  をおきかえると

$$\textcircled{2} I = \int_0^\infty e^{-(\tau - \frac{b}{\tau})^2} d\tau = \int_0^\infty e^{-(\lambda - \frac{b}{\lambda})^2} d\lambda$$

①+②より

$$2I = \int_0^\infty \left(1 + \frac{b}{\lambda^2}\right) e^{-(\lambda - \frac{b}{\lambda})^2} d\lambda$$

ここで  $x = \lambda - \frac{b}{\lambda}$  とおくと  $\frac{dx}{d\lambda} = 1 + \frac{b}{\lambda^2}$  より

$$2I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

よって  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (証明終)

定理

$$\mathcal{L} \left[ \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \right] = e^{-\alpha\sqrt{s}}$$

(証明)  $\tau = \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}$  とおくと  $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\alpha}{4}t^{-\frac{3}{2}}$  より

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \right] &= \int_0^\infty \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} e^{-st} dt \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^0 e^{-\tau^2} e^{-s(\frac{\alpha}{2\tau})^2} d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\tau^2 - (\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau})^2} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\left(\tau - \frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2} d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = e^{-\alpha\sqrt{s}} \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

## &lt; ラプラス変換 7 &gt;

ラプラス変換の性質を表にまとめる。ここで  $a, a_1, a_2$  は実数定数,  $\alpha$  は正定数,  $n$  は自然数とする。

原関数 $f(t)$	像関数 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
$f(\alpha t) \quad (\alpha > 0)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
$f(t - \alpha) \quad (t \geq \alpha)$ (ただし $t < \alpha$ のとき $f(t - \alpha) = 0$ とする)	$e^{-\alpha s} F(s) \quad (\alpha > 0)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f'''(t)$	$s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$
$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-u) f_2(u) du$	$F_1(s) F_2(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - \alpha)$	$e^{-s\alpha}$

< ラプラス変換 8 >

ラプラス変換の対応表 ( $a, \omega, k$  は実定数,  $n$  は自然数)

原関数 $f(t)$	像関数 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a} \quad (s > a)$
$te^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2} \quad (s > a)$
$t^2e^{at}$	$\frac{2}{(s-a)^3} \quad (s > a)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (s > a)$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (s > a)$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\sinh(kt) = \frac{1}{2} (e^{kt} - e^{-kt})$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
$\cosh(kt) = \frac{1}{2} (e^{kt} + e^{-kt})$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$
$u(t-a) = \begin{cases} 1 & : t \geq a \\ 0 & : t < a \end{cases}$ ( $a > 0$ )	$\frac{1}{se^{sa}}$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}$

## &lt; ラプラス逆変換 1 &gt;

ラプラス変換はフーリエ変換の一種であるから、フーリエ変換と同様に反転公式が成り立つ。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \text{ のとき}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\}$$

特に  $f(t)$  が連続であるときは  $f(t-0) = f(t+0) = f(t)$  より  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$  となる。

このワークブックでは連続の場合だけを扱うことにする。次の対応関係がある。

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$
$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$	$f(\alpha t)$
$F(s-a)$	$e^{at} f(t)$
$e^{-\alpha s} F(s) \quad (\alpha > 0)$	$f(t-\alpha) \quad (t \geq \alpha)$
$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$
$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	$f''(t)$
$s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$	$f'''(t)$
$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$
$F'(s)$	$-tf(t)$
$\frac{d^n}{ds^n} F(s)$	$(-t)^n f(t)$
$F_1(s)F_2(s)$	$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-u)f_2(u)du$

ここで  $a_1, a_2, a$  は実数定数,  $\alpha$  は正定数,  $n$  は自然数とする。

< ラプラス逆変換 2 >

問 次の対応表を完成させよ。ただし、 $a, \omega$  は実数の定数、 $\alpha$  は正定数、 $n$  は自然数とする。

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$\frac{1}{s}$	
$\frac{1}{s^2}$	
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
$\frac{1}{s-a} \quad (s > a)$	
$\frac{1}{(s-a)^2} \quad (s > a)$	
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	
$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (s > a)$	
$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (s > a)$	
$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	
$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	
$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	
$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	
$\frac{e^{-\alpha s}}{s}$	
$e^{-\alpha\sqrt{s}}$	

## &lt; ラプラス逆変換 3 &gt;

例 1  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]$  を求めたい。 $\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$  とおき右辺を

通分すると  $\frac{(A+B)s - Ab - aB}{(s-a)(s-b)}$  となり分子が 1 となるため

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-aB=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{a-b}, \quad B = -\frac{1}{a-b}$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{a-b}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right\} = \frac{1}{a-b}\{e^{at} - e^{bt}\} \end{aligned}$$

例 2  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}\right] = \frac{1}{b}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}\right] = \frac{1}{b}e^{at}\sin(bt)$

問 次のラプラス逆変換を求めよ。

(1)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - s - 2}\right]$

(2)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 4}\right]$

(3)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 4s + 5}\right]$

## &lt; ラプラス逆変換 4 &gt;

$$\text{例 1} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s-a)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-a} + \frac{a}{(s-a)^2} \right] = e^{at} + ate^{at}$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s-a)^2 + b^2} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{a}{b} \times \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \right] \\ &= e^{at} \cos(bt) + \frac{a}{b} e^{at} \sin(bt) \end{aligned}$$

問 次のラプラス逆変換を求めよ。

$$(1) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s-3}{s^2-8s+16} \right]$$

$$(2) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s^2-6s+9} \right]$$

$$(3) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+2}{s^2-2s+5} \right]$$

$$(4) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s}{s^2-4s+5} \right]$$

## &lt; ラプラス逆変換 5 &gt;

問 1 部分分数分解により次のラプラス逆変換を求めよ。

$$(1) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+3}{(s+1)(s-2)} \right]$$

$$(2) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s-1)(s-2)} \right]$$

例  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  のとき  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-a} \right] = e^{at}$  より

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{F(s)}{s-a} \right] = (e^{at} * f)(t) = \int_0^t e^{a(t-u)} f(u) du$$

問 2  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  のとき、次のラプラス逆変換を求めよ。(ただし  $a \neq b$ )

$$(1) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{F(s)}{(s-a)^2} \right]$$

$$(2) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{F(s)}{(s-a)(s-b)} \right]$$

$$(3) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{F(s)}{(s-a)^2 + b^2} \right]$$

## &lt; ラプラス逆変換 6 &gt;

問 次のラプラス逆変換を求めよ。ただし  $a, b, c$  は定数。

$$(1) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s^3} \right]$$

$$(2) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a + bs}{s^2 + 1} \right]$$

$$(3) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + 4} \right]$$

$$(4) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 - 1} \right]$$

$$(5) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s - 1}{(s - 2)^2} \right]$$

$$(6) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s - 3}{(s - 2)(s + 4)} \right]$$

$$(7) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-2}{(s - 2)^3} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{(s - 2)^2} \right) \right]$$

$$(8) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{16}{s^4 - 16} \right]$$

## &lt; 常微分方程式への応用 1 &gt;

**例題** 微分方程式  $\frac{dx}{dt} + x = e^t$  ( $t > 0$ ) を初期条件  $x(0) = 1$  の下で解け。

(解) 解を  $x(t)$  とおき, そのラプラス変換を  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  とおくと

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$

である。微分方程式の両辺のラプラス変換をとると

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt} + x\right] = \mathcal{L}[e^t]$$

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s-1}$$

↓

$$X(s) = \frac{1 + \frac{1}{s-1}}{s+1} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

よって解  $x(t)$  は

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s-1)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right\}\right] = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t \end{aligned}$$

**問** 次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)  $\frac{dx}{dt} = kx$ ,  $x(0) = a$

(2)  $\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 1$

## &lt; 常微分方程式への応用 2 &gt;

例題  $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

(解) 解  $x(t)$  のラプラス変換を  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  とおくと

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s), \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s)$$

$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$  より, 微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)(s-1)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} \text{ より答えは}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{s+2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{s-1}\right)\right] = \underline{-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t}$$

問 次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

(2)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$

## &lt; 常微分方程式への応用 3 &gt;

問 次の常微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

$$(2) \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$$

< 常微分方程式への応用 4 >

例題  $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$

(解)  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s), \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  とおき, 両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s) + 5sX(s) + 6X(s) = F(s)$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 5s + 6}$$

ここで  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 5s + 6}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right] = e^{-2t} - e^{-3t}$  より

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2 + 5s + 6}\right] = (e^{-2t} - e^{-3t}) * f(t)$$

$$= \int_0^t \{e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\} f(u) du$$

(注) この  $x(t)$  が例題の解であることを確かめる計算方法については P117 を参照せよ。

問 ラプラス変換を用いて, 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

(1)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$

(2)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$

## &lt; 常微分方程式への応用 5 &gt;

## 例題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

(解)  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ,  $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$  とおくと

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s), \quad \mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

であるから、微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} sX(s) = 2X(s) + Y(s) \\ sY(s) - 1 = -X(s) + 4Y(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 0 & \dots \textcircled{1} \\ X(s) + (s-4)Y(s) = 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times (s-4) + \textcircled{2} \text{より} \quad (s-2)(s-4)X(s) - (s-4)Y(s) = 0$$

$$+) \quad \frac{X(s) + (s-4)Y(s) = 1}{(s^2 - 6s + 9)X(s)} = 1$$

よって

$$X(s) = \frac{1}{(s-3)^2}, \quad Y(s) = (s-2)X(s) = \frac{(s-2)}{(s-3)^2} = \frac{s-3+1}{(s-3)^2} = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}$$

であるから

$$\text{(答)} \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] = te^{3t}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}\right] = e^{3t} + te^{3t}$$

問 次の連立微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

< 熱伝導方程式への応用 1 >

フーリエは 2 階偏微分方程式である熱伝導方程式を解くために関数を三角級数に展開する方法を考えた。

フーリエ級数, フーリエ変換, ラプラス変換の応用として熱伝導方程式の解法を説明する。

1 次元熱伝導方程式とは長さが有限 ( $0 \leq x \leq L$ ), 半無限 ( $0 \leq x < \infty$ ), あるいは無限 ( $-\infty < x < \infty$ ) の棒において, 熱が伝導するときの温度分布  $u$  の方程式である。 $u(t, x)$  を時刻  $t$ , 位置  $x$  における棒の温度とすると,  $u = u(t, x)$  は式

$$\boxed{*} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (1 \text{ 次元熱伝導方程式})$$

を満たす。ここで  $k$  は正の定数である。これを **1 次元熱伝導方程式** という。

この方程式を棒の長さによって 3 通りの場合に分ける。

**A** 棒の長さが有限 ( $0 \leq x \leq L$ )

式  $\boxed{*}$  の変数  $x$  は ( $0 \leq x \leq L$ ) の範囲であるとする。この式を

$$[\text{初期条件}] \quad u(0, x) = f(x) \quad (A-1)$$

$$[\text{境界条件}] \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0 \quad (A-2)$$

のもとに解きたい。

< 解法 >  $u(t, x)$  が 時間関数  $T(t)$  と 位置関数  $X(x)$  の積として表されるとすれば,  $u(t, x) = T(t)X(x)$  であり, 式  $\boxed{*}$  より

$$T'(t)X(x) = k^2 T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = k^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = K \text{ (定数) とおくと}$$

$$T'(t) = KT(t) \text{ より } T(t) = Ae^{Kt} \text{ (} A \text{ は定数) となる。}$$

$$X''(x) = \frac{K}{k^2} X(x)$$

(1)  $K > 0$  のとき  $X(x) = Be^{\frac{\sqrt{K}}{k}x} + Ce^{-\frac{\sqrt{K}}{k}x}$  ( $B, C$  は定数) となるが, 境界条件より  $X(0) = X(L) = 0$  より  $B = C = 0$  となり  $X(x) = 0 \Rightarrow u(t, x) = 0$  となりだめ。

(2)  $K = 0$  のとき  $X(x) = Bx + C$  ( $B, C$  は定数) となるが, やはり境界条件より  $X(x) = 0$  となつてだめ。

## &lt; 熱伝導方程式への応用 2 &gt;

〈 **A** (棒有限) の解法の続き 〉(3)  $K < 0$  のとき  $K = -q^2$  とおくと,

$$X(x) = B \cos\left(\frac{q}{k}x\right) + C \sin\left(\frac{q}{k}x\right) \quad (B, C \text{ は定数})$$

となる。境界条件  $X(0) = 0$  より  $B = 0 \Rightarrow X(x) = C \sin\left(\frac{q}{k}x\right)$   
 $X(L) = 0 \Rightarrow \frac{q}{k} = \frac{n\pi}{L}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) であるから,

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad T_n(t) = A_n e^{-q^2 t} = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}$$

とおくと,  $u(t, x) = T_n(t)X_n(x)$  は **\*** の解であり, その和

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

も **\*** の解である。初期条件より

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

である。これは  $f(x)$  のフーリエ級数の形をしている。 $x$  は  $(0 \leq x \leq L)$  の範囲であるが,  
 $f(-x) = -f(x)$  と定めると,  $f(x)$  は  $(-L \leq x \leq L)$  で定義された奇関数である。周期  $2L$  の  
奇関数のフーリエ係数は

$$A_n C_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

となる。よって求める解は

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

となる。これが熱伝導方程式 **\*** を初期条件 (A-1), 境界条件 (A-2) のもとで解いた  
解である。このように  $x$  の範囲が有限の場合はフーリエ級数によって **\*** は解くことが  
きる。

