2.2　行列式の定義

<u>定義</u>　n 次正方行列 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ に対して

$$\det \mathrm{A} = \sum_{p \in \mathrm{S}_n} sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

とおき A の行列式という。これにより写像 $\det : \mathrm{M}(n; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ が定義される。

行列式の計算は第 2 章の重要な課題である。はじめに $n = 1, 2, 3$ の場合を考える。

<u>例</u>　(i)　$n = 1$ のとき、$\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$

(ii)　$n = 2$ のとき、$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 、即ち $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ 。

(iii)　$n = 3$ のとき、$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$

<u>証明</u>　(i)　$\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $sgn \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ よりわかる。

(ii)　$\mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$, $sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$ より

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき $sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} = a_{11}a_{22}$ ， $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} = -a_{12}a_{21}$ となる。これらを加えて求める式を得る。

(iii)　$n = 3$ のとき、例 2.1 と補題 2.3 より

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = a_{11}a_{22}a_{33},$

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = a_{12}a_{23}a_{31},$

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = a_{13}a_{21}a_{32},$

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = -a_{11}a_{23}a_{32},$

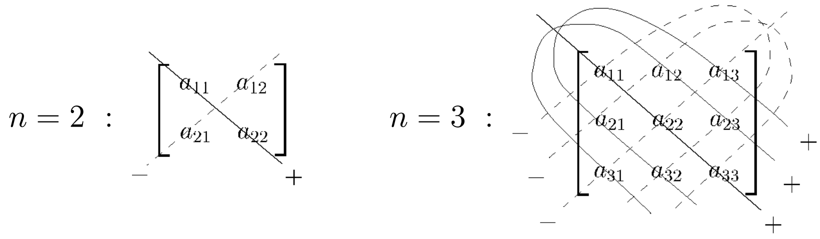
$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = -a_{13}a_{22}a_{31},$

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow sgn(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} = -a_{12}a_{21}a_{33},$

となる。これらをすべて加えて求める式を得る。

証明終

<u>覚え方</u>　（サラスの方法）　$n = 1$ についてはよいであろう。



<u>注意</u>　$n \geqq 4$ の場合にこのような方法を適用してはならない。$n \geqq 4$ のときの行列式の計算方法は第 3 節で説明する（補題 2.6 など）。

<u>補題 2.4</u>　A を正方行列とするとき $\det({}^t\mathrm{A}) = \det \mathrm{A}$ となる。即ち行列の行と列をとりかえても行列式は変わらない。

<u>証明</u>　複素数の積は交換可能だから任意の $q \in \mathrm{S}_n$ に対して $a_{1p(1)} \cdot \cdots \cdot a_{np(n)} = a_{q(1)pq(1)} \cdot \cdots \cdot a_{q(n)pq(n)}$ となる。特に $q = p^{-1}$ とすれば $a_{1p(1)} \cdot \cdots \cdot a_{np(n)} = a_{q(1)1} \cdot \cdots \cdot a_{q(n)n}$ となる。符号の性質 (iii) より $sgn(p)a_{1p(1)} \cdot \cdots \cdot a_{np(n)} = sgn(q)a_{q(1)1} \cdot \cdots \cdot a_{q(n)n}$ となる。補題 2.1, (ii) より $\det \mathrm{A} = \det({}^t\mathrm{A})$ がわかる。

証明終

<u>補題 2.5</u>　$\mathrm{A}_{11}, \mathrm{A}_{22}$ を正方行列とするとき、

$$\det \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix} = \det \mathrm{A}_{11} \cdot \det \mathrm{A}_{22} = \det \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$$

<u>証明</u>　補題 2.4 より左の等号を示せば十分である。$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$ とおく。A を n 次、A_{11} を r 次とすれば A_{22} は $n - r$ 次となる。A の (i, j) 成分を a_{ij} とおけば、「$r + 1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq r \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0$」が成り立つ。従って $p \in \mathrm{S}_n$ に対し、もし $p(r + 1), \cdots, p(n)$ の中に r 以下の数があれば $a_{1p(1)} \cdot \cdots \cdot a_{np(n)} = 0$ となる。よって $\det \mathrm{A}$ の定義式において $\{p(r + 1), \cdots, p(n)\} = \{r + 1, \cdots, n\}$ となる $p \in \mathrm{S}_n$ についてだけ加えればよい。このとき $\{p(1), \cdots, p(r)\} = \{1, \cdots, r\}$ となるから、p の制限写像は $\{1, \cdots, r\} \to \{1, \cdots, r\}$ という全単写及び $\{r + 1, \cdots, n\} \to \{r + 1, \cdots, n\}$ という全単射をひきおこす。これらをそれぞれ σ, τ と書けば $\sigma \in \mathrm{S}_r,\ \tau \in \mathrm{S}_{n-r}$ と考えられ、

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{A} &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} \sum_{\tau \in \mathrm{S}_{n-r}} sgn(\sigma)sgn(\tau)a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r\sigma(r)} \cdot a_{r+1}\tau(r + 1) \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}ss \cdots a_{r\sigma(r)} \sum_{\tau \in \mathrm{S}_{n-r}} sgn(\tau)a_{r+1}\tau(r + 1) \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \det \mathrm{A}_{11} \cdot \det \mathrm{A}_{22}
\end{aligned}$$

となる。

系　A が 3 角行列 $\Rightarrow$ $\det \mathrm{A} = a_{11} a_{22} \cdot \cdots \cdot a_n$ ：対角成分の積となる。特に $\det \mathrm{O} = 0,\ \det \mathrm{E} = 1$ である。