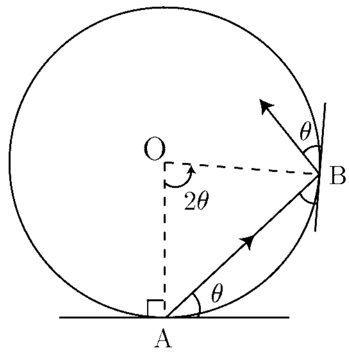
＜円上のビリヤード＞

図 1 のように出発角度 θ で点 A から出発した点が点 B で完全弾性反射したとする。
円の中心を O とすると

$\angle BAO = \angle ABO = 90^\circ - \theta$

より $\angle AOB = 180^\circ - 2(90^\circ - \theta) = 2\theta$

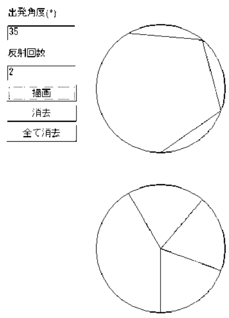
となる。



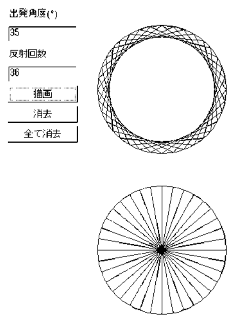
(図1)

このことから, 出発角度 θ の円上でのビリヤードの軌跡は, 反射した点 A,B,$\cdots$ だけを考えると, 中心角が 2θ の回転運動と同等である。このことを理解してもらうためにもう 1 つのシミュレーション＜円上のビリヤード 2＞を用意したので, 試してみてほしい。

図 2 は出発角度が 35° で 2 回反射させた場合であり, 図 3 は同じ出発角度 35° で,36 回反射させた場合である。両方とも中心角 70° の回転である。
0° から出発し, 円周上を 70° ずつ回転する。



(図2)



(図3)

①　②　③　④　⑤　⑥
$0^\circ \to 70^\circ \to 140^\circ \to 210^\circ \to 280^\circ \to 350^\circ \to 420^\circ$

6 回回転すると 420° になる。これを 60° と考え, 以下のように 36 回回転すると元に戻る。

420° ‖
⑦　⑧　⑨　⑩　⑪
$60^\circ \to 130^\circ \to 200^\circ \to 270^\circ \to 340^\circ \to 410^\circ \ (= 50^\circ)$

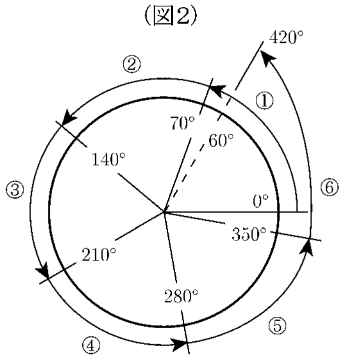
410° ‖
⑫　⑬　⑭　⑮　⑯
$50^\circ \to 120^\circ \to 190^\circ \to 260^\circ \to 330^\circ \to 400^\circ \ (= 40^\circ)$

400° ‖
⑰　⑱　⑲　⑳　㉑
$40^\circ \to 110^\circ \to 180^\circ \to 250^\circ \to 320^\circ \to 390^\circ \ (= 30^\circ)$

390° ‖
㉒　㉓　㉔　㉕　㉖
$30^\circ \to 100^\circ \to 170^\circ \to 240^\circ \to 310^\circ \to 380^\circ \ (= 20^\circ)$

380° ‖
㉗　㉘　㉙　㉚　㉛
$20^\circ \to 90^\circ \to 160^\circ \to 230^\circ \to 300^\circ \to 370^\circ \ (= 10^\circ)$

370° ‖
㉜　㉝　㉞　㉟　㊱
$10^\circ \to 80^\circ \to 150^\circ \to 220^\circ \to 290^\circ \to 360^\circ \ (= 0^\circ)$



(図4)

$7 \to 14 \to 21 \to 28 \to 35 \to 42 \ (= 6)$
$6 \to 13 \to 20 \to 27 \to 34 \to 41 \ (= 5)$
$5 \to 12 \to 19 \to 26 \to 33 \to 40 \ (= 4)$
$4 \to 11 \to 18 \to 25 \to 32 \to 39 \ (= 3)$
$3 \to 10 \to 17 \to 24 \to 31 \to 38 \ (= 2)$
$2 \to 9 \to 16 \to 23 \to 30 \to 37 \ (= 1)$
$1 \to 8 \to 15 \to 22 \to 29 \to 36 \ (= 0)$

(図5)

このとき 10° から 360° まで 10° おきに全ての角度が現れる。10° で割った図 5 を見ると,1 から 36 まで全ての数が現れている。これは「7 と 36 が互いに素」であることによる。他の角度でもシミュレーションで確かめてもらいたい。例えば出発角度 θ = 30.5° とすると, 回転角度は 2θ = 61° となる。