0　はじめに

今日は“関係を図で表現する道具”について2時間の授業をします。

関係を図で表現する道具を私たちは“グラフ”と呼んでいます。このグラフは，1次関数のグラフとか円のグラフというときのグラフとは一見違います。このテキストの4ページ以降に書かれている丸と直線で表現されている図が，今日勉強するグラフです。1次関数のグラフとか円のグラフも x と y の関係を図で表現したものですが，今日勉強するグラフとは表現の仕方がちょっと違います。

練習問題をたくさん作りました。難しいかもしれませんが，やってみましょう。

1　関係を数学的に定義すると

集合 A と集合 B の直積集合 $A \times B$ の任意の部分集合を“**$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ への関係**”という。A から A への関係を単に“**$\boldsymbol{A}$ 上の関係**”という。以下では A 上の関係だけを考える。

- 集合って何？
  ある“もの”の集まりを**集合**という。

  ［**例 1-1**］例えば：$A = \{a, b, c\}$ とか $B = \{$ リンゴ, ミカン, ナシ, ブドウ $\}$ など

- 直積集合 $A \times B$ とは？
  A の要素と B の要素のペアを全部集めた集合。2つの要素 x と y のペアを (x, y) と書く。

  ［**例 1-2**］

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a, \text{リンゴ}), (a, \text{ミカン}), (a, \text{ナシ}), (a, \text{ブドウ}),\\ &(b, \text{リンゴ}), (b, \text{ミカン}), (b, \text{ナシ}), (b, \text{ブドウ}),\\ &(c, \text{リンゴ}), (c, \text{ミカン}), (c, \text{ナシ}), (c, \text{ブドウ})\} \end{aligned}$$

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$B \times B = \{(\text{リンゴ}, \text{リンゴ}), (\text{リンゴ}, \text{ミカン}), (\text{リンゴ}, \text{ナシ}), ..., (\text{ブドウ}, \text{ブドウ})\}$$

- 部分集合とは，もとの集合からいくつかの要素を集めてできる集合。もとの集合の要素を全部集めてもよい。

  ［**例 1-3**］次の集合はすべて $A \times A$ の部分集合であるから，A 上の関係である。

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, \qquad R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$$

$$R_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}, \qquad R_4 = \{(a, c), (b, c), (c, a), (c, b)\},$$

$$R_5 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\} = A \times B$$

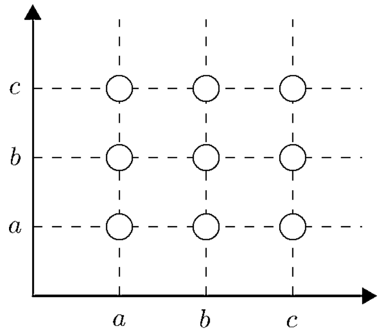
【練習問題 1】果物の集合 $B = \{$ リンゴ, ミカン, ナシ, ブドウ $\}$ 上の関係の例をひとつあげよ。その関係に特別な意味づけをする必要はない。

2 関係を座標図で表現する

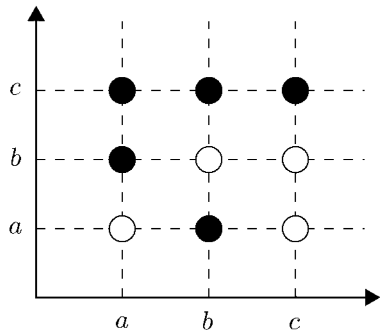
下のような図を考える。ひとつの丸は直積集合 $A \times A$ の要素に対応している。

直積集合の部分集合として集めてきた要素を黒丸にすれば関係を図で表現できる。これを関係の**座標図**という。右下の座標図は $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,c)\}$ を座標図で表現したものである。

$A \times A$

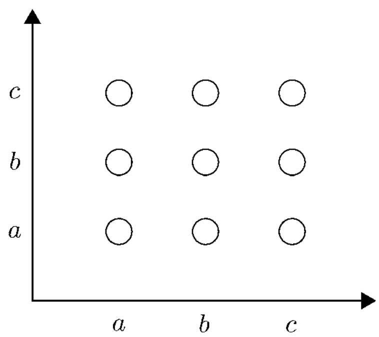


R_2



【練習問題 2-1】 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_3 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ の座標図を完成せよ。また，同じ集合 A 上の関係 $R_4 = \{(a,c),(b,c),(c,a),(c,b)\}$ を座標図で表現せよ。
［この 2 つの関係は “対称な関係” であるが，関係 R_2 は対称ではない。

