0.2　図形的性質

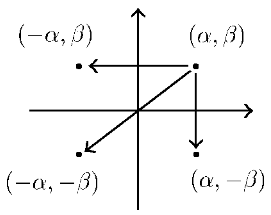
複素数平面　複素数 $\alpha = a + ib$ を平面上の点 (a, b) と同一視して $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ とみなす。ここで $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ を平面と考えている。即ち複素数の全体は平面と考えてよい。 $\mathbb{C}$ と同一視した平面を複素数平面という。このとき $x + iy = (x, y)$ と考えて x 軸を実軸、 y 軸を虚軸という。

例　$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $|\alpha - \beta|$ は平面上の点 α, β の距離を表す。

例　写像；$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \uplus & & \uplus \\ \alpha & \mapsto & -\alpha \end{array}$ は $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \uplus & & \uplus \\ (a, b) & \mapsto & (-a, -b) \end{array}$ であるから原点に関する（点）対称移動を表す。

また写像；$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \uplus & & \uplus \\ \alpha & \mapsto & \overline{\alpha} \end{array}$ は $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \uplus & & \uplus \\ (a, b) & \mapsto & (a, -b) \end{array}$ であるから実軸に関する（線）対称移動を表す。

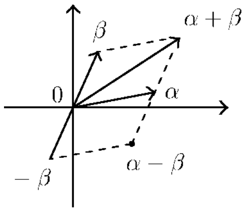
同様に写像；$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \uplus & & \uplus \\ \alpha & \mapsto & -\overline{\alpha} \end{array}$ は $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \uplus & & \uplus \\ (a, b) & \mapsto & (-a, b) \end{array}$ であるから虚軸に関する（線）対称移動を表す。



問　直線 $y = x$ に関する線対称移動はどのような写像；$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ により表されるか。

解　この対称移動は $(a, b) \mapsto (b, a)$ であるから写像 $a + bi \mapsto b + ai$ を考えればよい。 $\alpha = a + ib$ とおくと $b + ia = i(a - ib) = i\overline{\alpha}$ となるから求める写像は $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \uplus & & \uplus \\ \alpha & \mapsto & i\overline{\alpha} \end{array}$ である。

和の作図　複素数 α, β に対して和 $\alpha + \beta$ は $0, \alpha, \alpha + \beta, \beta$ が平行４辺形となるような点である。差 $\alpha - \beta$ も同様である。

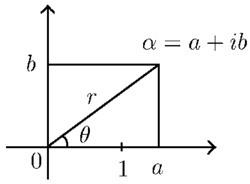


$\alpha+\beta, \alpha-\beta$ は定規とコンパスで作図できる。

次に積の作図をしたい。そのためにひとつ準備をする。

極形式　複素数 $\alpha = a+ib, \alpha \neq 0$ に対して、3 点 $1, 0, \alpha$ がつくる角を θ とし、 $r = |\alpha|$ とすれば

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$



となるから

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される。これを α の極形式という。ここで、 $r, r' > 0$ に対し

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \Leftrightarrow r = r', \theta = \theta' + 360^\circ \times k \ (k \in \mathbb{Z})$$

となることに。注意する即ち θ は一意的に定まるわけではなく、 360° の整数倍異なっていても同じ複素数を表す。 $\alpha = 0$ に対しては θ が定義されないから極形式は考えない。したがって以下で極形式を考えるときは特にことわることなく $\alpha \neq 0$ と仮定する。

問題　$\alpha \neq 0$ と $r > 0$ に対し、

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow r = |\alpha|, \ \cos\theta = \frac{\Re\alpha}{|\alpha|}, \ \sin\theta = \frac{\Im\alpha}{|\alpha|}$$

例　$1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \sqrt{2}(\cos 405^\circ + i\sin 405^\circ)$ 。

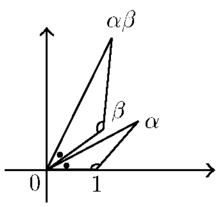
補題 0.1　$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta), \ \beta = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \ (r, r' > 0)$ とすれば $\alpha\beta = rr'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$ となる。

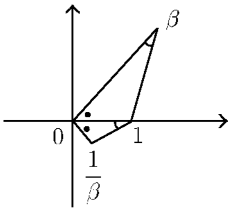
証明　展開して加法定理（数学 II ）を用いれば、 $\alpha\beta = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = rr'\left((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right) = rr'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$ となる。証明終

系　(i) $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$

(ii) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \ n \in \mathbb{Z}$ 。

積の作図　複素数 α, β に対して積 $\alpha\beta$ は、 $0, 1, \alpha$ のつくる 3 角形と $0, \beta, \alpha\beta$ がつくる 3 角形が相似になるような点である。 $\beta \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{\beta}$ は 3 角形 $0, 1, \beta$ と 3 角形 $0, \dfrac{1}{\beta}, 1$ が相似になるような点である。