< 熱伝導方程式への応用 3 >

**B** 棒の長さが無限 ( $-\infty < x < \infty$ )

式 **\*** の変数  $x$  は ( $-\infty < x < \infty$ ) の範囲であるとする。この式を

[初期条件]  $u(0, x) = f(x)$  (B-1)

[境界条件]  $u(t, -\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(t, x) = 0$  (B-2)

$u(t, +\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0$  (B-3)

のもとで解く。

< 解法 > 未知関数  $u = u(t, x)$  は  $t$  をパラメータとし、 $x$  の関数と考えて、 $x$  に関するフーリエ変換を

$$\mathcal{F}[u(t, x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x)e^{-i\omega x} dx = U(t, \omega)$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = F(\omega)$$

とおく。  $\mathcal{F}\left[\frac{d^2 u}{dx^2}\right] = (i\omega)^2 U(t, \omega) = -\omega^2 U(t, \omega)$  より、 **\*** のフーリエ変換をすると

$$\frac{d}{dt} U(t, \omega) = -k^2 \omega^2 U(t, \omega)$$

よって

$$U(t, \omega) = A e^{-k^2 \omega^2 t}$$

ここで  $A$  は変数  $t$  に関しては定数であるが、 $\omega$  の値によっては変わるかもしれないので  $A = A(\omega)$

とおく。  $t = 0$  とおくと初期条件より

$$u(0, x) = f(x) \xrightarrow{\text{フーリエ変換}} U(0, \omega) = F(\omega) = A(\omega)$$

よって  $U(t, \omega) = F(\omega)e^{-k^2 \omega^2 t}$

一方  $\mathcal{F}^{-1}[e^{-k^2 t \omega^2}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t \omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4k^2 t}} = g(x)$

よって  $u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}[U(t, \omega)] = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)e^{-k^2 \omega^2 t}] = (f * g)(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4k^2 t}} d\tau$$

これが **\*** の (B-1), (B-2), (B-3) をみたす解である。このような無限区間 ( $-\infty < x < \infty$ ) ではフーリエ変換を用いる。

## &lt; 熱伝導方程式への応用 4 &gt;

<b>C</b>	棒の長さが半無限 ( $0 \leq x < \infty$ )
----------	----------------------------------

式 **\*** の変数  $x$  は ( $0 \leq x < \infty$ ) の範囲であるとする。この式を

$$[\text{初期条件}] \quad u(0, x) = 0 \quad (C-1)$$

$$[\text{境界条件}] \quad u(t, 0) = g(t), \quad u(t, +\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0 \quad (C-2)$$

のもとで解く。

< 解法 >  $x$  をパラメータとみなし,  $u(t, x)$  の  $t$  に関するラプラス変換を

$$\mathcal{L}[u(t, x)] = \int_0^\infty u(t, x) e^{-st} dt = U(s, x)$$

とおく。この両辺を  $x$  で 2 回微分すると,  $\mathcal{L}[u_{xx}] = U_{xx}(s, x)$  である。

また  $\mathcal{L}\left[\frac{du}{dt}\right] = sU(s, x) - u(0, x) = sU(s, x)$  である。よって **\*** の

$$\text{ラプラス変換は } sU(s, x) = k^2 U_{xx}(s, x) \text{ より } \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{s}{k^2} U$$

$$\text{だから } U(s, x) = A e^{\frac{\sqrt{s}}{k} x} + B e^{-\frac{\sqrt{s}}{k} x}$$

$$\text{境界条件より } U(s, +\infty) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad U(s, x) = B e^{-\frac{\sqrt{s}}{k} x}$$

$$U(s, 0) = \mathcal{L}[u(t, 0)] = \mathcal{L}[g(t)] = G(s) \text{ より } B = G(s)$$

$$\text{よって } U(s, x) = G(s) e^{-\frac{\sqrt{s}}{k} x}$$

$$\text{一方 } \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}\right] = \frac{\frac{x}{k}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{4t}} = \frac{x}{2k\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4tk^2}} = \gamma(t)$$

$$\text{とおくと } u(t, x) = \mathcal{L}^{-1}[U(s, x)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s) e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}]$$

$$= (g * \gamma)(t) = \int_0^t \frac{x}{2k\sqrt{\pi}} (t - \tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)k^2}} g(\tau) d\tau$$

これが **\*** の (C-1), (C-2) をみたす解である。このような半無限区間 ( $0 \leq x < \infty$ ) ではラプラス変換を用いる。

**研究課題**  $f(x)$  は絶対可積分な連続関数とする。この  $f(x)$  に対して

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4t}} d\tau$$

とおく。

(1)  $u(t, x)$  は熱伝導方程式

(2) 初期条件

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0, -\infty < x < \infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = f(x)$$

を満たすことを示せ。

を満たすことを示せ。

< 付録 1 : 区分的に連続な関数の積分可能性 >

[定理] 区間  $[a, b]$  で区分的に連続な関数  $f(t)$  は (リーマン) 積分可能である。

(証明)  $f(t)$  の不連続点を  $t_1, t_2, \dots, t_l$  ( $t_0 = a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_l < b = t_{l+1}$ )

とする。

$$F_i(t) = \begin{cases} f(t_{i+1} - 0) & : t = t_{i+1} \\ f(t) & : t_i < t < t_{i+1} \quad (0 \leq i \leq l) \\ f(t_i + 0) & : t = t_i \end{cases}$$

とおくと,  $F_i(t)$  は部分区間  $[t_i, t_{i+1}]$  で連続だから,  $[t_i, t_{i+1}]$

で有界かつ一様連続である。従って  $f(t)$  は  $[t_i, t_{i+1}]$  で有界である。

よって  $f(t)$  は区間  $[a, b]$  で有界であり  $M = \sup \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ ,

$m = \inf \{f(t) : a \leq t \leq b\}$  とおくと  $m \leq f(t) \leq M$  ( $a \leq t \leq b$ ) である。

また  $F_i(t)$  が  $(t_i, t_{i+1})$  で一様連続だから  $f(t)$  も  $(t_i, t_{i+1})$  で一様連続より

$$\varphi_i(\delta) = \sup \{|f(t) - f(t')| : |t - t'| < \delta, \quad t, t' \in (t_i, t_{i+1})\}$$

とおくと  $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \varphi_i(\delta) = 0$  ( $1 \leq i \leq l$ ) が成り立つ。

従って  $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \max_{1 \leq i \leq l} \varphi_i(\delta) = 0$  が成り立つ。

$[a, b]$  の分割  $\Delta : a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$  に対し,

$$K = \{k : 1 \leq k \leq n, \text{ある } i (0 \leq i \leq l) \text{ が存在し, } [s_{k-1}, s_k] \subset (t_i, t_{i+1})\}$$

$$J = \{k : 1 \leq k \leq n, k \notin K\}, \quad |\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n} |s_k - s_{k-1}|$$

とおくと  $J$  の要素は高々  $l$  個である。ここで分割  $\Delta$  に対し

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{k=1}^n m_k (s_k - s_{k-1}), \quad \bar{S}_\Delta = \sum_{k=1}^n M_k (s_k - s_{k-1})$$

$$m_k = \inf \{f(t) : s_{k-1} \leq t \leq s_k\}, \quad M_k = \sup \{f(t) : s_{k-1} \leq t \leq s_k\}$$

とするとき

$$\begin{aligned} \bar{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k \in K} (M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) + \sum_{k \in J} (M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) \\ &\leq (b-a) \max_{1 \leq i \leq l} \varphi_i(|\Delta|) + (M-m)l|\Delta| \rightarrow 0 \quad (|\Delta| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

すなわち  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} (\bar{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta) = 0$  より  $f(t)$  は  $[a, b]$  で (リーマン) 積分可能である。(証明終了)

## &lt; 付録 2 : 関数列の収束 &gt;

$I = [a, b]$  を閉区間とする。 $I$  で定義された関数  $f_n, f_\infty : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) がある。

**定義** (1) 任意の  $t \in I$  に対し  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f_\infty(t)$  であるとき、  
関数列  $\{f_n\}$  は  $f_\infty$  に  $I$  で**各点収束**するという。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - f_\infty(t)|^2 dt = 0$  であるとき、  
関数列  $\{f_n\}$  は  $f_\infty$  に  $I$  で**平均 2 乗収束**するという。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f_\infty(t)| = 0$  であるとき、  
関数列  $\{f_n\}$  は  $f_\infty$  に  $I$  で**一様収束**するという。

- (注) 1 一様収束であれば、各点収束かつ平均 2 乗収束である。  
2 各点収束であっても一様収束するとは限らない。

(例)  $I = [0, 1]$ ,  $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$  のとき各点収束極限の関数は

$$f_\infty(t) = \begin{cases} 1 & : t = 0 \\ 0 & : 0 < t \leq 1 \end{cases} \quad \text{であるが}$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |f_n(t) - f_\infty(t)| \geq \sup_{0 < t \leq \frac{1}{n}} |f_n(t) - 0| \geq \frac{1}{2} \quad \text{より一様収束しない。}$$

**定理**  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  が連続で  $\{f_n\}$  が  $f_\infty$  に  $I$  で一様収束すれば、  
 $f_\infty : I \rightarrow \mathbb{R}$  は連続である。

(証明)  $\{f_n\}$  が  $f_\infty$  に一様収束するから、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、  
ある自然数  $m$  があって  $n \geq m$  であれば  $\sup_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f_\infty(t)| < \varepsilon/3$   
となる。

$t_0 \in I$  に対し、 $f_m(t)$  は  $t = t_0$  で連続だから、上記の  $\varepsilon$  に対し、

十分小さい  $\delta$  をとれば  $|t - t_0| < \delta$  ( $t \in I$ ) である限り  $|f_m(t) - f_m(t_0)| < \varepsilon/3$

となる。よってこのとき

$$|f_\infty(t) - f_\infty(t_0)| \leq |f_\infty(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f_m(t_0)| + |f_m(t_0) - f_\infty(t_0)| < \varepsilon$$

より  $f_\infty$  は  $t = t_0$  で連続である。

(証明終)

< 付録 3 : フェイエル の定理 1 >

周期  $L (> 0)$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \quad \left( c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt, \omega = \frac{2\pi}{L} \right)$$

に対し、0 から  $n$  までの平均を

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(t)$$

とおく。このとき次が成り立つ。

< フェイエル (Fejér) の定理 >

$$f(t) \text{ が連続ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\frac{L}{2} \leq t \leq \frac{L}{2}} |\sigma_n(t) - f(t)| = 0$$

$L = 2\pi$  のとき証明する。  $\omega = 1$  である。

< 証明の準備 >

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=-j}^j c_k e^{ikt} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \{ c_{-j} e^{-ijt} + \dots + c_0 + \dots + c_j e^{ijt} \} \\ &= \frac{1}{n+1} [(n+1)c_0 + n\{c_{-1}e^{-it} + c_1e^{it}\} + (n-1)\{c_{-2}e^{-i2t} + c_2e^{i2t}\} + \dots + 1\{c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}\}] \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^n (n+1-|r|) c_r e^{irt} \end{aligned}$$

ここで  $K_n(s) = \frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^n (n+1-|r|) e^{irs}$  とおくと

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^n (n+1-|r|) e^{irt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-irs} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^n (n+1-|r|) e^{ir(t-s)} \right\} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) K_n(t-s) ds \quad \text{と書ける。} \end{aligned}$$

< 付録 4 : フェイエル の 定理 2 >

補題 (1)  $K_n(-s) = K_n(s), K_n(s + 2\pi) = K_n(s)$

$$(2) \quad K_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sin(\frac{n+1}{2}s)}{\sin(\frac{s}{2})} \right)^2 & : 0 < |s| < \pi \text{ のとき} \\ n+1 & : s = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(3)  $0 < \delta < \pi$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} |K_n(s)| = 0$

(4)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) ds = 1$

(証明) (1) は明らか。(2) を示す。  $0 < |s| < \pi$  のとき

$$\left\{ \sum_{k=0}^n e^{i(k-\frac{n}{2})s} \right\}^2 = \left\{ e^{-i\frac{n}{2}s} + e^{-i(\frac{n}{2}-1)s} + \dots + e^{i(\frac{n}{2}-1)s} + e^{i\frac{n}{2}s} \right\}^2$$

この右辺を展開した各項を平面に並べると

	$e^{-i\frac{n}{2}s}$	+	$e^{-i(\frac{n}{2}-1)s}$	+	$\dots$	+	$e^{i(\frac{n}{2}-1)s}$	+	$e^{i\frac{n}{2}s}$
$e^{-i\frac{n}{2}s}$	$e^{-ins}$	+	$e^{-i(n-1)s}$	+	$\dots$	+	$e^{-is}$	+	1
+									
$e^{-i(\frac{n}{2}-1)s}$	$+e^{-i(n-1)s}$	+	$e^{-i(n-2)s}$	+	$\dots$	+	1	+	$e^{is}$
+									
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
+									
$e^{i(\frac{n}{2}-1)s}$	$+e^{-is}$	+	1	+	$\dots$	+	$e^{i(n-2)s}$	+	$e^{i(n-1)s}$
+									
$e^{i\frac{n}{2}s}$	+1	+	$e^{is}$	+	$\dots$	+	$e^{i(n-1)s}$	+	$e^{ins}$

