

< 正方形のビリヤード >

前ページからトーラス上のビリヤードと円の回転運動が同等であること、従ってトーラスがビリヤードの軌跡によって塗り潰されることは円が塗り潰されることと同じであり、それは円上のビリヤードの原理に帰着する。実は正方形内部のビリヤードはトーラス上のビリヤードとみなすことができることを以下に示す。

正方形内部のビリヤードは直線運動+境界での完全弾性反射であるから、境界に鏡を置いた場合の光の軌跡と同じである。

図1のように、点Aから出発して、点Bおよび点Cで反射して点Dへ進む軌跡を考える。完全弾性反射(入射角=反射角)から

$$\triangle BCE \equiv \triangle BC'E \quad (\text{合同})$$

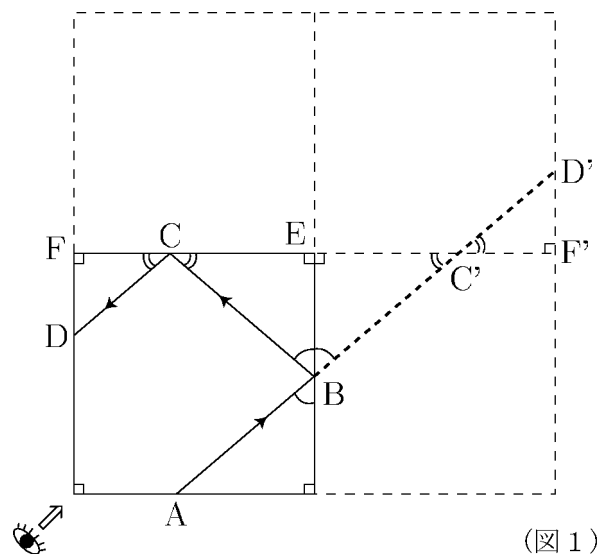
$$\triangle CDF \equiv \triangle C'D'F' \quad (\text{合同})$$

である。

従って4点 A, B, C', D' は1直線上にある。

正方形の境界に鏡を置いて、正方形の左隅から見たとき、同じ正方形が右上方向に無限に見える。

このとき点D上に物体を置いて、点Aから点Bの方向を見ると、直線ABの延長上に物体(D')が見える。この実験をムービーとアニメで見てほしい。



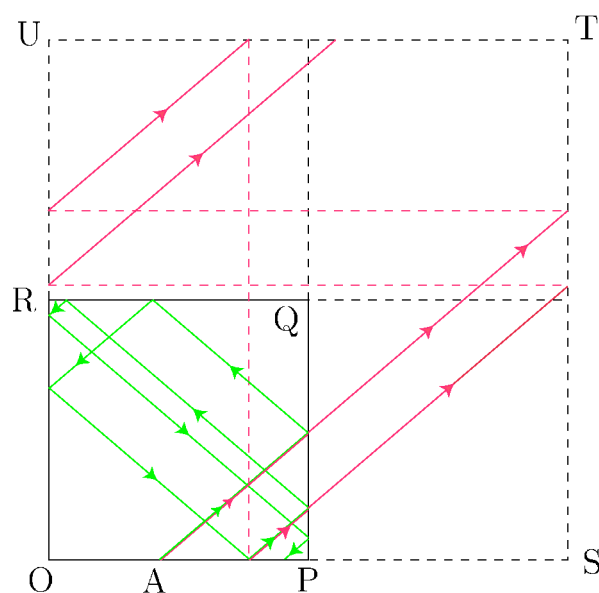
(図1)

実験 (ムービー) [Media Player]

実験 (ムービー) [Quick Time]

アニメ「鏡の部屋」 (Flash)

図2のように小正方形OPQR内のビリヤードの軌跡(緑の折れ線)は大正方形OSTU上のトーラス軌道(赤の実線)とみなせる。トーラスOSTUが塗り潰されれば、正方形OPQRも塗り潰される。



(図2)