

## 対数関数のリーマン面

実関数論において、対数関数  $\log$  の存在意義は主として次の2点である：

(1) 群同形  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  の逆関数であること

(2) 関数  $y = \frac{1}{x}$  の原始関数であること、即ち

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log x + C \quad (x > 0)$$

が成り立つこと

しかし、複素関数の世界では、以下にみるように

(1') 群準同形  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  は逆関数をもたない

(2') 関数  $w = \frac{1}{z}$  は  $\mathbb{C}^\times$  では原始関数をもたない

であるため、(1), (2) の複素関数への単純な一般化は成立しない。本稿では、性質 (1), (2) を可能な限り保ちながら、関数  $\log$  を複素関数に一般化することを目標とする。

### §1. 指数関数

定義 1. 関数  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

により定め、複素指数関数と呼ぶ。

補題 1. 関数  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則で

$$(\exp z)' = \exp z \quad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ。

補題 2. 任意の点  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  に対して

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

が成り立つ。

系.  $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^\times$  となる。従って

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

とみなすこともできる。このとき、関数  $\exp$  は群準同形となる。

補題 3. 任意の点  $z \in \mathbb{C}$  に対して

$$\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$$

が成り立つ。

系. 任意の点  $z \in \mathbb{C}$  に対して

$$|\exp z| = \exp \Re z$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff \exp z \in C$$

が成り立つ。ここで  $C$  は単位円である。

補題 4. 関数

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ \Psi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ z &\longmapsto \exp(iz) \end{aligned}$$

は全射、正則な群準同形で  $\text{Ker}(\Psi) = a\mathbb{Z}$  となる正の定数  $a$  が存在する。また

$$z \in \mathbb{R} \iff \Psi(z) \in C$$

が成り立つ。従って、制限写像  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow C$  も定義されて全射となり、群同形

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \simeq C$$

を引き起こす。

系. 群準同形  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  は全射で  $\text{Ker}(\exp) = ia\mathbb{Z}$  となる。従って、群同形

$$\widetilde{\exp} : \mathbb{C}/ia\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^\times$$

が成立する。ここで  $a$  は補題 4 の定数である。

注意. 補題 4 の系より (1') が解る。また、補題 4 を用いれば、複素数の偏角を図形的直感に頼ることなく次のように定義することができる。

定義 2. 点  $w \in \mathbb{C}^\times$  に対して、 $\mathbb{R}$  の部分集合  $\arg w$  を

$$\arg w = \Psi^{-1}\left(\frac{w}{|w|}\right)$$

により定義する。ここで  $\Psi^{-1}$  は写像  $\Psi$  の集合論的逆像を表す。このとき  $\theta \in \arg w$  を  $w \in \mathbb{C}^\times$  の偏角という。

補題 5. 偏角の集合  $\arg w$  ( $w \in \mathbb{C}^\times$ ) は次の性質をもつ。

(i) 偏角  $\theta \in \arg w$  をひとつ定めれば

$$\arg w = \theta + a\mathbb{Z}$$

と表される。

(ii) 単位円  $C$  をとれば

$$\mathbb{R} = \bigcup_{w \in C} \arg w$$

が成り立つ。

(iii) 任意の点  $w \in \mathbb{C}^\times$  に対して

$$\Psi^{-1}(w) = -i \log |w| + \arg w$$

$$\exp^{-1}(w) = \log |w| + i \arg w$$

が成り立つ。ここで  $\Psi^{-1}$ ,  $\exp^{-1}$  はそれぞれ写像  $\Psi$ ,  $\exp$  の集合論的逆像を表す。

(iv) 任意に点  $w \in \mathbb{C}^\times$  とその偏角  $\theta \in \arg w$  をとれば

$$w = |w| \exp(i\theta)$$

と表すことができる。

(v) 任意の点  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^\times$  に対して

$$\arg(w_1 w_2) = \arg w_1 + \arg w_2$$

が成り立つ。

§2. 対数関数

定義 3. 複素平面  $\mathbb{C}$  の開集合

$$R_0 = \mathbb{C} - (-\infty, 0] = \mathbb{C} - \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$$

に対して、関数  $L: R_0 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$L(w) = \int_0^{\frac{\Im w}{|w| + \Re w}} \frac{2}{1+t^2} dt \quad (w \in R_0)$$

により定める。さらに、関数

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \log : \Psi & & \Psi \\ w & \longmapsto & \log |w| + iL(w) \end{array}$$