となり、同じ値が対角線上に並んでいるから

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=0}^n e^{i(k-\frac{n}{2})s} \right\}^2 &= (n+1) + n(e^{-is} + e^{is}) + (n-1)(e^{-i2s} + e^{i2s}) + \dots \\ &\quad + 2(e^{-i(n-1)s} + e^{i(n-1)s}) + 1(e^{-ins} + e^{ins}) \\ &= n+1 + \sum_{k=1}^n (n+1-k)(e^{-iks} + e^{iks}) = \sum_{r=-n}^n (n+1-|r|)e^{irs} = (n+1)K_n(s) \end{aligned}$$

< 付録 5 : フェイエル の 定理 3 >

< 前ページ補題の証明の続き >

$$0 < |s| < \pi \text{ のとき } \left\{ \sum_{k=0}^n e^{i(k-\frac{n}{2})s} \right\}^2 = (n+1)K_n(s) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} K_n(s) &= \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{k=0}^n e^{i(k-\frac{n}{2})s} \right\}^2 = \frac{1}{n+1} \left\{ e^{-\frac{ins}{2}} \sum_{k=0}^n e^{iks} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ e^{-\frac{ins}{2}} \cdot \frac{1 - e^{i(n+1)s}}{1 - e^{is}} \right\}^2 = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{e^{-\frac{ins}{2}} - e^{i(\frac{n}{2}+1)s}}{1 - e^{is}} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{e^{-\frac{i(n+1)s}{2}} - e^{\frac{i(n+1)s}{2}}}{e^{-\frac{is}{2}} - e^{\frac{is}{2}}} \right\}^2 = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{s}{2}\right)} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \right\}^2 \quad \text{である。また } s=0 \text{ のとき} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_n(0) &= \frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^n (n+1 - |r|) e^0 = \frac{1}{n+1} \left\{ n+1 + 2 \sum_{k=1}^n (n+1 - k) \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} \left[ n+1 + 2 \left\{ (n+1)n - \frac{n(n+1)}{2} \right\} \right] = \frac{1}{n+1} [(n+1) + (n+1)n] = n+1 \end{aligned}$$

(3) の証明

$$|s| \geq \delta \text{ のとき } \frac{\delta}{2} \leq \left| \frac{s}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } \left| \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right| \geq \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \text{ だから}$$

$$|K_n(s)| = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \right\}^2 \leq \frac{1}{(n+1) \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} |K_n(s)| = 0 \text{ が従う}$$

(4) の証明

$$\text{p21 の①より } L = 2\pi \text{ のとき } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{irs} ds = \begin{cases} 1 & : r = 0 \\ 0 & : r \neq 0 \end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) ds &= \frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^n (n+1 - |r|) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{irs} ds \\ &= \frac{1}{n+1} \times (n+1 - 0) \times 1 = 1 \quad \text{(証明終)} \end{aligned}$$

## &lt; 付録 6 : フェイエル の 定理 4 &gt;

&lt; フェイエル の 定理 の 証明 &gt;

$f(t)$  は  $[-\pi, \pi]$  で連続だから一様連続である。従って任意の正数  $\varepsilon$  に対し、ある正数  $\delta$  が存在して、

$$|t - s| < \varepsilon \quad ((t, s) \in [-\pi, \pi]) \quad \text{であれば} \quad |f(t) - f(s)| < \varepsilon$$

となる。また  $f(t)$  は  $[-\pi, \pi]$  で有界だから  $|f(t)|$  の最大値を

$M = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |f(t)|$  とおく。補題 (1) より  $f(t-u)K_n(u)$  は周期  $2\pi$  だから

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)K_n(t-s)ds = \frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-u)K_n(u)(-1)du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(t-u)K_n(u)du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)K_n(u)du \quad \text{と表される。} \end{aligned}$$

ここで補題 (3) より、ある自然数  $N$  が存在し、 $n \geq N$  であれば

$\sup_{\delta \leq |u| \leq \pi} |K_n(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$  ととれる。よって

$$\begin{aligned} |\sigma_n(t) - f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)K_n(u)du - f(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)du \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t-u) - f(t)\}K_n(u)du \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|u| < \delta} |f(t-u) - f(t)|K_n(u)du + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |f(t-u) - f(t)|K_n(u)du \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|u| < \delta} K_n(u)du + 2M \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} K_n(u)du \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)du + \frac{M}{\pi} \cdot \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \frac{\varepsilon}{2M} du \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

$t$  は  $[-\pi, \pi]$  の任意の点だから、 $n \geq N$  のとき

$$\sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |\sigma_n(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon$$

が成り立つ。すなわち  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |\sigma_n(t) - f(t)| = 0$  が成り立つ。(証明終了)

< 付録 7: フーリエ級数の第  $n$  部分和 >

周期  $L$  の周期関数  $f$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和を

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ik\omega t} \quad \left( c_k(f) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt, \omega = \frac{2\pi}{L} \right)$$

とおく。また  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  で定義された 2 乗可積分関数  $f$  に対して、

$$\|f\| = \left( \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく。このとき  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  (ミンコフスキーの不等式) が成り立つ。

**補題** ①  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  で定義された関数  $f, g$  と定数  $\alpha, \beta$  に対し次式が成り立つ。

$$S_n(\alpha f + \beta g) = \alpha S_n(f) + \beta S_n(g)$$

②  $f$  が  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  で 2 乗可積分関数であれば

$$\|S_n(f)\| \leq \|f\|$$

③ 定数  $a_0, a_k, b_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) に対し、

$$h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\} \quad \left( \omega = \frac{2\pi}{L} \right)$$

で定められた関数  $h$  は次式をみます。

$$S_n(h)(t) = h(t)$$

(証明) ① は  $c_k(\alpha f + \beta g) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{\alpha f(t) + \beta g(t)\} e^{-ik\omega t} dt = \alpha c_k(f) + \beta c_k(g)$

から得られる。

② は **P22** で得られた式より

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\| &= \left( \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |S_n(f)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\| \quad \text{が得られる。} \end{aligned}$$

③ は  $c_k(h) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(t) e^{-ik\omega t} dt = a_k - ib_k$  ( $k \geq 1$ ),  $c_{-k}(h) = a_k + ib_k$

$$c_0(h) = a_0 \text{ より } S_n(h)(t) = \sum_{h=-n}^n c_k(h) e^{ikt} = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\} = h(t)$$

となる。(証明終)

## &lt; 付録 8 : フーリエ級数の平均 2 乗収束 &gt;

定理

 $f$  が  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  で連続であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\| = 0$$

(証明)  $f$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和  $S_n(f)$  に対し,  $\sigma_n(f)(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)(t)$

とおく。フェイエルスの定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\frac{L}{2} \leq t \leq \frac{L}{2}} |\sigma_n(f)(t) - f(t)| = 0$$

だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |\sigma_n(f)(t) - f(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = 0$$

が成り立つ。一方  $\sigma_n(f)$  は三角多項式だから, 補題の③より
 $S_n(\sigma_n(f)) = \sigma_n(f)$  である。また補題の②より  $\|S_n(f - \sigma_n(f))\| \leq \|f - \sigma_n(f)\|$  だから

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\| &\leq \|S_n(f) - S_n(\sigma_n(f))\| + \|S_n(\sigma_n(f)) - \sigma_n(f)\| + \|\sigma_n(f) - f\| \\ &= \|S_n(f - \sigma_n(f))\| + \|\sigma_n(f) - f\| \leq 2\|\sigma_n(f) - f\| \end{aligned}$$

である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\|\sigma_n(f) - f\| = 0 \quad (\text{証明終})$$

系

 $f$  が  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  で連続ならば

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt$$

(証明) p21 の証明から

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |S_n(f)(t) - f(t)|^2 dt = \|S_n(f) - f\|^2$$

である。ここで  $n \rightarrow \infty$  とすると,  $f$  は連続だから  $\|S_n(f) - f\|^2 \rightarrow 0$  より

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = 0 \quad \text{が得られる。 (証明終)}$$

< 付録 9 : パーセバルの等式 >

$\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  で定義された関数  $f$  のフーリエ係数を

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t} dt, \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{L}\right)$$

とおく。

**定理**

$f$  が  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$  で連続であれば次の等式が成り立つ。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt$$

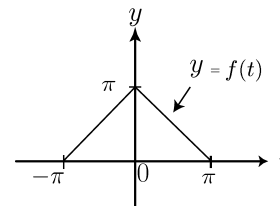
(注) この等式を**パーセバル (Parseval) の等式**という。

(証明) p23 の等式から  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$  が成立する。

前ページの系よりこの式の値は  $\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt$  である。(証明終)

**例**  $L = 2\pi$ ,  $f(t) = \pi - |t|$  のとき

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |t|) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \pi t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$



$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |t|) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(kt) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ (\pi - t) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-1) \frac{\sin(kt)}{k} dt \right\} = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{k^2} \cos(kt) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{k^2 \pi} \{1 - (-1)^k\}$$

また  $f(t)$  は偶関数だから  $b_k = 0$  である。一方

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |t|)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{3} (\pi - t)^3 \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ 0 + \frac{1}{3} (\pi)^3 \right\} = \frac{1}{3} \pi^2 \quad \text{である。} f \text{ は連続よりパーセバルの等式から}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2 \pi} \{1 - (-1)^k\}\right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(2n-1)^4 \pi^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

だから等式  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$  が成り立つ。

## &lt; 付録 10 : ロピタルの定理 &gt;

- [1]  $f(x), g(x)$  は  $x = a$  の近くで連続,  $a$  以外で微分可能で  $g'(x) \neq 0$  かつ  $f(a) = g(a) = 0$  とする。そのとき極限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在すれば

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

( $f(x), g(x)$  が  $x = a$  で定義されていないなくても  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ならば同じことがいえる。)

- [2]  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  かつ極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在すれば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- [3]  $x \rightarrow a+0$ (右極限) のとき  $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$  かつ極限  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在すれば

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- [4]  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$  かつ極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在すれば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明の概略)

- [1] は *Cauchy* の平均値の定理  $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$  ( $a < c < x$ ) より従う。

- [2] は  $F(x) = f(\frac{1}{x}), G(x) = g(\frac{1}{x})$  に対して [1] の結果を使う。

- [3] は  $a < x < x_1$  に対しコーシーの平均値定理より

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (x < c < x_1)$$

と表されるので

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \times \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

と変形されることにより従う。

- [4] は  $F(x) = f(\frac{1}{x}), G(x) = g(\frac{1}{x})$  とおいて [3] の結果を使う。

< 付録 11 : 積分記号下の微分 1 >

定理  $I, J$  を开区間とする。2 変数関数  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  と

その偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  が共に連続であれば、任意の定数  $c, d \in J$  に対して、関数

$$F(x) = \int_c^d f(x, t) dt$$

は微分可能であり

$$\frac{d}{dx} F(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

が成り立つ。

(証明)  $c < d$  のとき証明する。  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = f_x(x, t)$  と書く。

$I$  に含まれる任意の閉区間を  $[a, b]$  とする。  $f_x$  は  $[a, b] \times [c, d]$  で一様連続であるから、任意の正数  $\varepsilon$  に対しある正数  $\delta$  が存在して、  $|x - y| < \delta, |t - s| < \delta$  ( $x, y \in [a, b], t, s \in [c, d]$ ) ならば  $|f_x(x, t) - f_x(y, s)| < \varepsilon$  となる。

次に、任意の  $x \in (a, b), t \in [c, d], h$  ( $|h| < \delta$ ) に対し平均値の定理より

$$\frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} = f_x(c, t) \quad (c = x + \theta h)$$

をみたく  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) が存在する。  $|c - x| = |\theta h| \leq |h| \leq \delta$

$$\text{より } \left| \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} - f_x(x, t) \right| = |f_x(c, t) - f_x(x, t)| < \varepsilon$$

より  $|h| < \delta$  であれば

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_c^d f_x(x, t) dt \right| &\leq \int_c^d \left| \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} - f_x(x, t) \right| dt \\ &\leq \int_c^d \varepsilon dt = (d - c)\varepsilon \end{aligned}$$

よって  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_c^d f_x(x, t) dt$  が得られる。 (証明終)

## &lt; 付録 12 : 積分記号下の微分 2 &gt;

**定理**  $I$  を开区間とする。2 変数関数  $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  とその偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が

共に連続で、任意の  $x \in I$  に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)| dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| dt < \infty$$

が成り立つとする。このとき、定数  $a, b \in I$  ( $a < b$ ) に対して

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} \int_{|t| \geq R} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| dt = 0$$

であれば、関数  $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt$  は  $(a, b)$  で微分可能で

$$\frac{d}{dx} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad \text{が成り立つ。}$$

(注) 変数  $t$  の積分区間を  $[0, +\infty)$  としてもこの定理は成り立つ。

(証明)  $F_R(x) = \int_{-R}^R f(x, t) dt$ ,  $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ ,  $h_R(x) = \int_{-R}^R \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