R_3



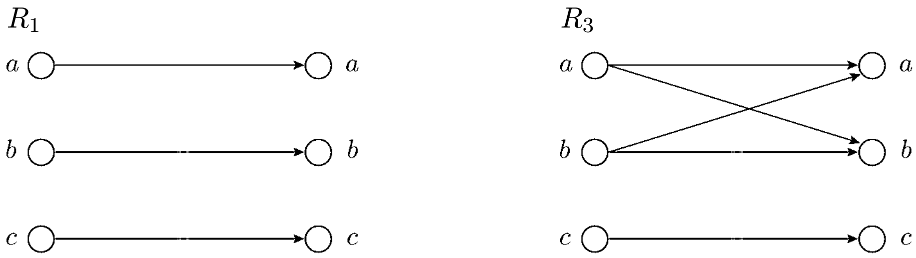
R_4

【練習問題 2-2】 果物の集合 $B = \{$ リンゴ, ミカン, ナシ, ブドウ $\}$ 上の関係で対称な例をひとつ考え，それを座標図で表現せよ。

3　関係を矢線図で表現する

左側と右側に集合の各要素に対応する小さな白丸をそれぞれ縦に並べ，要素のペア (x, y) が関係に選ばれているとき，左側の列の要素 x の白丸から右側の列の要素 y の白丸へ矢印がついた線を引く。このような図を関係の**矢線図**という。

［**例 3**］集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の 2 つの関係 $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ と $R_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ の矢線図はそれぞれ下のようになる。

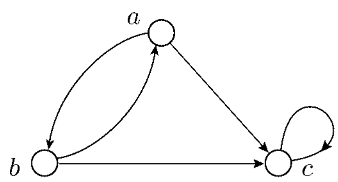


【**練習問題 3**】集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の 2 つの関係 $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$ と $R_4 = \{(a, c), (b, c), (c, a), (c, b)\}$ を矢線図でそれぞれ表現せよ。

4　関係を有向グラフで表現する

矢線図では，集合のひとつの要素に対応する小さな白丸が左と右にそれぞれひとつずつある。そこで，同じ要素に対応する白丸をひとつにまとめ，これを**頂点**と呼ぶ。頂点は一列に並べる必要はなく，平面上のどこに書いてもよい。要素のペア (x, y) が関係に選ばれているとき，要素 x の白丸（頂点）から要素 y の白丸（頂点）へ矢印がついた線を引くことによってできる図を関係の**有向グラフ**という。矢印がついた線は**有向辺**と呼ばれる。ただし，要素のペア (x, x) に対しては，x の頂点から出てその頂点へ帰ってくる有向辺になり，これを特に**ループ**と呼ぶ。

［**例 4**］集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$ の有向グラフは右のようになる。頂点 c にループがある。



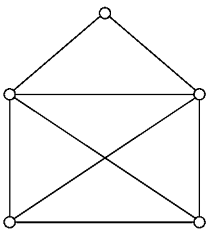
【**練習問題 4**】集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の 2 つの関係 $R_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ と $R_4 = \{(a, c), (b, c), (c, a), (c, b)\}$ を有向グラフでそれぞれ表現せよ。

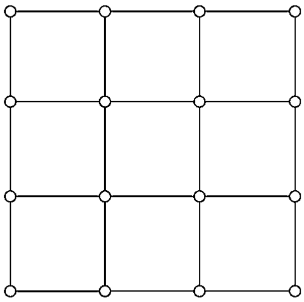
5　ケーニヒスベルグの七つの橋：グラフ理論の誕生

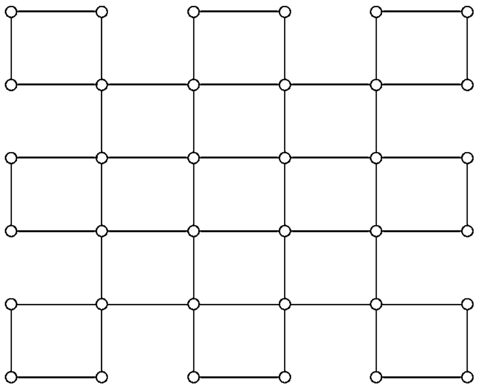
オイラー（Euler : 1707-1782）は，1736 年にケーニヒスベルグ（Königsberg）の七つの橋の問題をグラフを用いて解決した。

- **無向グラフ**：頂点と無向辺からなる図。無向辺を単に辺と呼ぶ
- 頂点の**次数**：頂点につながっている辺の本数
- **多重辺**：同じ頂点間にある辺
- **オイラー閉路**：一筆書きができる閉じた道筋
＝すべての辺をちょうど一回だけ通って元へ戻る道筋
- **オイラーグラフ**：オイラー閉路があるグラフ
＝すべての頂点の次数が偶数である連結なグラフ
- 単純グラフ：ループも多重辺ももたないグラフ
- 多重辺をもたない無向グラフは，頂点に対応する集合の上の対称な関係を図で表現したもの

【練習問題 5】下のグラフがオイラーグラフなら，そのオイラー閉路を見つけよ。オイラーグラフでなければ，最小本数の辺をつけ加えてオイラーグラフになるようにせよ。多重辺ができてもかまわないが，頂点は増やさないこと。