を定め、複素対数関数と呼ぶ。

補題 6. 関数  $L: R_0 \rightarrow \mathbb{R}$  は連続で、任意の点  $w \in R_0$  に対して

$$L(w) = L\left(\frac{w}{|w|}\right) = -L(\bar{w})$$

が成り立つ。また  $C_0 = C \cap R_0$  とおけば、制限写像  $L: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$  は単射、連続かつ有界となる。ここで

$$\pi = \sup L(R_0) = \sup L(C_0)$$

とおけば

$$L(R_0) = L(C_0) = (-\pi, \pi)$$

と表される。さらに、関数

$$L: C_0 \longrightarrow (-\pi, \pi)$$

は位相同形となる。

定義 4. 補題 6 の  $\pi = \sup L(R_0)$  を円周率と呼ぶ。

補題 7. 関数  $\log: R_0 \rightarrow \mathbb{C}$  は正則で

$$(\log w)' = \frac{1}{w} \quad (w \in R_0)$$

が成り立つ。従って

$$\log w = \int_1^w \frac{1}{z} dz \quad (w \in R_0)$$

が成り立つことも解る。

補題 8. 等式  $\exp \circ \log = id_{R_0}$  が成り立つ。

系. 任意の点  $w \in R_0$  に対して

$$\begin{aligned} L(w) &\in \arg w \\ w &= |w| \exp(iL(w)) \end{aligned}$$

が成り立つ。

**定理 1.** 定義域を複素平面  $\mathbb{C}$  の開集合  $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \Im z < \pi\}$  に制限し、値域を開集合  $R_0$  に制限した指数関数

$$\exp : D_0 \longrightarrow R_0$$

は正則同形となり、対数関数

$$\log : R_0 \longrightarrow D_0$$

はその逆関数となる。

**系 1.** 関数  $\Psi : iD_0 \rightarrow R_0$  は正則同形となり、関数  $-i \log : R_0 \rightarrow iD_0$  はその逆関数となる。特に、制限写像  $\Psi : (-\pi, \pi) \rightarrow C_0$  は位相同形となり、関数  $L : C_0 \rightarrow (-\pi, \pi)$  はその逆関数となる。

**系 2.** 等式

$$\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i, \quad \exp(i\pi) = -1$$

が成り立つ。従って

$$\text{Ker}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}, \quad \text{Ker}(\Psi) = 2\pi\mathbb{Z}$$

となることも解る。

**系 3.** 任意の点  $w \in \mathbb{C}^\times$  に対して

$$\arg w = \begin{cases} L(w) + 2\pi\mathbb{Z} & (w \in R_0 \text{ のとき}) \\ \pi + 2\pi\mathbb{Z} & (w \in (-\infty, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ。

**系 4.** 条件  $w_1 w_2 \in R_0$  を満たす任意の点  $w_1, w_2 \in R_0$  に対して

$$L(w_1 w_2) \equiv L(w_1) + L(w_2) \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$$

$$\log(w_1 w_2) \equiv \log(w_1) + \log(w_2) \pmod{2\pi i\mathbb{Z}}$$

が成り立つ。

注意. 定理 1 で、 $D_0$  も  $R_0$  も群にはならないから、関数  $\exp : D_0 \rightarrow R_0$  や  $\log : R_0 \rightarrow D_0$  を群準同形ということはできない。従って、定理 1 では目標が達成されたことにはならない。以下では、対数関数  $\log$  のリーマン面  $\mathcal{R}$  を導入して、群同形も仮定できるような結果を導く。

### §3. リーマン面

まず、直積  $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{R}$  が自然な演算：

$$(w_1, \theta_1) * (w_2, \theta_2) = (w_1 w_2, \theta_1 + \theta_2)$$

で位相群となることに注意する。

**定義 5.** 実 3 次元空間  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  の部分集合  $\mathcal{R}$  を

$$\mathcal{R} = \{(w, \theta) \mid w \in \mathbb{C}^\times, \theta \in \arg w\}$$

により定義する。

定理 2. 集合  $\mathcal{R}$  に対して

(i) 関数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \times \mathbb{R} \\ \text{Exp} : \downarrow & & \downarrow \\ & & z \longmapsto (\exp z, \Im z) \end{array}$$

は単射、連続な群準同形で  $\text{Im}(\text{Exp}) = \mathcal{R}$  となる。従って  $\mathcal{R}$  は  $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{R}$  の部分群となる。

(ii) 関数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \text{Log} : \downarrow & & \downarrow \\ & & (w, \theta) \longmapsto \log |w| + i\theta \end{array}$$