とおく。条件より

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |h_R(x) - h(x)| &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_{-R}^R \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right| \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} \int_{|t| \geq R} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| dt \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、十分大きい正数  $R$  をとれば  $\max_{a \leq x \leq b} |h_R(x) - h(x)| < \varepsilon$  となる。

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  は  $[a, b] \times [-R, R]$  で一様連続だから、上の  $\varepsilon$  と  $R$  に対して十分小さい正数  $\delta$  をとれば、 $x, y \in [a, b]$ ,  $t, s \in [-R, R]$ ,  $|x - y| < \delta$ ,  $|t - s| < \delta$  ならば

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(y, t) \right| < \frac{\varepsilon}{2R} \quad \text{となる。このとき}$$

$$\begin{aligned} |h_R(x) - h_R(y)| &= \left| \int_{-R}^R \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \int_{-R}^R \frac{\partial f}{\partial x}(y, t) dt \right| \leq \int_{-R}^R \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(y, t) \right| dt \\ &\leq \int_{-R}^R \frac{\varepsilon}{2R} dt = \varepsilon \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$|h(x) - h(y)| \leq |h(x) - h_R(x)| + |h_R(x) - h_R(y)| + |h_R(y) - h(y)| < 3\varepsilon$$

よって  $h(x)$  は連続である。 $a \leq \alpha < \beta \leq b$  である  $\alpha, \beta$  に対し

$$\begin{aligned} F(\beta) - F(\alpha) &= \lim_{R \rightarrow \infty} F_R(\beta) - F_R(\alpha) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} F_R(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} h_R(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx \quad \text{より } F(x) \text{ は微分可能であり} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} F(x) = h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dx \quad \text{が成り立つ。} \quad (\text{証明終})$$

< 付録 13 : Abel の変換 >

定理 (Abel 変換)

2 組の数列  $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ ,  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  があり

$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq 0, \quad \sigma_k = v_0 + v_1 + \dots + v_k \quad (0 \leq k \leq n)$$

とする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$u_0 \left( \min_{0 \leq k \leq n} \sigma_k \right) \leq \sum_{k=0}^n u_k v_k \leq u_0 \left( \max_{0 \leq k \leq n} \sigma_k \right)$$

(証明) 
$$S = \sum_{k=0}^n u_k v_k = u_0 \sigma_0 + u_1 (\sigma_1 - \sigma_0) + \dots + u_n (\sigma_n - \sigma_{n-1})$$

$$= \sigma_0 (u_0 - u_1) + \sigma_1 (u_1 - u_2) + \dots + \sigma_{n-1} (u_{n-1} - u_n) + \sigma_n u_n$$

ここで  $u_0 - u_1 \geq 0$ ,  $u_1 - u_2 \geq 0$ ,  $\dots$ ,  $u_{n-1} - u_n \geq 0$ ,  $u_n \geq 0$  より

$$S \leq \left( \max_{0 \leq k \leq n} \sigma_k \right) \{ (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \dots + (u_{n-1} - u_n) + u_n \}$$

$$= u_0 \left( \max_{0 \leq k \leq n} \sigma_k \right)$$

同様にして  $S \geq u_0 \left( \min_{0 \leq k \leq n} \sigma_k \right)$  が得られる。 (証明終)

定理 (Abel の連続定理)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

が  $x = R$  で収束すれば,  $0 \leq x \leq R$  で一様収束する。

(証明)  $x = R$  で収束するから任意の正数  $\varepsilon$  に対し, ある自然数  $N$  がとれて,  $p, q > N$  ( $p < q$ ) であれば

$$-\varepsilon < \sum_{k=p}^q a_k R^k < \varepsilon$$

が成り立つ。ここで  $u_k = \left(\frac{x}{R}\right)^{k+p}$ ,  $v_k = a_{k+p} R^{k+p}$  とおくと, 前定理より

$$\left(\frac{x}{R}\right)^p \min_{p \leq s \leq q} \left( \sum_{k=p}^s a_k R^k \right) \leq \sum_{k=p}^q a_k x^k \leq \left(\frac{x}{R}\right)^p \max_{p \leq s \leq q} \left( \sum_{k=p}^s a_k R^k \right)$$

より  $-\varepsilon < \sum_{k=p}^q a_k x^k < \varepsilon$  から  $0 \leq x \leq R$  で一様収束する。 (証明終)

## &lt; 付録 14 : 積分の第 2 平均値の定理 1 &gt;

**定理** (積分の第 2 平均値の定理)

関数  $f, \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は連続,  $\varphi$  は単調非増加

( $x < y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$ ) で正 ( $\varphi(b) > 0$ ) とする。このとき

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b)$$

をみたす  $\xi$  が存在する。

(注)  $\varphi$  は単調非増加であれば連続でなくても良い。 $\varphi(x)f(x)$  が積分可能であれば定理は成り立つ。

(証明)  $[a, b]$  を  $n$  等分した分点を  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ,

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ とおく。 } u_k = \varphi(x_k), \quad v_k = f(x_k)h \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

に対し Abel 変換の定理より

$$\textcircled{1} \quad \varphi(a) \left\{ \min_k \sum_{j=0}^k f(x_j)h \right\} \leq \sum_{k=0}^n \varphi(x_k)f(x_k)h \leq \varphi(a) \left\{ \max_k \sum_{j=0}^k f(x_j)h \right\}$$

が成り立つ。 $\varphi(x)f(x)$  は連続だから  $[a, b]$  で積分可能である。よって任意の正数  $\varepsilon$  に対し、十分大きな自然数  $N$  をとれば、 $n \geq N$  のとき

$$\textcircled{2} \quad \left| \sum_{k=0}^n \varphi(x_k)f(x_k)h - \int_a^b \varphi(x)f(x)dx \right| < \varepsilon$$

が成り立つ。 $f(x)$  は  $[a, b]$  で一様連続であるから、上記の  $\varepsilon$  に対し、ある正数  $\delta$  が存在して、 $0 < \delta' \leq \delta$  であれば

$$\textcircled{3} \quad \sup_{\substack{|x-y| < \delta' \\ x, y \in [a, b]}} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\varphi(a)}$$

が成り立つ。ここで  $h = \frac{b-a}{n} < \delta$  となるように  $n$  ( $\geq N$ ) を十分大きくとる。③式より

$$\textcircled{4} \quad \left| \sum_{j=0}^k f(x_j)h - \int_a^{a+(k+1)h} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{\varphi(a)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

< 付録 15 : 積分の第 2 平均値の定理 2 >

(積分の第 2 平均値の定理の証明の続き)

④より

$$\sum_{j=0}^k f(x_j)h < \int_a^{a+(k+1)h} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\varphi(a)} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

だから

$$\begin{aligned} \max_k \sum_{j=0}^k f(x_j)h &< \max_k \int_a^{a+(k+1)h} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\varphi(a)} \\ &\leq \max_{a \leq \xi \leq b} \int_a^{\xi} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\varphi(a)} \end{aligned}$$

ここで  $\varphi(a) > 0$  より

$$\textcircled{5} \quad \varphi(a) \left\{ \max_k \sum_{j=0}^k f(x_j)h \right\} \leq \varphi(a) \left\{ \max_{a \leq \xi \leq b} \int_a^{\xi} f(x)dx \right\} + \varepsilon$$

また②と①より

$$\textcircled{6} \quad \int_a^b \varphi(x)f(x)dx - \varepsilon < \sum_{k=0}^n \varphi(x_k)f(x_k)h \leq \varphi(a) \left\{ \max_k \sum_{j=0}^k f(x_j)h \right\}$$

⑤, ⑥より

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx - \varepsilon < \varphi(a) \left\{ \max_{a \leq \xi \leq b} \int_a^{\xi} f(x)dx \right\} + \varepsilon$$

ここで  $\varepsilon$  は任意の正数だから

$$\textcircled{7} \quad \int_a^b \varphi(x)f(x)dx \leq \varphi(a) \left\{ \max_{a \leq \xi \leq b} \int_a^{\xi} f(x)dx \right\}$$

が成り立つ。同様にして

$$\textcircled{8} \quad \varphi(a) \left\{ \min_{a \leq \xi \leq b} \int_a^{\xi} f(x)dx \right\} \leq \int_a^b \varphi(x)f(x)dx$$

が成り立つ。⑦, ⑧から  $\varphi(a)$  で割ると

$$\min_{a \leq \xi \leq b} \int_a^{\xi} f(x)dx \leq \frac{1}{\varphi(a)} \int_a^b \varphi(x)f(x)dx \leq \max_{a \leq \xi \leq b} \int_a^{\xi} f(x)dx$$

が成り立つ。  $F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)dx$  は  $[a, b]$  で定義された連続関数だから, 中間値の定理より,

ある  $\xi$  ( $a \leq \xi \leq b$ ) が存在して

$$\frac{1}{\varphi(a)} \int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \int_a^{\xi} f(x)dx \quad \text{が成り立つ。} \quad (\text{証明終})$$

## &lt; 付録 16 : 広義積分の収束条件 1 &gt;

定理 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し

$$(1) \int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{ならば} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) dt \text{ は収束する。}$$

$$(2) \int_{-\infty}^0 |f(t)| dt < \infty \quad \text{ならば} \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(t) dt \text{ は収束する。}$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{ならば} \quad \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(t) dt \text{ は収束する。}$$

(証明) (1) を示す。

$$f_+(t) = \max\{f(t), 0\}, \quad f_-(t) = \min\{f(t), 0\} \text{ とおくと}$$

$$f_+(t) + f_-(t) = f(t), \quad f_+(t) - f_-(t) = |f(t)|$$

$$0 \leq f_+(t) \leq |f(t)|, \quad 0 \leq -f_-(t) \leq |f(t)|$$

である。ここで

$$F_+(t) = \int_0^t f_+(s) ds, \quad F_-(t) = \int_0^t -f_-(s) ds$$

とおくと  $F_+, F_-$  は単調非減少でかつ有界

$$0 \leq F_+(t) \leq \int_0^{\infty} |f(s)| ds, \quad 0 \leq F_-(t) \leq \int_0^{\infty} |f(s)| ds$$

であるから極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_+(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_-(t)$  は収束する。従って

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \{F_+(b) - F_-(b)\} \text{ も収束する。}$$

(2) も同様に示される。(3) は (1), (2) の結果からわかる。 (証明終)

系  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が任意有限区間で積分可能であり、 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  ならば  
極限  $\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(t) dt$  は収束する。

(証明)  $\operatorname{Re}(f(t)) = x(t)$  (実部),  $\operatorname{Im}(f(t)) = y(t)$  (虚部) とおくと  $f(t) = x(t) + iy(t)$  であり

$$|f(t)| = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} \text{ だから } |x(t)| \leq |f(t)|, |y(t)| \leq |f(t)| \text{ より}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

上記定理の (3) より  $\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b x(t) dt$  と  $\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b y(t) dt$  は収束するから

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left\{ \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt \right\} \text{ も収束する。 (証明終)}$$

< 付録 17 : 広義積分の収束条件 2 >

**定理** 極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  が収束するための必要十分条件は

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow \infty}} |f(t) - f(t')| = 0 \quad \text{が成り立つことである。}$$

**系** 極限  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) dt$  が収束するための必要十分条件は

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ b' \rightarrow \infty}} \left| \int_b^{b'} f(t) dt \right| = 0 \quad \text{が成り立つことである。}$$

**例**  $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & : t \neq 0 \\ 1 & : t = 0 \end{cases}$  に対し,  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) dt$  が収束することを示す。

定数  $b, b'$  ( $0 < b < b'$ ) に対し

$$\begin{aligned} \int_b^{b'} f(t) dt &= \int_b^{b'} \frac{\sin t}{t} dt = \int_b^{b'} \frac{1}{t} \times (-\cos t)' dt \\ &= \left[ \frac{1}{t} \times (-\cos t) \right]_b^{b'} - \int_b^{b'} \left( -\frac{1}{t^2} \right) \times (-\cos t) dt \\ &= -\frac{\cos b'}{b'} + \frac{\cos b}{b} + \int_b^{b'} \frac{\cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \left| \int_b^{b'} f(t) dt \right| &\leq \left| -\frac{\cos b'}{b'} \right| + \left| \frac{\cos b}{b} \right| + \int_b^{b'} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{b'} + \frac{1}{b} + \int_b^{b'} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{b'} + \frac{1}{b} + \left[ -\frac{1}{t} \right]_b^{b'} \\ &= \frac{1}{b'} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b'} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b} \end{aligned}$$

また  $b' < b$  のとき同様にして  $\left| \int_b^{b'} f(t) dt \right| = \left| \int_{b'}^b f(t) dt \right| \leq \frac{2}{b'}$

よって  $\left| \int_b^{b'} f(t) dt \right| \leq \max \left\{ \frac{2}{b}, \frac{2}{b'} \right\}$  より

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ b' \rightarrow \infty}} \left| \int_b^{b'} f(t) dt \right| = 0 \quad \text{従って上記の系より } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t) dt \text{ は収束する。}$$

< 付録 18 : p.29 定理 (2) の証明 >

定理 (2) 定理  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > 0$ ) に対し  $\int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\sin(\beta t)}{t} dt = \tan^{-1} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)$

$$(\text{証明}) \quad f(x, t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \frac{\sin(xt)}{t} & : t > 0 \\ x & : t = 0 \end{cases}$$

