1.4 正則行列

これまでにみて来た和、積について振り返ってみよう。 A を (m, n) 形行列、 B を (p, q) 形行列をするとき、

A + B が定義される　$\Leftrightarrow$　$m = p$ かつ $n = q$

A B が定義される　$\Leftrightarrow$　$n = q$

B A が定義される　$\Leftrightarrow$　$m = p$

であった。よって

A + B , AB が共に定義される　$\Leftrightarrow$　$m = n = p = q$

となり、このとき A − B も BA も定義される。従って集合 $\mathrm{M}(n\ ;\ \mathbb{C})$ には加減乗の３則が存在する。この節では除法の可能性について考える。

例　$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とするとき XA = E となる X も AY = E となる Y も存在しない。即ち A による除法は不可能である。

定義　n 次正方行列 A が正則であるとは XA = E = AY となる n 次正方行列 X, Y が存在するときをいう。n 次正方行列の全体を $\mathrm{GL}(n\ ;\ \mathbb{C})$ で表す。

注意　XA = E = AY　$\Rightarrow$　X = Y

実際、 X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y となる（証明終）。従って

$$\mathrm{A}\text{ は正則} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{XA} = \mathrm{E} = \mathrm{AX}\text{ となる X が存在する}$$

といいかえられる。さらにこのような X は存在するならただひとつであることも上の注意よりわかる。そこで $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}$ と書き A の逆行列という。即ち正則行列とは逆行列を持つ正方行列のことである。 A による除法が常に可能であるための必要十分条件は A が正則となることである。

例　単位行列 E は正則で $\mathrm{E}^{-1} = \mathrm{E}$ である。零行列 O は正則ではない。

例　$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は正則、 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ は正則でない。

与えられた正方行列 A が正則であるか否かの判定及び正則であるとき逆行列 A^{-1} を求める具体的方法は重要な課題である。これらは第４章において２通りの方法により解決される。以下ではそのための準備を行う。

補題 1.2　A, B を正方行列とする。

(i)　A, B が共に正則　$\Rightarrow$　AB も正則で $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$ 。

(ii) A が正則 $\Rightarrow$ A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$ 。

証明 (i) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$ よりわかる。
(ii) $A^{-1}A = E = A^{-1}A$ より A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$ となる。

証明終

補題 1.3 A を正方行列とする。
(i) A は正則 $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ は正則。このとき $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ 。
(ii) A のひとつの行が 0 ベクトル $\Rightarrow$ A は正則ではない。
(iii) A のひとつの列が 0 ベクトル $\Rightarrow$ A は正則ではない。

証明 (i) $XA = E = AX \Rightarrow {}^tA{}^tX = E = {}^tX{}^tA$ よりわかる。
(ii) $\begin{bmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & * & \end{bmatrix}$ とすると任意の Y に対して $AY = \begin{bmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & * & \end{bmatrix} \neq E$ となる。
(iii) は (i) と (ii) より明らか。

証明終

補題 1.4 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対称分割とするとき、
A_{11}, A_{22} が共に正則 $\Rightarrow$ A も正則。このとき $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

証明 例 1.7 を思い出す。

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{11} & A_{11}^{-1}A_{12} - A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}A_{22} \\ 0 & A_{22}^{-1}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = E \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = E$$

証明終

以下では補題 1.4 に関連する結果を 3 つ述べる。

補題 1.4′ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対称分割とするとき、
A は正則 $\Leftrightarrow$ A_{11}, A_{22} が共に正則。このとき $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

証明　補題 1.4 より $\Rightarrow$ のみを示せばよい。 $A^{-1}=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ とおくと

$$E=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}X_{11} & A_{11}X_{12} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{bmatrix}$$ より

$E=A_{11}X_{11},\ E=A_{22}X_{22}$ を得る。また

$$E=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_{11}A_{11} & X_{12}A_{22} \\ X_{21}A_{11} & X_{22}A_{22} \end{bmatrix}$$ より

$E = X_{11}A_{11},\ E = X_{22}A_{22}$ を得る。従って A_{11}, A_{22} は正則である。

証明終

補題 1.4″　$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ を対称分割とし、 A_{11} が正則であるとする。このとき A は正則 $\Leftrightarrow$ A_{22} は正則。

証明　前と同様、 $\Rightarrow$ のみを示せばよい。 A^{-1} も前と同様に分割するとき

$$E=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}X_{11}+A_{12}X_{21} & A_{11}X_{12}+A_{12}X_{22} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{bmatrix}$$

より $A_{22}X_{22}=E$ を得る。また

$$E=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_{11}A_{11} & X_{11}A_{12}+X_{12}A_{22} \\ X_{21}A_{11} & X_{21}A_{12}+X_{22}A_{22} \end{bmatrix}$$

より $X_{21}A_{11} = 0,\ X_{21}A_{12}+X_{22}A_{22} = E$ を得る。 A_{11} は正則だから $X_{21}=0$ 。従って $X_{22}A_{22}=E$ となり A_{22} が正則であることがわかる。

