1.5　写像としての行列

ここでは行列を写像とみて第－１章第２節との関連を考える。

(m,n) 形行列 A に対して定義される写像

$$
(1.17)\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^m \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathrm{A}\mathbf{x} \end{array} \qquad (f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}) = \mathrm{A}\mathbf{x})
$$

は次の性質をみたす；

$$
\begin{aligned} f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}) + f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}') \quad , \quad \mathbf{x},\mathbf{x}' \in \mathbb{C}^n \\ f_{\mathrm{A}}(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \end{aligned}
$$

実際、(1.12) より $f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \mathrm{A}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \mathrm{A}\mathbf{x}+\mathrm{A}\mathbf{x}' = f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x})+f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}')$ となり、 (1.13) より $f_{\mathrm{A}}(\alpha\mathbf{x}) = \mathrm{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathrm{A}\mathbf{x}) = \alpha f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x})$ となる。

この性質を抽象して線形写像という概念を導入する：

<u>定義</u>　写像 $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ が線形であるとは

$$
\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') \quad , \quad \mathbf{x},\mathbf{x}' \in \mathbb{C}^n \\ f(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha f(\mathbf{x}) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \end{aligned}
$$

が成り立つときをいう。

<u>補題 1.5</u>　(i)　任意の線形写像 $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ に対して $f = f_{\mathrm{A}}$ となるような (m,n) 形行列 A が唯ひとつ存在する。

(ii)　A を (ℓ,m) 形行列、 B を (m,n) 形行列とすれば、線形写像 $f_{\mathrm{B}}:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m,\ f_{\mathrm{A}}:\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^\ell$ が定義される。このとき $f_{\mathrm{AB}} = f_{\mathrm{A}} \circ f_{\mathrm{B}}$ が成り立つ。

(iii)　正方行列 A に対して「 A は正則 $\Leftrightarrow$ f_{A} は全単射」である。このとき $(f_{\mathrm{A}})^{-1} = f_{\mathrm{A}^{-1}}$ となる。

<u>証明</u>　(i)　$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 第 i 行　；　$\mathbf{e}_i \in \mathbb{C}^n$ に対し $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i \in \mathbb{C}^m (1 \leqq i \leqq n)$ とおき、$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ とすれば $\mathrm{A}\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$ より $f_{\mathrm{A}} = f$ となる。

(ii)　(1.9) より $(f_{\mathrm{A}} \circ f_{\mathrm{B}})(\mathbf{x}) = f_{\mathrm{A}}(f_{\mathrm{B}}(\mathbf{x})) = f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}\mathbf{x}) = \mathrm{A}(\mathrm{B}\mathbf{x}) = (\mathrm{AB})\mathbf{x} = f_{\mathrm{AB}}(\mathbf{x})$ となる。

(iii)　$\Rightarrow$ ：　$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1},\ f_{\mathrm{E}} = id$ 及び (ii) より $f_{\mathrm{A}^{-1}} \circ f_{\mathrm{A}} = f_{\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}} = id = f_{\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}} = f_{\mathrm{A}} \circ f_{\mathrm{A}^{-1}}$ となる。よって f_{A} は全単射となる。

$\Leftarrow$ ：(i) より $(f_{\mathrm{A}})^{-1} = f_{\mathrm{B}}$ とおける。このとき $f_{\mathrm{B}} \circ f_{\mathrm{A}} = id = f_{\mathrm{A}} \circ f_{\mathrm{B}}$ 。 (ii) より $\mathrm{BA} = \mathrm{E} = \mathrm{AB}$ となるから A は正則である。

証明終

(i) より A と f_{A} を同一視し得る。即ち行列

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(m, n; \mathbb{C})$$ を写像

$$(1.17)' \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ \cup & & \cup \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}_n \\ \vdots \\ a_{m1}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{x}_n \end{bmatrix} \end{array}$$

を表す記号と考える。このとき零行列は値 0 の定値写像（例-1.1）となり単位行列は恒等写像（例-1.2）となる。

例 $(2, 2)$ 形行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は写像

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

を表す。

この同一視のもと、補題 1.5 は次のようにいいかえられる。

補題 1.5′ (i) 行列とは線形写像のことである。
(ii) 行列の積とは線形写像の合成のことである。
(iii) 正方行列に対しては、行列の正則性と線形写像が全単射となることは同値である。このとき逆行列とは逆写像のことである。

比例の一般化 (1.17) において $\mathbf{y} = f_{\mathrm{A}}(\mathbf{x}) = \mathrm{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ とおけば

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

即ち

$$(1.17)'' \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{x}_n \end{cases}$$

となる。ここで $m = n = 1$ とおくと $y_1 = a_{11}x_1$ と書ける。これは複素数の正比例である（記号は異なるが例 0.1 を参照のこと。実数の場合は例-1.3 をみよ）。従って次のようにも考えられる。

線形写像とは正比例の一般化であり、行列とは比例実数の一般化で

ある；

　　$y = ax$ において $x, y \in \mathbb{C}$ を $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,\ \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ に一般化すると、

　　$a \in \mathbb{C}$ は $\mathrm{A} \in \mathrm{M}(m, n; \mathbb{C})$ に一般化されて $\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$ となる。

このことは $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ にかえても成り立つ。同様に補題 1.5 も $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ にかえて成立する。特に（実）線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $\mathrm{A} \in \mathrm{M}(m, n; \mathbb{R})$ とは同一視してよい。

<u>複素数平面と実 $(2,2)$ 行列</u>　ここでは $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ として $m = n = 2$ の場合を考える。

<u>例</u>　写像 : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ \alpha & \mapsto & \overline{\alpha} \end{array}$ は $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} \end{array}$ と表せた。

$\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ であるから、線形写像 : $\alpha \ \mapsto \ \overline{\alpha}$ は行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ で表される。同様に写像 $\alpha \ \mapsto \ -\overline{\alpha}$ は行列 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表され、写像 $\alpha \ \mapsto \ i\overline{\alpha}$ は行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ で表される。原点に関する対称移動 : $\alpha \ \mapsto \ -\alpha$ はもちろん行列 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ で表される。

<u>例 1.10</u>　例 0.1 で扱った写像 $f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を行列で表す。$w = \alpha z = f_\alpha(z)$ とおいて $\alpha = a + ib,\ z = x + iy,\ w = u + iv$ を代入すると、$u + iv = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$ となる。よって

$$\left\{ \begin{array}{l} u = ax - by \\ v = bx + ay \end{array} \right. \quad \text{即ち} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

となる。従って求める行列は $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ である。

　複素数の比例 $w = \alpha z$ において $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ に同一視するとき、比例定数 $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ は $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{R})$ と同一視される。一方極形式により $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表せば $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ と書けるから <u>例 0.1</u> より

(1.18)

　行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は平面 $\mathbb{R}^2$ において θ 回転させる写像を表す

ことがわかる。

<u>問題</u>　写像 ：
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathrm{M}(2;\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup \\ a+bi & \mapsto & \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \end{array}$$
は単射かつ和と積を保つこと、即ち $\cdots$ を示せ。