は全射、連続な群準同形で  $\text{Ker}(\text{Log}) = \{(w, \theta) \mid |w| = 1, \theta = 0\}$  となる。従って

$$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{R} = \text{Ker}(\text{Log}) \times \mathcal{R}$$

となることも解る。

(iii) 等式  $\text{Log} \circ \text{Exp} = \text{id}_{\mathbb{C}}$  が成り立つ。従って、関数

$$\text{Exp} : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathcal{R}, *)$$

は位相群同形となり、関数

$$\text{Log} : (\mathcal{R}, *) \longrightarrow (\mathbb{C}, +)$$

はその逆関数となる。

系. 定理 2 の仮定と記号のもと

$$\mathcal{R} = \text{Im}(\text{Exp}) \simeq (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{R}) / \text{Ker}(\text{Log})$$

が成り立つ。

定義 6. 関数  $\text{Exp}, \text{Log}$  が正則同形となるように集合  $\mathcal{R}$  に複素構造を導入する。このとき、複素多様体  $\mathcal{R}$  を複素対数関数  $\log$  のリーマン面という。

補題 9. リーマン面  $\mathcal{R}$  に対して、自然な埋め込み  $\iota : D_0 \hookrightarrow \mathbb{C}$  と入射

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ \eta : \downarrow & & \downarrow \\ & & w \longmapsto (w, L(w)) \end{array}$$

を定めれば

$$\text{Exp} \circ \iota = \eta \circ \exp, \quad \text{Log} \circ \eta = \iota \circ \log$$

が成り立つ。

注意. 単射  $\eta$  により  $R_0 \subset \mathcal{R}$  とみなす。このとき、補題 9 より

$$\text{Exp}|_{D_0} = \exp, \quad \text{Log}|_{R_0} = \log$$

が解る。即ち、関数  $\text{Exp}$  は関数  $\exp$  の拡張となり、関数  $\text{Log}$  は関数  $\log$  の拡張となる。

補題 10. リーマン面  $\mathcal{R}$  に対して

(i) 射影  $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  の制限写像を  $p : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  と表す。このとき、写像  $p$  は全射かつ正則な群準同形で  $\text{Ker}(p) = \{1\} \times 2\pi\mathbb{Z}$  および

$$p \circ \text{Exp} = \exp, \quad \exp \circ \text{Log} = p$$

が成り立つ。従って、位相群の同形

$$\mathcal{R}/(\{1\} \times 2\pi\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}^\times$$

が成立する。また、対  $(\mathcal{R}, p)$  は  $(\mathbb{C}, \exp)$  と同値な  $\mathbb{C}^\times$  の被覆を定義する。即ち、これらはどちらも  $\mathbb{C}^\times$  の普遍被覆となる。

(ii) 射影  $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の制限写像を  $\text{Arg} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と表す。このとき、写像  $\text{Arg}$  は全射かつ連続な群準同形で  $\text{Ker}(\text{Arg}) = (0, +\infty) \times \{0\}$  および

$$\text{Arg} \circ \text{Exp} = \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} \circ \text{Log} = \text{Arg}$$

が成り立つ。従って、位相群の同形

$$\mathcal{R}/((0, +\infty) \times \{0\}) \simeq \mathbb{R}$$

が成立する。

(iii) 任意の点  $R \in \mathcal{R}$  に対して

$$\text{Arg}(R) \in \arg(p(R))$$

が成り立つ。

(iv) 任意の点  $w \in \mathbb{C}^\times$  および  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して

$$p^{-1}(w) = \{w\} \times \arg w$$

$$\text{Arg}^{-1}(\theta) = \{w' \in \mathbb{C}^\times \mid \theta \in \arg w'\} \times \{\theta\}$$

$$\arg w = \text{Arg}(p^{-1}(w)) \subset \mathbb{R}$$

が成り立つ。

**定理 3.** リーマン面  $\mathcal{R}$  上の任意の点  $P \in \mathcal{R}$  に対して

$$\text{Log}(P) = \int_C \frac{1}{w} dw$$

が成り立つ。ここで  $C$  は群  $\mathcal{R}$  の単位元  $I = (1, 0) \in \mathcal{R}$  を始点とし、 $P$  を終点とする  $\mathcal{R}$  内の曲線を写像  $p$  で落とした  $\mathbb{C}^\times$  内の曲線である。

