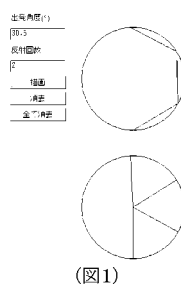


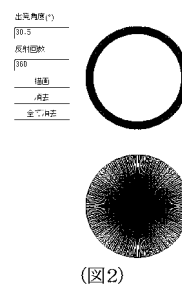
< 円周上の回転とトーラス上のビリヤード >

出発角が θ の円上のビリヤードの反射点を見ると, 中心角 2θ の回転運動である。

図1は出発角度が $\theta = 30.5^\circ$ で, 反射回数2回の場合であり, 図2は同じ角度で反射回数360回の場合である。中心角 $2\theta = 61^\circ$ の回転と考える。



(図1)



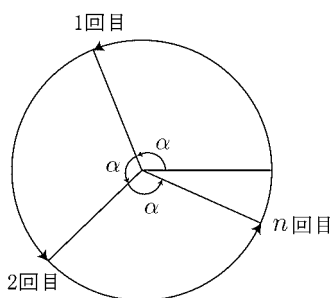
(図2)

61と360は互いに素であるから, 前ページの定理より, 61° 回転で360回まわると, 1° から 360° まで 1° おきに全ての角度が現れる。(図2)

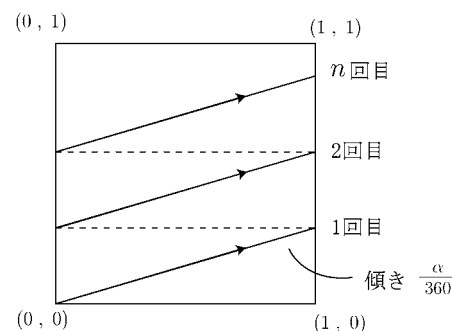
出発角度が 3.05° の時は中心角 6.01° の回転であり, 3600回まわると, 0.1° から 360° まで 0.1° おきに全ての角度が現れる。他の角度でも試してみてもらいたい。

中心角 α の回転運動は, トーラス上のビリヤードで直線の傾きが $\frac{\alpha}{360}$ の場合と同等である。このことを実感してもらうために, シミュレーション「円とトーラス上のビリヤード」を試してみてもらいたい。

例えば中心角 120° の回転運動は3回転で元に戻る。トーラス上では $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ の傾きの直線は x が1増加すると y が $\frac{1}{3}$ 増加するから3回で1に達し, また0に戻る。

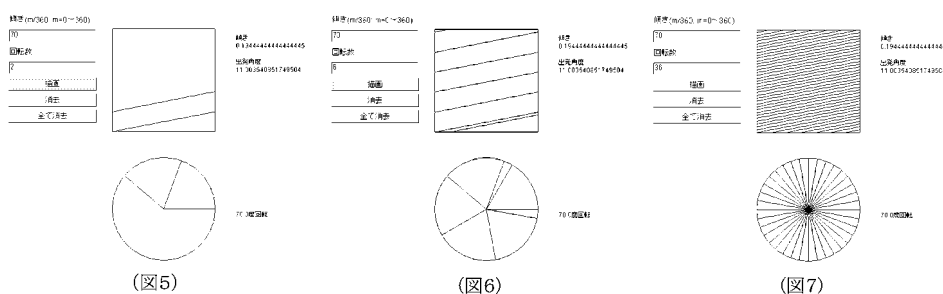


< 円: α 回転 > (図3)



< トーラス: 傾き $\frac{\alpha}{360}$ > (図4)

図5~図7は共に中心角 70° の回転運動と対応するトーラス上のビリヤードの軌跡である。



(図5)

(図6)

(図7)

図5は $n = 2$ の場合, 図6は $n = 6$ の場合, 図7は $n = 36$ の場合である。 $\alpha = 70^\circ$ の場合 n を大きくしても図7以上に密にはならない。

回転角度を変えて, 試してみしてほしい。円が塗り潰されれば, トーラスも塗り潰される。