< 数列の収束・振動 >

数列 a_n が実数 α に収束するということは、a_n と α との距離 $|a_n - \alpha|$ が限りなく 0 に近づくことを同じである。

$$a_n \to \alpha \iff a_n \text{ と } \alpha \text{ との距離} \to 0 \iff |a_n - \alpha| \to 0$$

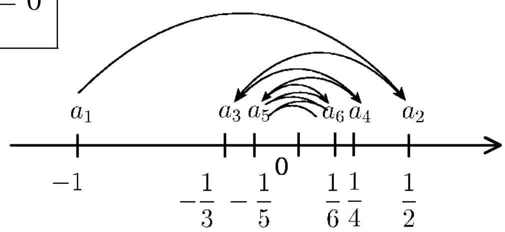
従って

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0}$$

となる。特に $\alpha = 0$ のときは

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0}$$

である。



例 数列 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ は

$$a_1 = -1\ ,\ a_2 = \frac{1}{2}\ ,\ a_3 = -\frac{1}{3}\ ,\ a_4 = \frac{1}{4}\ ,\ \cdots$$

となってプラス・マイナスが交互にくるが、その絶対値をとると

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty \text{ のとき})$$

より

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \text{ だから } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-0.99)^n =$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-3)^n} =$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n}{4^n} =$

問 2 等比数列 $a_n = r^n$ を考える。11, 12 ページを参考にして、以下の□の中に極限値を記入せよ。

(1) $r > 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(2) $r = 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = \boxed{}$

(3) $0 < r < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(4) $r = 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0^n = \boxed{}$

(5) $-1 < r < 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(注) $r = -1$ のときは $a_n = (-1)^n$ であるから

$$a_1 = -1\ ,\ a_2 = 1\ ,\ a_3 = -1\ ,\ a_4 = 1\ ,\ a_5 = -1\ ,\ a_6 = 1\ ,\ \cdots$$

となって -1 と $+1$ が交互に表われる。従ってこの場合は収束しない。このような場合 $\{a_n\}$ は**振動する**という。