

## < ビリヤードシミュレーションを実行した人へ >

### < 円の場合 >

出発角度  $\theta$  が  $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 22.5^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  などのように  $2\theta$  が  $360^\circ$  の約数になっている場合はその軌跡が正多角形になる。 $\theta$  が  $40^\circ$  や  $72^\circ$  のように  $360^\circ$  の約数になっている場合は軌跡は星型になる。 $\theta$  と  $360^\circ$  に共通の約数のある場合は、より複雑な星型になる。 $\theta$  が  $30.1^\circ$  などのような小数で表される角度の場合、反射回数が多くなると、軌跡は元の円と内側の小円で囲まれた領域を塗り潰す。

### < 楕円の場合 >

2つの焦点を  $P(-3, 0)$ ,  $P'(3, 0)$  とする。出発地点が2つの焦点  $P, P'$  の間にあるとき、すなわち  $-3 < x < 3$  のとき、その軌跡は常に2つの焦点の間を通り、外側は通らない。反射回数が多くなると、軌跡は  $P, P'$  を焦点とする双曲線の内側を塗り潰す。出発地点が  $P, P'$  の外側にあるとき、すなわち  $x < -3$  かまたは  $3 < x$  のとき、軌跡は常に2点  $P, P'$  の外側を通る。反射回数が多くなると軌跡は  $P, P'$  を焦点とする(もとの楕円の内側にある)小さな楕円の外側を塗り潰す。

### < 正方形の場合 >

出発角度が  $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  以外の場合、軌跡は斜めの縞模様を描く。反射回数が多くなると、軌跡は正方形全体を塗り潰す。

(注)「正方形の角に当たると、入射方向と同じ方向で逆向きに反射する」という設定にしている。

### < トーラスの場合 >

出発角度が  $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  以外の場合、軌跡は斜めの平行な直線群である。回数が多くなると軌跡は正方形全体を塗り潰す。

今回の連携授業は、正方形内部のビリヤードにおいて、「軌跡が正方形全体を塗り潰す」という“謎”を解明することが目標である。そのためには「円」と「トーラス」の場合についての理解が必要である。