$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$ について

定理 2. 定数係数線形微分方程式 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$ の解法は次の通り：

Step 1. $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = (t-\alpha_1)^{m_1}(t-\alpha_2)^{m_2} \cdot \cdots \cdot (t-\alpha_s)^{m_s}$ と因数分解する。ここで $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ はすべて異なると仮定する。

Step 2. $y = p_1(x)e^{\alpha_1 x} + p_2(x)e^{\alpha_2 x} + \cdots + p_s(x)e^{\alpha_s x}$ は一般解である。ここで $p_i(x)$ は $m_i - 1$ 次以下の任意の多項式を表す ($1 \leqq i \leqq s$)。

例 4. 微分方程式 $y''' - 7y' + 6y = 0$ を解け。

例 5. 微分方程式 $y''' - 3y' + 2y = 0$ を解け。

例 6. 微分方程式 $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ を解け。

例 7. 微分方程式 $y''' - y'' + 2y = 0$ を解け。

例 8. 微分方程式 $y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$ を解け。

例 9. 微分方程式 $y'''' - 2y'' + y = 0$ を解け。

$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$ について

関数係数 2 階線形微分方程式

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \tag{1}$$

の解法は一般に存在しないが

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{2}$$

の 0 でない解がひとつ求まれば (1) の一般解を構成することができる。

定理 3. 微分方程式 (1) の一般解の構成法は次の通り：

Step 0. 微分方程式 (2) の解 y_1 ($y_1 \neq 0$) が与えられたとする。

Step 1. $y_1 u'' + (2y_1' + p_1 y_1)u' = 0$ の定数でない解 u をひとつ求め $y_2 = y_1 u$ とおく。このとき $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (c_1, c_2 は任意定数) は (2) の一般解である。

Step 2. $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ を計算する。

Step 3. $u_1' = -\dfrac{1}{W} y_2 q$ および $u_2' = \dfrac{1}{W} y_1 q$ の解 u_1, u_2 をひとつずつ求める。このとき

$$y = (c_1 + u_1)y_1 + (c_2 + u_2)y_2 \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

は (1) の一般解である。

例 10. 微分方程式 $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ を解け。
ヒント：$y_1 = x$ は $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ の解である。

例 11. 微分方程式 $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = x^2 - x - 1$ を解け。
ヒント：$y_1 = e^x$ は $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ の解である。