とおくと  $f$  は  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  で連続であり,  $x$  に関する偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \cos(xt) & : t > 0 \\ 1 & : t = 0 \end{cases} = e^{-\alpha t} \cos(xt)$$

も  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  で連続である。また各  $x \in \mathbb{R}$  に対し

$$|f(x, t)| \leq e^{-\alpha t} |x|, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-\alpha t} \text{ より}$$

$$\int_0^\infty |f(x, t)| dt \leq |x| \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{|x|}{\alpha} < \infty$$

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| dt \leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} < \infty$$

である。また任意の定数  $a, b$  ( $a < b$ ) に対し,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} \int_R^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| dt \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^\infty e^{-\alpha t} dt = 0$$

より (積分記号下の微分 2)(p.87) によって  $F(x) = \int_0^\infty f(x, t) dx$  は微分可能であり

p.29 定理 (1) (証明は p.91) の結果より

$$\frac{d}{dx} F(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(xt) dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$$

となるから

$$F(x) = \int \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} dx = \tan^{-1} \left( \frac{x}{\alpha} \right) + C \quad (C \text{ は定数})$$

である。ここで

$$F(0) = \int_0^\infty f(0, t) dt = 0 \quad \text{より} \quad C = 0$$

よって

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\sin(xt)}{t} dt = \tan^{-1} \left( \frac{x}{\alpha} \right)$$

より求める式が得られる。 (証明終)

< 付録 19 : p.29 定理 (3) の証明 >

定理 (3)  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

(証明) 定数  $\alpha (\geq 0)$  と自然数  $n$  に対し

$$F_n(\alpha) = \int_0^n e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt$$

とおく。定数  $\alpha, \beta, t$  ( $\alpha < \beta, t > 0$ ) に対し、平均値の定理より

$$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} = -te^{-ct}(\alpha - \beta) \quad (\alpha < c < \beta)$$

をみたく  $c$  が存在するから

$$|F_n(\alpha) - F_n(\beta)| = \left| \int_0^n (\beta - \alpha)e^{-ct} \sin t dt \right| \leq |\beta - \alpha|n$$

より  $F_n(\alpha)$  は  $\alpha$  に関して連続である。一方  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin t}{t} dt$

は収束するから  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \int_m^n \frac{\sin t}{t} dt = 0$  である。よって任意の正数  $\varepsilon$  に対し、

十分大きい自然数  $N$  をとると、 $m, n \geq N$  ( $m \leq n$ ) であれば

$$\left| \int_m^n \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon$$

となる。この  $m, n$  に対し  $F_n(\alpha) - F_m(\alpha) = \int_m^n e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt$

を考える。 $\alpha \geq 0$  より  $e^{-\alpha t}$  は単調非増加で正より積分の第 2 平均値の定理から

$$F_n(\alpha) - F_m(\alpha) = \int_m^n e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt = e^{-\alpha m} \int_m^\xi \frac{\sin t}{t} dt$$

をみたく  $\xi$  ( $m \leq \xi \leq n$ ) が存在する。従って

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} |F_n(\alpha) - F_m(\alpha)| \leq \left| \int_m^\xi \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon$$

だから  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt$

は  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) に関して一様に収束する。 $F_n(\alpha)$  は  $\alpha$  に関して連続だから極限の関数

$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt$  も  $\alpha$  に関して連続である。従って

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{証明終})$$

< 付録 20 : P.36 定理 (2) の証明 >

**定理 (2)**  $f$  が絶対可積分であれば  $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt$  は有界で一様連続

(証明)  $|F(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-ixt}| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

より有界である。任意の実数  $x, y (x < y)$  に対し、平均値の定理から

$$\frac{\cos y - \cos x}{y - x} = -\sin \xi, \quad \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos \eta$$

をみたす定数  $\xi, \eta \in [x, y]$  が存在する。従って

$$|\cos y - \cos x| = |(-\sin \xi)(y - x)| \leq |y - x|$$

$$|\sin y - \sin x| = |(\cos \eta)(y - x)| \leq |y - x|$$

より  $|e^{-iyt} - e^{-ixt}| \leq |\cos yt - \cos xt| + |\sin yt - \sin xt|$

$$\leq 2|x - y| \cdot |t|$$

である。一方  $f$  は絶対可積分だから  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|t| > R} |f(t)| dt = 0$  より、

任意の正数  $\varepsilon$  に対し、十分大きい正数  $R$  をとれば

$$\int_{|t| > R} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

となる。  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = K$  とおく。上記の  $\varepsilon$  と  $R, K$  に対し、  $|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{4RK}$  であれば

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-iyt} - e^{-ixt}) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{|t| > R} f(t)(e^{-iyt} - e^{-ixt}) dt \right| + \left| \int_{-R}^R f(t)(e^{-iyt} - e^{-ixt}) dt \right| \\ &\leq 2 \int_{|t| > R} |f(t)| dt + \left( \max_{-R \leq t \leq R} |e^{-iyt} - e^{-ixt}| \right) \cdot \int_{-R}^R |f(t)| dt \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{4} + 2|x - y| \cdot R \cdot K \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4RK} \cdot R \cdot K \leq \varepsilon \end{aligned}$$

より  $F(x)$  は一様連続である。(証明終)

< 付録 21 : P.36 定理 (3) の証明 >

**定理 (3)**  $f$  が絶対可積分で有界ならば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt) dt = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt = 0$$

(証明) (2) の証明と同様にして  $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt) dt$  は有界で一様連続だから、

任意の正数  $\varepsilon$  に対して十分小さい正数  $\delta$  をとると、

$$|x - y| < \delta \text{ ならば } |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdots \textcircled{1}$$

となる。この  $\delta$  と  $\varepsilon$  に対し、 $R$  を十分大きくとると、

$$\frac{\pi}{R} < \delta \text{ かつ } \int_{|t|>R} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3} \cdots \textcircled{2}$$

とできる。 $f$  は有界で積分可能だから、有限区間で 2 乗可積分である。

従ってリーマン・ルベーグの補題 (P.23) より  $L = 2R$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{R}t\right) dt = 0$$

である。よって  $N$  を十分大きくとると  $n \geq N$  であれば

$$\left| \int_{-R}^R f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{R}t\right) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \cdots \textcircled{3}$$

そこで  $x \geq \frac{N\pi}{R}$  とすると、ある自然数  $m (\geq N)$  が存在し

$$\frac{m\pi}{R} \leq x < \frac{(m+1)\pi}{R} \text{ となる。従って } \left| x - \frac{m\pi}{R} \right| \leq \frac{\pi}{R} < \delta \text{ より}$$

①, ②, ③から

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \left| g(x) - g\left(\frac{m\pi}{R}\right) \right| + \left| g\left(\frac{m\pi}{R}\right) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_{|t|>R} f(t) \cos\left(\frac{m\pi t}{R}\right) dt + \int_{-R}^R f(t) \cos\left(\frac{m\pi t}{R}\right) dt \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \int_{|t|>R} |f(t)| dt + \left| \int_{-R}^R f(t) \cos\left(\frac{m\pi t}{R}\right) dt \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

よって  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt) dt = 0$  が示された。

$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt = 0$  も同様である。(証明終)

## &lt; 付録 22 : P.37 例の解説 &gt;

$$\textcircled{C} \quad \text{任意の非負整数 } m \text{ に対し } \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^m e^{-t^2} = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{であることから} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^m e^{-t^2} < \infty \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。

(証明) 背理法で示す。

$$\text{もし} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^m e^{-t^2} = +\infty$$

と仮定すると、ある点列  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots (t_n \in \mathbb{R})$  が存在し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n|^m e^{-(t_n)^2} = +\infty \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。

(1) 集合  $\{|t_n| : n \geq 1\}$  が有界でなければ、ある部分列  $\{t_{n_k}\}$  が存在し

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |t_{n_k}| = +\infty \quad \text{かつ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |t_{n_k}|^m e^{-(t_{n_k})^2} = +\infty \text{ であり、}$$

これは①に矛盾する。

(2) 集合  $\{|t_n| : n \geq 1\}$  が有界であれば、ある正数  $M$  が存在して、

$$|t_n| \leq M \quad (n \geq 1) \text{ である。このときある部分列 } \{t_{n_k}\} \text{ が存在し、}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k}$  は収束する。その極限を

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_\infty \text{ とおくと } |t_{n_k}| \leq M \text{ より } |t_\infty| \leq M \text{ である。}$$

このとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |t_{n_k}|^m e^{-(t_{n_k})^2} \leq M^m < \infty$$

となり、これは③に矛盾する。

(1),(2) のいずれの場合も矛盾するので②が成立する。(証明終)

< 付録 23 : P.37 補題 1, 2 の証明 >

[補題 1 の証明]  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  のとき  $f^{(r)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  は明らかである。

自然数  $r$  に対して  $t^r f(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  を示す。任意の非負整数  $m, n$  に対し

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^m \cdot \left| \frac{d^n}{dt^n} (t^r f(t)) \right| &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^m \left| \sum_{k=0}^n {}_n C_k \left( \frac{d^k}{dt^k} t^r \right) \cdot f^{(n-k)}(t) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot A_r(k) \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^{m+r-k} \cdot |f^{(n-k)}(t)| < \infty \end{aligned}$$

ここで 
$$A_r(k) = \begin{cases} r(r-1)\cdots(r-k+1) & : k \leq r \text{ のとき} \\ 0 & : k > r \text{ のとき} \end{cases}$$

より  $t^r f(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  である。(証明終)

[補題 2 の証明]  $m = n = 0$  のとき  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^m |f^{(n)}(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| < \infty$

より  $f$  は有界であり  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = M$  とする。また  $m = 2, n = 0$  のとき

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^m |f^{(n)}(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^2 |f(t)| < \infty \text{ より } \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^2 |f(t)| = K$$

とおく。  $t \neq 0$  のとき  $|f(t)| \leq \frac{K}{t^2}$  である。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt &= \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b |f(t)| dt \\ &= \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left\{ \int_a^{-1} |f(t)| dt + \int_{-1}^1 |f(t)| dt + \int_1^b |f(t)| dt \right\} \\ &\leq \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left\{ \int_a^{-1} \frac{K}{t^2} dt + \int_{-1}^1 M dt + \int_1^b \frac{K}{t^2} dt \right\} \\ &= \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left\{ \left[ -\frac{K}{t} \right]_a^{-1} + [Mt]_{-1}^1 + \left[ -\frac{K}{t} \right]_1^b \right\} \\ &= \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left\{ K + \frac{K}{a} + 2M - \frac{K}{b} + K \right\} = 2K + 2M < \infty \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

## &lt; 付録 24 : P.37 補題 3 の証明 &gt;

[補題 3 の証明]  $m = 1$  のとき  $F_1(x, t) = f(t) \cos(xt)$ ,  $F_2(x, t) = -f(t) \sin(xt)$

とおくと  $f(t)e^{-ixt} = F_1(x, t) + iF_2(x, t)$  である。  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  より,

$F_1(x, t)$  は  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  で連続、  $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, t) = -tf(t) \sin(xt)$ ,  $F_2(x, t)$  および

$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, t) = -tf(t) \cos(xt)$  も共に  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  で連続であり、  $\mathbb{R}$  の任意の閉区間  $I = [a, b]$  に属する  $x$  に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_i(x, t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (i = 1, 2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} F_i(x, t) \right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)| dt < \infty \quad (i = 1, 2)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} \int_{|t| > R} \left| \frac{\partial}{\partial x} F_i(x, t) \right| dt \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|t| > R} |tf(t)| dt = 0 \quad (i = 1, 2)$$

となるから積分記号下の微分可能性の定理 (P.87) より

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt) dt$  と  $-\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt$  は共に  $x$  に関して微分可能で

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(xt) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \{tf(t) \sin(xt)\} dt,$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{-f(t) \sin(xt)\} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \{tf(t) \cos(xt)\} dt$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \{-itf(t)e^{-ixt}\} dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-ixt} dt \end{aligned}$$

である。  $m \geq 2$  については、これをくり返せば

$$\frac{d^m}{dx^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = (-i)^m \int_{-\infty}^{\infty} t^m f(t)e^{-ixt} dt$$

が得られる。(証明終)

< 付録 25 : 広義積分の近似 >

**定理** 定数  $c, r$  ( $c > 0, r > 1$ ) が存在し、次式を満たす関数  $f$  がある。

$$(*) |f(x)| < \frac{c}{(1+|x|)^r}$$

このとき次式が成り立つ。

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^{\infty} f(x)dx \quad (2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

(証明) (1) を示す。  $f$  は絶対可積分だから、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、ある正数  $M$  と  $\delta$  ( $0 < \delta < M$ ) が存在し

$$\int_M^{\infty} |f(x)|dx < \varepsilon$$

かつ 
$$\frac{c}{(r-1)(1+M-\delta)^{r-1}} < \varepsilon$$

となる。ここで  $c$  と  $r$  は条件式 (\*) の定数である。そこで  $|\Delta x| < \delta$  のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k > \frac{M}{\Delta x}} |f(k\Delta x)|\Delta x &\leq \sum_{k\Delta x > M} \frac{c}{(1+k\Delta x)^r} \cdot \Delta x \\ &\leq \int_{M-\Delta x}^{\infty} \frac{c}{(1+x)^r} dx = \frac{c}{(r-1)(1+M-\Delta x)^{r-1}} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。  $f$  は区間  $[0, M]$  でリーマン積分可能だから