$\alpha\beta, \dfrac{1}{\beta}$ は定規とコンパスで作図できる。
従って $\dfrac{\alpha}{\beta}$ も作図できる。

例 0.1　複素数 α を比例定数とする複素数の比例は写像

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ z & \mapsto & \alpha z \end{array}$$

で表される。
(i)　α が正の実数ならば f_α は絶対値を α 倍する写像である。
(i)$'$　α が負の実数ならば f_α は 180° 回転して絶対値を $|\alpha|$ 倍する写像である。

(ii)　$\alpha = i$ ならば f_α は 90° 回転を表す。
(ii)$'$　$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ ならば f_α は θ 回転を表す。
従って一般に $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき、写像 f_α は θ 回転して絶対値を r 倍する写像である。また $f_{\alpha\beta} = f_\alpha \circ f_\beta, (f_\alpha)^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}} (\alpha \neq 0)$ も実数の場合と同様である。
例-1.3、例-1.3$'$、例-1.3$''$ をみよ。

例 0.2　与えられた $n \geqq 1,\ \alpha \in \mathbb{C}$ に対して n 次方程式 $z^n - \alpha = 0$ を解く。
$\alpha = 0$ なら $z = 0$ (n 重解) となるから $\alpha \neq 0$ としてよい。
$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ z = \mathrm{R}(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ とおくと、補題 0.1 の系 (ii) より

$$\mathrm{R}^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta) = z^n = \alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる。従って

$$\mathrm{R}^n = r,\ n\Theta = \theta + 360^\circ \times k\ (k \in \mathbb{Z})$$

即ち

$$\mathrm{R} = \sqrt[n]{r},\ \Theta = \frac{\theta + 360^\circ \times k}{n}$$

となる。よって

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 360^\circ \times k}{n} + i\sin\frac{\theta + 360^\circ \times k}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

は解である。ここで $z_k = z_0 \left(\cos\dfrac{360^\circ}{n} + i\sin\dfrac{360^\circ}{n}\right)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ に注意すれば $z_n = z_0$ がわかる。同様に $z_{n+k} = z_k$ もわかる。従って

$$z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1}$$

は方程式 $z^n - \alpha = 0$ の解のすべてである；$\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = \alpha\} = \{z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}\}$。

以上により方程式 $z^n - \alpha = 0$ は $\alpha \neq 0$ であれば異なる n 個の解を持つことがわかった。これらを α の n 乗根という。α の n 乗根は中心 0、半径 $\sqrt[n]{|\alpha|}$ の円周を n 等分する n 個の点である。よってこれら n 個の点を順に結べば正 n 角形ができる。

より一般に複素数係数の n 次方程式 $\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0$ $(n \geqq 1,\ \alpha_0 \neq 0)$ を考える。$n = 1, 2$ ならこの章の冒頭で述べたように解の公式があり、これは複素数でも通用する。$n = 3, 4$ でも少々複雑だが解の公式がある（１６世紀のイタリア）。$n \geqq 5$ のときは解の公式は存在しないことが証明されている（アーベル、ガロア、１９世紀）が、次の結果は成り立つ。

定理 0.1　複素数係数の n 次方程式 $\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0$ は $n \geqq 1$ であれば必ず複素数の範囲に解を持つ。即ち

$$\alpha_0\beta^n + \alpha_1\beta^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\beta + \alpha_n = 0$$

をみたす複素数 β が存在する。

系　複素数係数の n 次方程式 $f(z) = \alpha_0 z^n + \cdots + \alpha_n (n \geqq 1)$ は

$$f(z) = \alpha_0 \prod_{i=1}^{s} (z - \beta_i)^{m_i}\ ;\ \beta_1, \cdots, \beta_s \in \mathbb{C},\ m_1 + \cdots + m_s = n$$

と因数分解される。ここで「$i \neq j \Rightarrow \beta_i \neq \beta_j$」である。

２次方程式が無条件で解けるように、数を実数から複素数へと拡張したわけだが、３次以上の方程式を考えてももう数を拡張する必要がないということを定理0.1 は示している。しかしながらこの定理は解を求める具体的な手段を与えているわけではないことに注意する。定理 0.1 は第６章で必要となる。

注意　これまでに見た通り、実数から複素数への拡張によりうまくいくことが多いがひとつの重要な性質が失われる。それは大小関係（順序）である。実数においては次の２性質：

$$a \leqq b \ \Rightarrow\ a + c \leqq b + c$$
$$a \leqq b,\ 0 \leqq c \ \Rightarrow\ ac \leqq bc$$

をみたす順序 $\leqq$ が考えられた。下の式に $a = 0,\ b = c$ を代入すると $0 \leqq b^2$ となるから、複素数においてはこのような性質を持つ順序は存在しないことがわかる。