1.2　和とスカラー倍

<u>定義</u>　(m,n) 形行列 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ に対して

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

とおき A と B の和という。 $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ も (m,n) 形行列である。 A と B の和は A, B のサイズが同じでないときには定義されない。

<u>例</u>　$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき A+B は定義されない。$\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき $\mathrm{A}+\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 1+7 & 2+8 \\ 3+9 & 4+10 \\ 5+11 & 6+12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$ である。

<u>例</u>　$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$ である。

<u>定義</u>　複素数 α と (m,n) 形行列 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ に対して $\alpha\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$ とおき A の α 倍という。 $\alpha\mathrm{A}$ も (m,n) 形行列である。同様に $\mathrm{A}\alpha=\begin{bmatrix} a_{11}\alpha & \cdots & a_{1n}\alpha \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\alpha & \cdots & a_{mn}\alpha \end{bmatrix}$ とおけば明らかに $\alpha\mathrm{A}=\mathrm{A}\alpha$ である。

<u>注意</u>　スカラー倍のスカラーとはこの場合複素数のことである。

<u>例</u>　$\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha \\ c\alpha & d\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\alpha$

特に $\alpha=-1$ のとき $-\mathrm{A}=(-1)\mathrm{A}$ と書く。

<u>零行列</u>　成分がすべて 0 であるような (m,n) 形行列を O_{mn} と書き零行列という；

$$\mathrm{O}_{\mathrm{mn}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \ \mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{C})$$

サイズを特に明示する必要のないときは O_{mn} は単に O と書かれる。

性質　A, B, C $\in \mathrm{M}(m, n\ ;\ \mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ。

$$\left.\begin{array}{ll} (1.1) & (\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C}) \\ (1.2) & \mathrm{A}+\mathrm{O} = \mathrm{A} = \mathrm{O}+\mathrm{A} \\ (1.3) & (-\mathrm{A})+\mathrm{A} = \mathrm{O} = \mathrm{A}+(-\mathrm{A}) \\ (1.4) & \mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{B}+\mathrm{A} \end{array}\right\} \text{和の性質}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1.5) & (\alpha+\beta)\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{A} \\ (1.6) & \alpha(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \alpha\mathrm{A}+\alpha\mathrm{B} \\ (1.7) & (\alpha\beta)\mathrm{A} = \alpha(\beta\mathrm{A}) \\ (1.8) & 1\cdot\mathrm{A} = \mathrm{A} \end{array}\right\} \text{スカラー倍の性質}$$

注意　$\mathrm{A}-\mathrm{B} = \mathrm{A}+(-\mathrm{B})$ により差も定義できる。

例 1.3　行列 A, B が同じサイズの分割により
$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{s1} & \cdots & \mathrm{A}_{st} \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \cdots & \mathrm{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{B}_{s1} & \cdots & \mathrm{B}_{st} \end{bmatrix}$ とブロック表示されているとき、$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}+\mathrm{B}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1t}+\mathrm{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{s1}+\mathrm{B}_{s1} & \cdots & \mathrm{A}_{st}+\mathrm{B}_{st} \end{bmatrix}$
となる。

例 1.4　行列 A, B のサイズが同じであれば ${}^t(\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}) = \alpha{}^t\mathrm{A}+\beta{}^t\mathrm{B}$ 。

例 1.5　A, B が同じ次数の正方行列であれば $tr(\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}) = \alpha tr\mathrm{A}+\beta tr\mathrm{B}$ 。