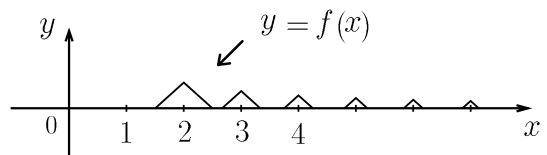
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{0 \leq k \leq \frac{M}{\Delta x}} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^M f(x)dx$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x - \int_0^{\infty} f(x)dx \right| \\ &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left| \sum_{0 \leq k \leq \frac{M}{\Delta x}} f(k\Delta x)\Delta x - \int_0^M f(x)dx \right| + \sum_{k > \frac{M}{\Delta x}} |f(k\Delta x)|\Delta x + \int_M^{\infty} |f(x)|dx \right\} \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

より (1) が成り立つ。(2) も同様である。

$$(注) f(x) = \begin{cases} x - n + \frac{1}{n} & : n - \frac{1}{n} \leq x \leq n \quad (n \geq 2) \\ -x + n + \frac{1}{n} & : n \leq x \leq n + \frac{1}{n} \quad (n \geq 2) \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$



は絶対可積分で一様連続であるが (1) 式は成り立たない。

## &lt; 付録 26 : フーリエ変換の導出 &gt;

**定理** 関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は何回でも微分可能であり、ある正定数  $M$  が存在して  $|t| > M$  であれば  $f(t) = 0$  とする。このとき次式が成り立つ。

$$(i) \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$(ii) \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx$$

$$\text{ただし } c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{L}$$

である。

**(証明)** (i) 任意の非負整数  $m, n$  に対し、 $g(t) = |t|^m |f^{(n)}(t)|$  は連続で、

$$|t| > M \text{ であれば } g(t) = 0 \text{ となる。 } K = \max_{|t| \leq M} g(t) \text{ とおくと}$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} g(t) = K < \infty \text{ より } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ がわかる。}$$

(ii)  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  だから、そのフーリエ変換  $\mathcal{F}[f(t)] = F(x)$  も  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  の元である。(P.38)

$$F_L(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \text{ とすると、条件より } L > 2M \text{ ならば } F_L(x) = F(x) \text{ である。}$$

$$\text{そこで } L > 2M \text{ のとき、 } F_L = F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ より } \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^m \cdot |F(x)| < \infty \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{だから } \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^2 |F(x)| = M < \infty \quad \text{より}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} F(x) e^{ixt} \right| \leq \frac{M}{(1 + |x|)^2}$$

$$c_k = \frac{1}{L} F_L(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi} F(k\omega)$$

である。ここで  $\Delta x = \omega \left( = \frac{2\pi}{L} \right)$  とおくと  $L \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta x \rightarrow 0$  であり

$\frac{1}{2\pi} F(x) e^{ixt}$  に関する広義積分の近似 (前ページの定理) より

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi} F(k\omega) e^{ik\omega t}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\Delta x) e^{ik\omega t} \Delta x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx$$

が成り立つ。(証明終)

< 付録 27 : 積分順序の交換 1 >

**補題 1**

関数  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  (複素数の全体) が連続ならば

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$$

(証明)  $f$  は  $[a, b] \times [c, d]$  で一様連続であるから、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、ある正数  $\delta$  が存在して、

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ かつ } |y_1 - y_2| < \delta \text{ ならば } |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)(d-c)}$$

とできる。この  $\delta$  に対し  $[a, b], [c, d]$  を等分した分点を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \left( x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n} \right)$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \left( y_k - y_{k-1} = \frac{d-c}{m} \right)$$

とおき、 $\frac{b-a}{n} < \delta, \frac{d-c}{m} < \delta$  とする。

$(x, y) \in [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$  のとき  $f_{nm}(x, y) = f(x_{j-1}, y_{k-1})$

$(j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m)$  と定めると

$$\sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} |f(x, y) - f_{nm}(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)(d-c)} \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \left\{ \int_c^d f_{nm}(x, y) dy \right\} dx &= \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^m f(x_{j-1}, y_{k-1}) \cdot \frac{d-c}{m} \right\} \frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}, y_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \right\} \frac{d-c}{m} = \int_c^d \left\{ \int_a^b f_{nm}(x, y) dx \right\} dy \text{ より} \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx - \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \right|$$

$$\leq \int_a^b \left\{ \int_c^d |f(x, y) - f_{nm}(x, y)| dy \right\} dx + \int_c^d \left\{ \int_a^b |f_{nm}(x, y) - f(x, y)| dx \right\} dy < \varepsilon$$

が成り立つ。 $\varepsilon$  は任意であるから求める等式が得られる。(証明終)

## &lt; 付録 28 : 積分順序の交換 2 &gt;

**補題 2**

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  が連続ならば、任意の正数  $R$  に対し、

$$\int_{-R}^R f(x, y) dy \text{ は } x \text{ について連続である。}$$

(証明)  $x_0 \in \mathbb{R}$  とする  $f$  は  $[x_0 - 1, x_0 + 1] \times [-R, R]$  で一様連続だから

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R}^R f(x, y) dy - \int_{-R}^R f(x_0, y) dy \right| &\leq \int_{-R}^R |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \\ &\leq 2R \sup_{-R \leq y \leq R} |f(x, y) - f(x_0, y)| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0) \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

**補題 3**

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を非負実数値の連続関数で、

(A1)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$  は  $x$  についての連続関数、

(A2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$  は  $y$  についての連続関数と仮定すると

(i) もし  $\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy$  が収束すれば、

$$\int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy \text{ は } R \rightarrow \infty \text{ で極限值をもつ。}$$

(ii) もし  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy = K$  ならば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \text{ は } K \text{ に収束する。}$$

(証明) (i)  $\int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy \leq \int_{-R}^R \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy$  より

$$\int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy \text{ は } R \text{ について上に有界な単調増加関数だから}$$

$R \rightarrow \infty$  で極限值をもつ。

< 付録 29 : 積分順序の交換 3 >

(補題 3 (ii) の証明)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \geq 0$  なので  $\int_{-T}^T \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy$  は  $T$  について単調増加関数である。

$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy$  が極限值  $L \leq K$  に収束することを背理法で示す。

$\int_{-T}^T \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \geq K + \eta$  をみたすような  $\eta > 0$  と  $T > 0$  が存在すると仮定する。

$v \in [-T, T]$  に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dx - \int_{-R(v)}^{R(v)} f(x, v) dx < \frac{\eta}{4T+2} \cdots \textcircled{1}$$

を満たすような  $R(v) (> 0)$  がとれる。仮定 (A2) から  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$  は  $y$  について連続であり、また補題 2 より  $\int_{-R(v)}^{R(v)} f(x, y) dx$  も  $y$  について連続だから  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx - \int_{-R(v)}^{R(v)} f(x, y) dx$  は  $y$  についての連続関数である。

よって①より十分小さな正数  $\delta(v)$  をとれば、 $|v - y| < \delta(v)$  のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx - \int_{-R(v)}^{R(v)} f(x, y) dx < \frac{\eta}{2T+2} \cdots \textcircled{2}$$

となる。今  $v$  の  $\delta(v)$  近傍を  $I_v = (v - \delta(v), v + \delta(v))$  とすると

$[-T, T] \subset \bigcup_{v \in [-T, T]} I_v$  となる。ハイネ - ボレル - ルベーグ (Heine - Borel - Lebesgue) の被覆定理より有限個の  $v_1, v_2, \dots, v_m \in [-T, T]$  が存在して  $[-T, T] \subset \bigcup_{j=1}^m I_{v_j}$  となる。各  $v_i$  に対し、

①で定まる  $R(v_j)$  をとり、 $R = \max\{T, R(v_1), R(v_2), \dots, R(v_m)\}$  とおく。

このとき②より、 $y \in [-T, T]$  に対し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx - \int_{-R}^R f(x, y) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx - \int_{-R(v_j)}^{R(v_j)} f(x, y) dx \leq \frac{\eta}{2T+2}$$

が成り立つ。

## &lt; 付録 30 : 積分順序の交換 4 &gt;

(補題 3 (ii) の証明の続き)

$$\begin{aligned}
K &\geq \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy \geq \int_{-T}^T \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy \\
&\geq \int_{-T}^T \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx - \frac{\eta}{2T+2} \right) dy \\
&= \int_{-T}^T \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy - \frac{2T\eta}{2T+2} > K + \eta - \eta = K
\end{aligned}$$

となり矛盾が生じる。ゆえに  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = L \leq K$

$$\text{一方 } L = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \geq \int_{-R}^R \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \geq \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy$$

$$\text{より } K = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy \leq L \text{ より } L = K. \quad (\text{証明終})$$

**補題 4**

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を非負連続関数で、

$$(A1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \text{ は } x \text{ についての連続関数,}$$

$$(A2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \text{ は } y \text{ についての連続関数と仮定する。}$$

さらに

$$(B) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \text{ が収束すれば,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx \text{ も収束し,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx$$

(証明) 補題 1 と補題 3 より

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dx \right) dy \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^R \left( \int_{-R}^R f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx \quad (\text{証明終})
\end{aligned}$$

< 付録 31 : 積分の順序交換 5 >

定理

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  は連続で

(A1)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy$  は  $x$  についての連続関数、

(A2)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx$  は  $y$  についての連続関数でかつ

(B)  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx \right) dy$  が収束する

と仮定すると、 $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy$  と  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx$  は収束し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx$$

(証明)  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$ ) とし、

$$f_1(x, y) = \max \{u(x, y), 0\}, \quad f_2(x, y) = \max \{-u(x, y), 0\}$$

$$f_3(x, y) = \max \{v(x, y), 0\}, \quad f_4(x, y) = \max \{-v(x, y), 0\}$$

とおくと  $f_j(x, y) \geq 0$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ),  $f_1(x, y) - f_2(x, y) = u(x, y)$

$$f_3(x, y) - f_4(x, y) = v(x, y), \quad |f_j(x, y)| \leq |f(x, y)| \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$|f_j(x_1, y_1) - f_j(x_2, y_2)| \leq |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

だから  $f_j(x, y)$  は連続で

$$0 \leq \int_{-k}^k f_j(x, y) dx \leq \int_{-R}^R |f(x, y)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx$$

より  $\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dx$  は収束している。

次に  $f_j$  が補題 4 の仮定 (A1), (A2) をみたしていることを示す。

$x_0 \in \mathbb{R}$  と  $\varepsilon > 0$  に対し、

$$\int_{\infty}^{\infty} |f(x_0, y)| dy - \int_{-R}^R |f(x_0, y)| dy < \frac{\varepsilon}{6}$$

をみたす正数  $R$  が存在する。

## &lt; 付録 32 : 積分の順序交換 6 &gt;

[定理の証明の続き]

仮定より  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy$  は  $x$  について連続であり、補題 2 より  $\int_{-R}^R |f(x, y)| dy$

も  $x$  について連続だから  $|x - x_0| < \delta_1$  のとき

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy - \int_{-R}^R |f(x, y)| dy < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つように正数  $\delta_1$  をとれる。  $0 \leq f_j(x, y) \leq |f(x, y)|$  より

$|x - x_0| < \delta_1$  のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dy - \int_{-R}^R f_j(x, y) dy = \int_{|y|>R} f_j(x, y) dy \\ &\leq \int_{|y|>R} |f(x, y)| dy < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで  $f_j$  は連続だから  $\int_{-R}^R f_j(x, y) dy$  は  $x$  について連続

である。よって  $|x - x_0| < \delta_2$  のとき

$$\left| \int_{-R}^R f_j(x, y) dy - \int_{-R}^R f_j(x_0, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つように正数  $\delta_2$  がとれる。  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  とすると

$|x - x_0| < \delta$  のとき

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x_0, y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dy - \int_{-R}^R f_j(x, y) dy \right| + \left| \int_{-R}^R f_j(x, y) dy - \int_{-R}^R f_j(x_0, y) dy \right| \\ &+ \left| \int_{-R}^R f_j(x_0, y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x_0, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

従って  $(A1)_j : \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dy$  は  $x$  について連続である。

同様に  $(A2)_j : \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dx$  は  $y$  について連続である。

また  $0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx$  と仮定 (B) から

$$(B)_j : \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dx \right) dy \text{ も収束する。}$$

< 付録 33 : 積分の順序交換 6 >

[定理の証明の続き]

よって  $f_j$  は補題 4 の仮定をすべてみたすので、 $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dy \right) dx$

も収束し、 $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, y) dy \right) dx \quad (j = 1, 2, 3, 4)$

が成立する。 $f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y) + if_3(x, y) - if_4(x, y)$  だから、

$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy$  と  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx$  は共に収束し、

$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx$  が成立する。 (証明終)

**例**  $F(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \geq 1)$  とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \times 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) - (-x) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ここで  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  は  $x, y \geq 1$  で連続だから、

定数  $a, b (a > 1, b > 1)$  に対し

$$\int_1^b \left\{ \int_1^a \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right\} dy = \int_1^a \left\{ \int_1^b \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right\} dx$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}(a) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{\pi}{4}$$