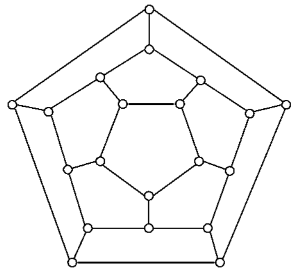
6　握手の定理

『グラフにおいて，各頂点の次数の総和は辺の本数の 2 倍になる』

例えば，あるパーティーに出席した人たちが握手した回数の総和は，パーティーでかわされた握手の回数の 2 倍に一致する。

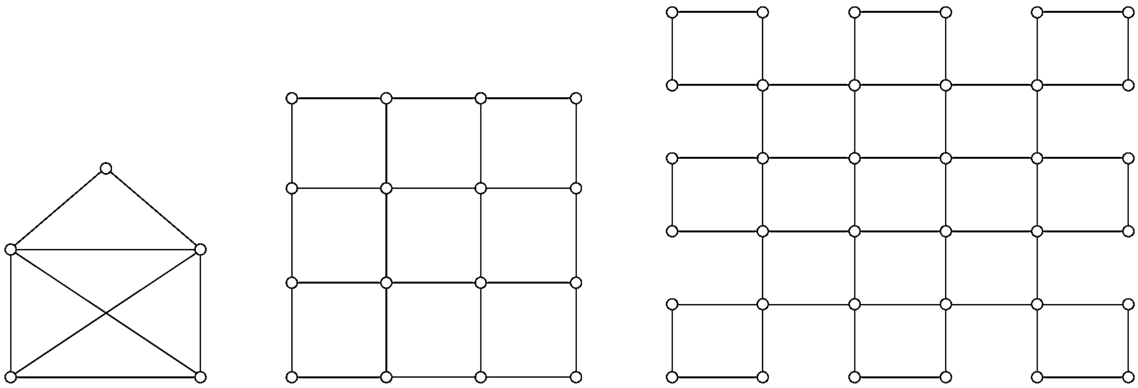
【練習問題 6】ただひとつの頂点の次数が奇数で，それ以外の頂点の次数が偶数であるようなグラフは存在しないことを説明せよ。

7　ハミルトングラフ：難しい問題の例



- 世界周遊の旅問題
- **ハミルトン閉路**：
  すべての点をちょうど一回だけ通って元へ戻る道筋
- **ハミルトングラフ**：ハミルトン閉路があるグラフ
  簡単な調べ方はない！
  ［総当たり法で調べることは可能だが...］
- NP 完全問題：難しい問題。非常に多くの重要な問題が NP 完全であることが証明されており，そのうちの一つを効率よく解く方法を発見すれば，その方法を利用して他のすべての NP 完全問題も効率よく解けることが保証されている。
- ハミルトングラフであるかどうかを判定する問題は NP 完全である。
  「効率よく解く方法を見つけることはあきらめよう...」

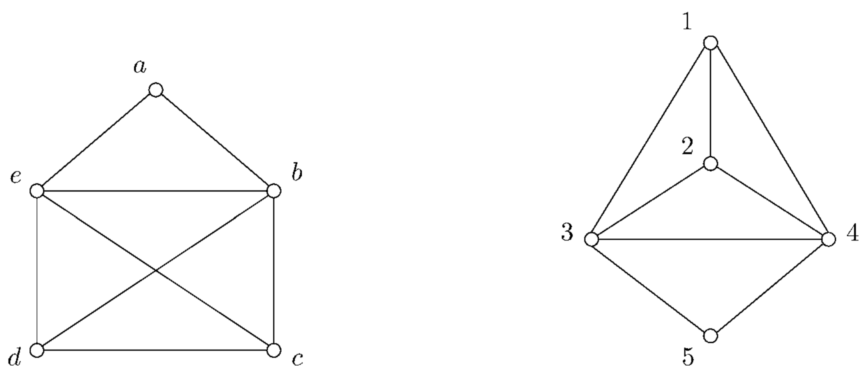
【練習問題 7】 下の 3 つのグラフについて，ハミルトングラフであるかどうかを判定せよ。ハミルトングラフであればそのハミルトン閉路を見つけよ。また，ハミルトングラフでなければ，最小本数の辺をつけ加えてハミルトングラフになるようにせよ。頂点は増やさないこと。



8　同型なグラフ

- 頂点の位置や辺の描き方は全く自由
- **同型なグラフ**：同じグラフ ＝ 頂点どうしにうまく一対一の対応をつけて，
  すべての辺は対応する頂点の間にあるようにできる...

【練習問題 8-1】　下の 2 つのグラフは同型なグラフである。頂点 a, b, c, d, e と頂点 $1, 2, 3, 4, 5$ をどのように対応づけるとよいか。



【練習問題 8-2】 4 個の頂点をもつ同型ではない単純グラフをすべて列挙せよ。

［ヒント：辺の本数が 0，1，5，6 のものはそれぞれ 1 つだけ。辺が 2 本のものと 4 本のものはそれぞれ 2 つあり，辺が 3 本の単純グラフは 3 種類ある。］

<table>
<tr><td>辺 0 本</td><td>辺 1 本</td><td colspan="2">辺 2 本</td></tr>
<tr><td colspan="4">辺 3 本</td></tr>
<tr><td colspan="2">辺 4 本</td><td>辺 5 本</td><td>辺 6 本</td></tr>
</table>

【練習問題 8-3】 下の 3 つのグラフのうち 2 つは同型であるが，他のものはこれらと同型ではない。どれとどれが同型か。また他のものが同型ではない理由を考えよ。