証明終

系　(i)　A が３角行列のとき、A は正則 $\Leftrightarrow$ 対角成分はすべて０でない。

(ii)　A が正則な上半３角行列 $\Rightarrow$ A^{-1} も上半３角行列。

(iii)　A が正則な下半３角行列 $\Rightarrow$ A^{-1} も下半３角行列。

補題 1.4‴　$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ を正方行列の対称分割とし、 A_{11} が正則であるとする。

(i)　A が正則 $\Leftrightarrow$ $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ が正則。

(ii)　A が正則のとき、

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

となる。

証明　(i)　$A'_{22}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ とおくと、

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

となる。例 1.1 より ${}^{t}\begin{bmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & {}^{t}(-A_{21}A_{11}^{-1}) \\ 0 & E \end{bmatrix}$ 。 補

題 1.4 よりこれは正則。
補題 1.3,(i) より $\begin{bmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix}$ も正則となる。従って補題 1.2 と補題 1.4″ より

$$\begin{aligned} A\ \text{：正則} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix}\ \text{：正則} \\ &\Leftrightarrow A'_{22}\ \text{：正則} \end{aligned}$$

(ii) (1.16) より $A = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix}$ 、よって
$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix}$
補題 1.4 より
$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A'^{-1}_{22} \\ 0 & A'^{-1}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}A'^{-1}_{22}A_{21}^{-1}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A'^{-1}_{22} \\ -A'^{-1}_{22}A_{21}A_{11}^{-1} & A'^{-1}_{22} \end{bmatrix}$ がわかる。

証明終

<u>問題</u> (i) 補題 1.4 及び補題 1.4″ と同様の結果を $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ に対して導け。
(ii) A_{22} を正則として、補題 1.4′ 及び補題 1.4″ と同様の結果を導け。

<u>注意</u> (i) 正則性の定義に関して、実は次の 2 性質が成り立つ：

$$\begin{aligned} XA = E \text{ となる } X \text{ が存在する} &\Rightarrow A \text{ は正則} \\ AY = E \text{ となる } Y \text{ が存在する} &\Rightarrow A \text{ は正則} \end{aligned}$$

これらについては補題 3.1 の系または問題 4.1 を参照のこと。
(ii) 補題 1.2 に関連して、実は「 AB が正則 $\Rightarrow$ A も B も正則」も成り立つ。
(i) を認めればこれは次のようにして示せる：
$X(AB) = E$ となる X がある。即ち $(XA)B = E$ 。よって (i) より B は正則。同様に
$(AB)Y = E$ となる Y がある。即ち $A(BY) = E$ 。よって (i) より A は正則。

証明終

逆に (ii) から (i) が導けることは明らか
(iii) 補題 1.4 に関して、実は「 A が正則 $\Rightarrow$ A_{11}, A_{22} は共に正則」も成り立つ。
これも (i) を認めれば次のようにして示せる：
$A^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ とおけば $A^{-1}A = E = AA^{-1}$ より

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$
となる。よって
$$\begin{bmatrix} X_{11}A_{11} & X_{11}A_{12}+X_{12}A_{22} \\ X_{21}A_{11} & X_{21}A_{12}+X_{22}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11}X_{11}+A_{12}X_{21} & A_{11}X_{12}+A_{12}X_{22} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{bmatrix}$$ 。従って
$X_{11}A_{11} = E$, $A_{22}X_{22} = E$ となる。 (i) より A_{11}, A_{22} は正則となる。

証明終

従って (i) が示されれば、補題 1.4′ 、補題 1.4″ は不必要となる。

例 1.5″ A を n 次正方行列、P を n 次正則行列とすれば $tr(P^{-1}AP) = tr A$ となる。

証明 例 1.5′ の (ii) より $tr(P^{-1}AP) = tr\,(P^{-1}(AP)) = tr\,((AP)P^{-1}) = tr\,(A(PP^{-1})) = tr A$ となる。

証明終

注意 A が正則行列のとき、 $A^0 = E$, $A^{-n} = (A^{-1})^n$ $(n \geqq 1)$ とおけば任意の整数 m に対して A^m が定義される。しかも指数法則 (1.15) は整数 m, n に対して成り立つ。

次に (2,2) 形行列に対する正則性を調べる。

定理 1.1 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき、
(i) A は正則である $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$
(ii) A が正則であるとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

となる。

証明 (i) $\Rightarrow$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}$ とおくと $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{cases}$, $\begin{cases} au+bv=0 \\ cu+dv=1 \end{cases}$ となる。このとき、$(ad-bc)(xv-yu) = adxv+bcyu-bcxv-adyu = (axdv+bycu+axcu+bydv)-(aucx+bvdy+bvcx+audy) = (ax+by)(cu+dv)-(au+bv)(cx+dy) = 1$ となる。よって $ad-bc \neq 0$ がわかる。
$\Leftarrow$: $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
であるから、もし $ad-bc \neq 0$ ならば $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ となり A は正則となる。
(ii) もこの式より明らかである。

証明終

<u>注意</u> この定理の一般化を第４章で行う。そのためには $ad-bc$, $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ の一般化が必要である。これを第２章で行う。