ここで  $\tan^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan^{-1}(0) = 0$  より

$$\int_1^{\infty} \left\{ \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right\} dy = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_1^{\infty} \left\{ \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right\} dx = -\frac{\pi}{4}$$

よって  $\int_1^{\infty} \left( \int_1^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \neq \int_1^{\infty} \left( \int_1^{\infty} f(x, y) dy \right) dx$  である。

## &lt; 付録 34 : 積分の順序交換 8 &gt;

## 補題 5

関数  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  が  $t \in [a, b]$ に関して区分的に連続、 $x \in [c, d]$  に関して

連続ならば

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(t, x) dt \right) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(t, x) dx \right) dt$$

(証明)  $f(t, x)$  の  $t$  についての不連続点を  $t_0, t_1, \dots, t_m$  $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$  とする。  $1 \leq k \leq m$  に対し

$$f_k(t, x) = \begin{cases} f(t_k - 0, x) & : t = t_k \\ f(t, x) & : t_{k-1} < t < t_k \\ f(t_{k-1} + 0, x) & : t = t_{k-1} \end{cases}$$

とおくと、 $f_k$  は  $[t_{k-1}, t_k] \times [c, d]$  で定義された連続関数

である。補題 1 より

$$\begin{aligned} \int_c^d \left( \int_a^b f(t, x) dt \right) dx &= \int_c^d \left( \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t, x) dt \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^m \int_c^d \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k(t, x) dt \right\} dx = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \int_c^d f_k(t, x) dx \right\} dt = I \text{ とおく} \end{aligned}$$

ここで  $F_k(t) = \int_c^d f_k(t, x) dx$ ,  $F(t) = \int_c^d f(t, x) dx$  とおくと $F_k(t)$  は  $[t_{k-1}, t_k]$  で連続であり、 $t_{k-1} < t < t_k$  では  $F_k(t) = F(t)$ だから  $\int_{t_{k-1}}^{t_k} F_k(t) dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(t) dt$  である。よって

$$I = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} F_k(t) dt = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(t) dt = \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(t, x) dx \right\} dt \quad (\text{証明終})$$

< 付録 35 : 畳み込み 1 >

**定義**  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が  $\mathbb{R}$  の任意の有界閉区間で積分可能であり,

各  $t$  に対し  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)|dx$  が収束するとき, 関数

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$$

を  $f$  と  $g$  との **畳み込み** または **合成積** という。

**補題**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が有界連続,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は  $\mathbb{R}$  内の任意有界閉区間で

積分可能であり,  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$  は収束する。

このとき  $f * g$  は有界連続である。

(証明)  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = M (< \infty)$  とする。

$$|(f * g)(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)|dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$$

より  $f * g$  は有界である。 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$  は収束するので, 任意の

正数  $\varepsilon$  に対し,

$$\int_{|x|>R} |g(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{4M+1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

をみたす正数  $R$  が存在する。今  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対し,  $f$  は

有界閉区間  $[t_0 - 1 - R, t_0 + 1 + R]$  で連続だから, その中で

一様連続である。よってある  $\delta (0 < \delta < 1)$  が存在して,

$u, v \in [t_0 - 1 - R, t_0 + 1 + R], |u - v| < \delta$  のとき

$$|f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx + 1}$$

とくに  $|t - t_0| < \delta, x \in [-R, R]$  のとき,

$$|f(t-x) - f(t_0-x)| \leq \frac{\varepsilon}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx + 1} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

## &lt; 付録 36 : 畳み込み 2 &gt;

[補題の証明の続き] ①, ②より  $|t - t_0| < \delta$  のとき

$$\begin{aligned}
|(f * g)(t) - (f * g)(t_0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-x)g(x)dx \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x) - f(t_0-x)| \cdot |g(x)|dx \\
&= \int_{|x| \leq R} |f(t-x) - f(t_0-x)| \cdot |g(x)|dx + \int_{|x| > R} |f(t-x) - f(t_0-x)| \cdot |g(x)|dx \\
&\leq \sup_{|x| \leq R} |f(t-x) - f(t_0-x)| \int_{|x| \leq R} |g(x)|dx + \int_{|x| > R} (|f(t-x)| + |f(t_0-x)|) |g(x)|dx \\
&\leq \sup_{|x| \leq R} |f(t-x) - f(t_0-x)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx + 2M \int_{|x| > R} |g(x)|dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ より } f * g \text{ は } t = t_0 \text{ で連続である。 (証明終)}
\end{aligned}$$

## 定理

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は有界で連続かつ絶対可積分

$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty \right)$  とする。このとき、次が成り立つ。

(i)  $f * g$  は有界で連続かつ絶対可積分である。

(ii) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$$

(iii) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt$$

(iv) 
$$\mathcal{F}[f * g](x) = \mathcal{F}[f](x) \cdot \mathcal{F}[g](x)$$

ここで  $\mathcal{F}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dx$  は  $f$  のフーリエ変換である。

## &lt; 付録 37 : 畳み込み 3 &gt;

[定理の証明]

(i)(ii) 補題より  $f * g$  は有界連続である。また  $|f|, |g|$  に補題を適用することにより

$$(|f| * |g|)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)| dx$$

は  $t$  について連続である。一方

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)| dt \cdot |g(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds \cdot |g(x)|$$

は  $x$  の連続関数で

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)| dt \right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds \right) |g(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx \end{aligned}$$

は収束する。よって積分順序交換の定理 (P.106) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx \right) dt$$

は収束し、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dt \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \text{ となる。} \end{aligned}$$

(iii) 任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して

$$|(f * g)(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)| dx = (|f| * |g|)(t)$$

であり、 $|f|$  と  $|g|$  に対し (ii) の結果から  $\int_{-\infty}^{\infty} (|f| * |g|)(t) dt$  は収束し

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|f| * |g|)(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} (|f| * |g|)(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$$

## &lt; 付録 38 : 畳み込み 4 &gt;

[定理の証明の続き]

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad \mathcal{F}[f * g](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-ixt} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)dy \right) e^{-ixt} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)e^{-ixt} dy \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)e^{-ix(t-y)} \cdot g(y)e^{-ixy} dy \right) dt = I \text{ とおく。}
 \end{aligned}$$

ここで  $x$  を固定し、 $F(t) = f(t)e^{-ixt}$  ,  $G(t) = g(t)e^{-ixt}$  とおくと

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t-y)G(y)dy \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (F * G)(t)dt \text{ である。}$$

$F, G$  は有界で連続かつ絶対可積分だから

(ii) の結果より

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (F * G)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(t)dt$$

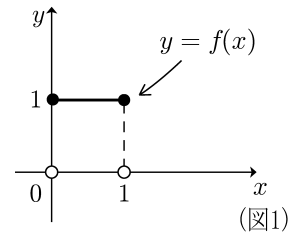
となるから

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f * g](x) &= I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ixt} dt \\
 &= \mathcal{F}[f](x) \cdot \mathcal{F}[g](x) \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

< 付録 39 : 畳み込み 5 >

例  $f(x) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases}$  のとき、 $f$  と  $f$  との畳み込みは

$$f_2(x) = (f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy = \int_0^1 f(x-y)dy$$



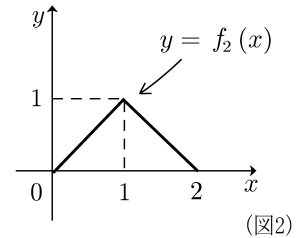
①  $x < 0$  のとき  $f_2(x) = 0$

②  $0 \leq x \leq 1$  のとき  $f_2(x) = \int_0^x f(x-y)dy + \int_x^1 f(x-y)dx = \int_0^x 1dx = x$

③  $1 \leq x \leq 2$  のとき  $f_2(x) = \int_0^{x-1} f(x-y)dy + \int_{x-1}^1 f(x-y)dy = \int_{x-1}^1 1dx = 2 - x$

④  $2 < x$  のとき  $f_2(x) = 0$

となり、従って  $f_2(x)$  のグラフは図 2 のようになる。

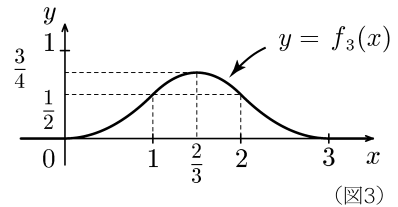


さらに  $f_2$  と  $f$  との畳み込み

$$f_3(x) = (f_2 * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-y)f(y)dy = \int_0^1 f_2(x-y)dy$$

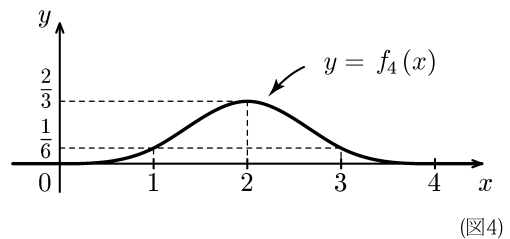
を計算すると

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & : 0 \leq x \leq 1 \\ -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} & : 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x-3)^2 & : 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & : 3 < x \end{cases}$$



となり、グラフは図 3 のようになる。

また  $f_4(x) = (f_3 * f)(x)$  のグラフは図 4 のようになる。



一般に  $f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  をみたす関数  $f$  を確率密度関数という。

確率密度関数  $f$  の自分自身との畳み込み  $f_n = f_{n-1} * f$  ( $n \geq 2$ ) は  $n$  が大きくなると正規分布曲線に近づく。(確率論の中心極限定理による。)

この例は  $f$  が不連続関数でも  $f_2 = f * f$  は連続関数になり、 $f_3 = f_2 * f$  は微分可能な関数になる。このように、畳み込みによって、元の関数よりなめらかな曲線になる。

< 付録 40 : 広義積分の発散する例 >

$$\text{P.43 の例の場合、} f(t) = \begin{cases} 1 & : |t| \leq 1 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases} \text{ のとき}$$

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = \frac{2 \sin x}{x} \text{ となる。} F(x) = \frac{2 \sin x}{x} \text{ のとき}$$

$$\text{広義積分 } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{2 \sin x}{x} e^{ixt} dx$$

が発散することを示す。

[ $t = 1$  のとき]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_a^b F(x)e^{ix} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{2 \sin x}{x} (\cos x + i \sin x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left( \frac{\sin(2x)}{x} + \frac{2i \sin^2 x}{x} \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\sin(2x)}{x} dx = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \frac{1}{\pi} \int_{2a}^{2b} \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2}$$

より前の項は収束する。しかし後の項は発散する。

$b = n^2$  ,  $a = -n$  のとき

$$\int_a^b \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_{-n}^n \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_n^{n^2} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_n^{n^2} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

ここで  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$  より

$$\int_a^b \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_n^{n^2} \frac{1 - \cos(2x)}{2x} dx = \int_n^{n^2} \frac{1}{2x} dx - \int_n^{n^2} \frac{\cos(2x)}{2x} dx = x_n - y_n$$

$$x_n = \int_n^{n^2} \frac{1}{2x} dx \quad , \quad y_n = \int_n^{n^2} \frac{\cos(2x)}{2x} dx \text{ とする。} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ である。}$$

$$y_n = \int_n^{n^2} \frac{\sin(2x + \frac{\pi}{2})}{2x} dx = \int_{2n+\frac{\pi}{2}}^{2n^2+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u - \frac{\pi}{2}} \cdot 2 \cdot du = 2 \int_{2n+\frac{\pi}{2}}^{2n^2+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u - \frac{\pi}{2}} du$$

$$= 2 \int_{2n+\frac{\pi}{2}}^{2n^2+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du + \pi \int_{2n+\frac{\pi}{2}}^{2n^2+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u(u - \frac{\pi}{2})} du \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n^2} \frac{\sin^2 x}{x} dx = +\infty$  となるので

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n^2} \frac{2 \sin x}{x} e^{ix} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n^2} \frac{\sin(2x)}{x} dx + \frac{i}{\pi} \int_n^{n^2} \frac{\sin^2 x}{x} dx \text{ は発散する。}$$

< 付録 41 : フーリエ級数の収束とフーリエ逆変換の収束 >

$f(t)$  を周期  $2\pi$  の周期関数とする。  $f(t)$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和  $S_n(t)$  は

$$\begin{aligned} S_n(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du \right) + \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(ku) du \right) \cos(kt) + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(ku) du \right) \sin(kt) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(k(t-u)) du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(t-u) du = (f * D_n)(t) \end{aligned}$$

と表される。ここで

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right\}$$

である。この関数  $D_n(t)$  を **ディリクレ核** (Dirichlet kernel) と呼ぶ。

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} = e^{-itn} \sum_{k=0}^{2n} (e^{it})^k \\ &= e^{-itn} \times \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

よりディリクレ核は

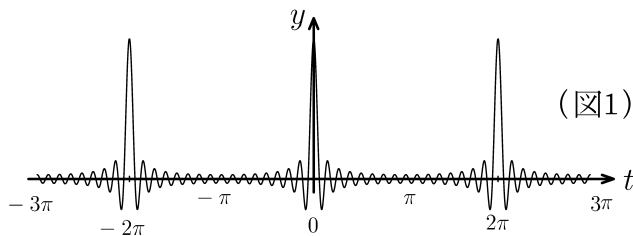
$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi \sin(\frac{t}{2})}$$

