$y'' + ay' + by = q(x)$ について

$\boxed{\textbf{定理 } 3'}$ 微分方程式 $y'' + ay' + by = q(x)$ の解法は次の通り：

Step 1. 定理 $1'$ を用いて $y'' + ay' + by = 0$ の一般解 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (c_1, c_2 は任意定数) を求める。

Step 2. $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ を計算する。

Step 3. $u_1' = -\dfrac{1}{W} y_2 q$ および $u_2' = \dfrac{1}{W} y_1 q$ の解 u_1, u_2 をひとつずつ求める。このとき

$$y = (c_1 + u_1) y_1 + (c_2 + u_2) y_2 \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

は $y'' + ay' + by = q(x)$ の一般解である。

例 12. 微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = e^x$ を解け。

例 13. 微分方程式 $y'' - 6y' + 8y = e^x$ を解け。

例 14. 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ を解け。

例 15. 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ を解け。

例 16. 微分方程式 $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ を解け。

例 17. 微分方程式 $y'' + 2y' + y = x^2$ を解け。

エネルギー保存則について

自由落下において運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定であることを微積分を用いて証明する。

定理 4. 関数 $y = f(x)$ と定数 a に対して

$$y'' + a = 0 \implies \frac{1}{2}(y')^2 + ay = c \text{ (定数)}$$

が成り立つ。

証明. $\left(\dfrac{1}{2}(y')^2 + ay\right)' = y'(y'' + a)$ より解る。

これを物理学の記号で表せば：

定理 $4'$. 関数 $x = x(t)$ について

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \implies \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mgx = c \text{ (定数)}$$

が成り立つ。ここで g は重力定数を表し m は質量を表す。

一般に $\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ を運動エネルギー、mgx を位置エネルギーと呼ぶ。定理 $4'$ は運動エネルギーと位置エネルギーの和が、時刻 t によらず、一定であることを示している。