と表される。そして  $f(t)$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和  $S_n(t)$  は  $f(t)$  と  $D_n(t)$  との合成積 (畳み込み) で表される。  $n \rightarrow \infty$  のとき、  $D_n(t)$  は周期  $2\pi$  のデルタ関数に収束すると考えればよい。

ディリクレ核  $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\pi \sin(\frac{t}{2})}$  はデルタ近似関数列  $\rho_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}$  とよく似ている。(P.48 参照)

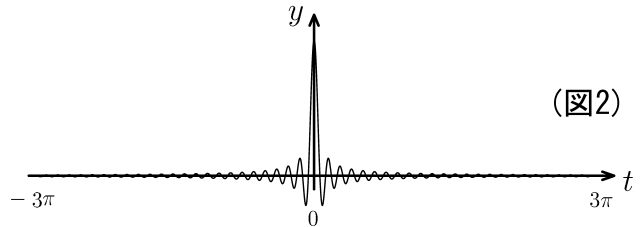
実際  $-\pi < t < \pi$  の範囲ではグラフはほとんど同じであるが、ディリクレ核は周期  $2\pi$  の周期関数であるところが  $\rho_n(t)$  と異なる。図 1 と図 2 は  $n = 16$  のときのグラフである。

< ディリクレ核  $D_n(t)$  >



(図1)

< デルタ近似関数列  $\rho_n(t)$  >



(図2)

< フーリエ級数の収束 >

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f * D_n)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \quad (-\pi < t < \pi)$$

< フーリエ逆変換の収束 >

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t)]] = \lim_{n \rightarrow \infty} (f * \rho_n)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \quad (-\infty < t < \infty)$$

## &lt; 付録 42 : P70 の捕捉説明 &gt;

## 補題

2 変数関数  $\varphi(t, u)$  が連続で偏微分可能であり, 偏導関数  $\varphi_t(t, u)$  が連続であれば

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t, u) du = \varphi(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, u) du$$

$$\text{(証明)} \quad \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t, u) du = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{t+h} \varphi(t+h, u) du - \int_0^t \varphi(t, u) du \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{t+h} \frac{\varphi(t+h, u) - \varphi(t, u)}{h} du + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(t, u) du \right\}$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, u) du + \varphi(t, t) \quad (\text{証明終})$$

例 P70 例題の  $x(t) = \int_0^t \{e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\} f(u) du$  が解であることを確かめる。

$g(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$  とおくと  $g(t)$  は同次微分方程式の解である。つまり

$$g''(t) + 5g'(t) + 6g(t) = 0$$

が成立する。また

$$x(t) = \int_0^t g(t-u) f(u) du = (g * f)(t)$$

である。  $g(0) = 0$  と補題から

$$x'(t) = g(0) f(t) + \int_0^t g'(t-u) f(u) du = \int_0^t g'(t-u) f(u) du$$

となる。  $g'(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t}$  より  $g'(0) = 1$  から

$$x''(t) = g'(0) f(t) + \int_0^t g''(t-u) f(u) du = f(t) + \int_0^t g''(t-u) f(u) du$$

よって

$$\begin{aligned} & x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) \\ &= f(t) + \int_0^t \{g''(t-u) + 5g'(t-u) + 6g(t-u)\} f(u) du = f(t) \end{aligned}$$

でかつ  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$  より  $x(t)$  が例題の解であることが確かめられた。

< 問題の解答 No.1 >

**P.53** (ラプラス変換)

(1)  $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$       (2)  $\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$       (3)  $\mathcal{L}[e^{it}] = \frac{1}{s-i}$

**P.54**

(1)  $\mathcal{L}[\sin(kt)] = \frac{k}{s^2+k^2}$  ,    (2)  $\mathcal{L}[e^{(\alpha+ki)t}] = \frac{1}{s-\alpha-ki}$   
 (3)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cos(kt)] = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{L}[e^{(\alpha+ki)t}] + \mathcal{L}[e^{(\alpha-ki)t}] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s-\alpha-ki} + \frac{1}{s-\alpha+ki} \right\} = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+k^2}$   
 (4)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \sin(kt)] = \frac{i}{2} \left\{ \mathcal{L}[e^{(\alpha-ki)t}] - \mathcal{L}[e^{(\alpha+ki)t}] \right\} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{s-\alpha+ki} - \frac{1}{s-\alpha-ki} \right\} = \frac{k}{(s-\alpha)^2+k^2}$

**P.55**

(1)  $\mathcal{L}[t^2] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[t] = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2} \right) = \frac{2}{s^3}$  ,    (2)  $\mathcal{L}[t^3] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[t^2] = -\frac{d}{ds} \left( \frac{2}{s^3} \right) = \frac{6}{s^4}$   
 (3)  $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$  ,    (4)  $\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$  ,    (5)  $\mathcal{L}[te^{\alpha t}] = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s-\alpha} \right) = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$   
 (6)  $\mathcal{L}[t \cos(kt)] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos(kt)] = -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2+k^2} \right) = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$   
 (7)  $\mathcal{L}[t \sin(kt)] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin(kt)] = -\frac{d}{ds} \left( \frac{k}{s^2+k^2} \right) = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$   
 (8)  $\mathcal{L}[\sinh(kt)] = \mathcal{L}\left[ \frac{1}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k} \right) = \frac{k}{s^2-k^2}$   
 (9)  $\mathcal{L}[\cosh(kt)] = \mathcal{L}\left[ \frac{1}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k} \right) = \frac{s}{s^2-k^2}$

**P.56**

問の解  $\mathcal{L}[f'''(t)] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$

**P.62** (ラプラス逆変換 2)

$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	1	t	t <sup>n</sup>	e <sup>at</sup>	te <sup>at</sup>	sin(ωt)	cos(ωt)	e <sup>at</sup> sin(ωt)	e <sup>at</sup> cos(ωt)

$F(s)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\frac{1}{s} e^{-\alpha s}$	$e^{-\alpha\sqrt{s}}$
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	t sin(ωt)	t cos(ωt)	sinh(ωt)	cosh(ωt)	$f(t) = \begin{cases} 1 : t \geq \alpha \\ 0 : t < \alpha \end{cases}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$

**P.63**

(1)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-s-2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1} \right\}\right] = \frac{1}{3} (e^{2t} - e^{-t})$   
 (2)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} \right\}\right] = \frac{1}{4} (e^{2t} - e^{-2t})$   
 (3)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+1}\right] = e^{2t} \sin t$

## &lt; 問題の解答 No.2 &gt;

**P.64** (ラプラス逆変換 4)

- (1)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2-8s+16}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-4+1}{(s-4)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4} + \frac{1}{(s-4)^2}\right] = e^{4t} + te^{4t}$
- (2)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2-6s+9}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3+4}{(s-3)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} + 4 \times \frac{1}{(s-3)^2}\right] = e^{3t} + 4te^{3t}$
- (3)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2-2s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1+3}{(s-1)^2+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right] = e^t \cos(2t) + \frac{3}{2}e^t \sin(2t)$
- (4)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2-4s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-2)+4}{(s-2)^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 \times \frac{s-2}{(s-2)^2+1} + 4 \times \frac{1}{(s-2)^2+1}\right] = 2e^{2t} \cos t + 4e^{2t} \sin t$

**P.65**

- (1)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{(s-a)^2}\right] = (te^{at}) * f(t) = \int_0^t (t-u)e^{a(t-u)}f(u)du$
- (2)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{(s-a)(s-b)}\right] = \left\{\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})\right\} * f(t) = \frac{1}{a-b} \int_0^t (e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)})f(u)du$
- (3)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{(s-a)^2+b^2}\right] = \left\{\frac{1}{b}e^{at}\sin(bt)\right\} * f(t) = \frac{1}{b} \int_0^t e^{a(t-u)}\sin(b(t-u))f(u)du$

**P.66** (ラプラス逆変換 6)

- (1)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s^3}\right] = a + bt + \frac{c}{2}t^2$       (2)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a+bs}{s^2+1}\right] = a \sin t + b \cos t$
- (3)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos(2t)$       (4)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\right] = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$
- (5)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2+1}{(s-2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}\right] = e^{2t} + te^{2t}$
- (6)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-2)(s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{7}{6}}{s+4} - \frac{\frac{1}{6}}{s-2}\right] = \frac{7}{6}e^{-4t} - \frac{1}{6}e^{2t}$
- (7)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{(s-2)^3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right)\right] = -t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] = -t^2e^{2t}$
- (8)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s^4-16}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right) - \frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \sin(2t)$

**P.67** (常微分方程式への応用 1)

(1)  $\frac{dx}{dt} = kx$ ,  $x(0) = a$

(解) 解を  $x(t)$  とし, そのラプラス変換を  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  とおく。

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - a, \quad \mathcal{L}[kx] = kX(s) \quad \text{より (1) 式の}$$

両辺をラプラス変換すると

$$sX(s) - a = kX(s) \Rightarrow X(s) = \frac{a}{s-k}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s-k}\right] = ae^{kt}$$

(答)  $x(t) = ae^{kt}$

< 問題の解答 No.3 >

**P.67** (常微分方程式への応用 1)

(2)  $\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}$  ,  $x(0) = 1$

(解) 解を  $x(t)$  とし, そのラプラス変換を  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  とおく。(2) 式の両辺をラプラス変換すると

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right] = e^{-t} + te^{-t} \quad \underline{\text{(答) } x(t) = e^{-t} + te^{-t}}$$

**P.68** (常微分方程式への応用 2)

(1)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = e^t$  ,  $x(0) = 0$  ,  $x'(0) = 0$

(解) 解を  $x(t)$  とし, そのラプラス変換を  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  とおく。

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) \text{ , } \mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) \text{ , } \mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$$

より (1) の式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s) - 5sX(s) + 6X(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3}\right] = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$\underline{\text{(答) } x(t) = \frac{1}{2}(e^t - 2e^{2t} + e^{3t})}$$

(2)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$  ,  $x(0) = 1$  ,  $x'(0) = 1$

(解) 解を  $x(t)$  とし, そのラプラス変換を  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  とおく。

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1 \text{ , } \mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - s - 1$$

より (2) の式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s) - s - 1 - 4(sX(s) - 1) + 4X(s) = 0 \Rightarrow (s^2 - 4s + 4)X(s) = s - 3$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s-3}{s^2-4s+4} = \frac{s-2-1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}\right] = e^{2t} - te^{2t} \quad \underline{\text{(答) } x(t) = e^{2t} - te^{2t}}$$

**P.69** (常微分方程式への応用 3)

(1)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$  ,  $x(0) = 0$  ,  $x'(0) = 1$

(解) 解を  $x(t)$  とし, そのラプラス変換を  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  とおくと

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) \text{ , } \mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 1 \text{ より}$$

(1) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s) - 1 - 2sX(s) + 5X(s) = 0 \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{(s-1)^2 + 4}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2 + 4}\right] = \frac{1}{2}e^t \sin(2t) \quad \underline{\text{(答) } x(t) = \frac{1}{2}e^t \sin(2t)}$$

## &lt; 問題の解答 No.4 &gt;

**P.69** (常微分方程式への応用 3)

(2)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 1$

(解) 解を  $x(t)$  とし, そのラプラス変換を  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$  とおく。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - s - 1 \quad \text{より (2) 式をラプラス変換すると}$$

$$s^2X(s) - s - 1 + 4X(s) = \frac{2}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{s+1}{s^2+4} + \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{(\text{答}) } x(t) = \cos(2t) + \frac{1}{6}\sin(2t) + \frac{2}{3}\sin t}$$

**P.70** (常微分方程式への応用 4)

(1)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = f(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$

(解)  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ,  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  とおき (1) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s) - 3sX(s) + 2X(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2} = \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right)F(s)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right)F(s)\right] = (e^{2t} - e^t) * f(t) = \underline{\underline{\int_0^t \{e^{2(t-u)} - e^{t-u}\} f(u) du}}$$

(2)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = f(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$

(解)  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ,  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  とおき (2) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s) + 6sX(s) + 10X(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 6s + 10} = \frac{1}{(s+3)^2 + 1} \times F(s)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2 + 1}F(s)\right] = (e^{-3t} \sin t) * f(t) = \underline{\underline{\int_0^t e^{-3(t-u)} \sin(t-u) f(u) du}}$$

**P.71** (常微分方程式への応用 5)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

(解)  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ,  $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$  とおく。

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s), \quad \mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

より微分方程式をラプラス変換すると

$$\begin{cases} sX(s) = X(s) + Y(s) & \Rightarrow (s-1)X(s) - Y(s) = 0 \\ sY(s) - 1 = -X(s) + 3Y(s) & \Rightarrow X(s) + (s-3)Y(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (s-3)(s-1)X(s) - (s-3)Y(s) = 0 \\ +) \quad \quad \quad X(s) + (s-3)Y(s) = 1 \\ \hline (s^2 - 4s + 4)X(s) \quad \quad \quad = 1 \end{array}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, \quad Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2} = \frac{s-2+1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] = te^{2t}, \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}\right] = e^{2t} + te^{2t} \quad (\text{答}) \begin{cases} x(t) = te^{2t} \\ y(t) = e^{2t} + te^{2t} \end{cases}$$