注意. 定理 3 より (2') が解る。

以上により、(1), (2) の複素関数への一般化が完了し、目標が達成された。補題 4 の系は関数  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  の定義域の修正による同形写像の構成である。また、定理 1 は関数  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  の定義域と値域の制限による同形写像の構成であり、定理 2 は値域の修正による同形写像の構成である。

#### §4. 角関数と回転数

**補題 11.** 有界閉区間  $I$  で定義された連続関数  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対して

(i) 連続関数  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : I \rightarrow \mathcal{R}$  が条件  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}_1 = p \circ \tilde{\gamma}_2$  を満たすならば、整数  $n$  が存在して、任意の点  $t \in I$  に対して

$$\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t) * (1, 2n\pi)$$

が成り立つ。

(ii) 条件  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  を満たす連続関数  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathcal{R}$  が存在する。

系. 閉区間  $I = [a, b]$  で定義された連続関数  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対して、点  $P_0 \in p^{-1}(\gamma(a))$  を指定すれば、条件

$$\gamma = p \circ \tilde{\gamma}, \quad \tilde{\gamma}(a) = P_0$$

を満たす連続関数  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathcal{R}$  が唯一とつ存在する。

定義 7. 有界閉区間  $I$  で定義された連続関数  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対して、補題 11, (ii) の関数  $\tilde{\gamma}$  を任意にとる。このとき、関数

$$\Theta_\gamma = \text{Arg} \circ \tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

を関数  $\gamma$  の角関数と呼ぶ。

注意. 関数  $\gamma$  の角関数  $\Theta_\gamma$  は、関数  $\tilde{\gamma}$  のとりかたに依存するためひとつには定まらないが、補題 11, (i) より  $2\pi\mathbb{Z}$  の差を除いて一意的に定まることが解る。

補題 12. 閉区間  $I = [a, b]$  で定義された連続関数  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対して

(i) 角関数  $\Theta_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  は連続で、条件

$$\Theta_\gamma(t) \in \arg(\gamma(t)) \quad (t \in I)$$

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \Theta_\gamma(t)) \quad (t \in I)$$

を満たす。

(ii)  $\gamma(b) = \gamma(a)$  であれば

$$\Theta_\gamma(b) - \Theta_\gamma(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

が成り立つ。

注意. 補題 12, (ii) の逆は成り立たない。

例 1. 関数  $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を

$$w = \gamma(t) = t \quad (1 \leq t \leq 2)$$

により定める。このとき、関数  $\gamma$  は連続で

$$\gamma(2) \neq \gamma(1), \quad \Theta_\gamma(2) - \Theta_\gamma(1) = 0 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

が成り立つ。

定義 8. 複素平面  $\mathbb{C}$  内の点  $\alpha \in \mathbb{C}$  を通らない閉曲線  $C$  が閉区間  $I = [a, b]$  で定義された連続関数  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}^\times$  により

$$C : w = \alpha + \gamma(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメータ表示されているとする。このとき

$$n_\alpha(C) = \frac{1}{2\pi} (\Theta_\gamma(b) - \Theta_\gamma(a))$$

とおき、閉曲線  $C$  の点  $\alpha$  の周りの回転数と呼ぶ。

注意. 回転数  $n_\alpha(C)$  は、関数  $\tilde{\gamma}$  のとりかたに依存することなく定まり、整数値をとる。

定理 4. 複素平面  $\mathbb{C}$  内の点  $\alpha \in \mathbb{C}$  を通らない任意の閉曲線  $C$  に対して

$$n_\alpha(C) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w - \alpha} dw$$

が成り立つ。

§5. 極座標とリーマン面

補題 13. 複素平面  $\mathbb{C}$  内の右半平面

$$H = \{(r, \theta) \mid r > 0, \theta \in \mathbb{R}\} = \{r + i\theta \mid r > 0, \theta \in \mathbb{R}\}$$

に対して

(i)  $H = (0, +\infty) \times \mathbb{R} = (0, +\infty) + i\mathbb{R}$  と表すこともできる。また、半平面  $H$  は  $(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{R}, *)$  の部分群であるが、 $(\mathbb{C}, +)$  の部分群ではない。

(ii) 関数

$$\begin{array}{ccc} (H, *) & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \varphi : \quad \cup & & \cup \\ r + i\theta & \longmapsto & r \exp(i\theta) \end{array}$$

は全射かつ  $C^\infty$  級の群準同形で

$$\text{Ker}(\varphi) = \{1\} \times 2\pi\mathbb{Z} = 1 + 2\pi i\mathbb{Z}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \exp(i\theta), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = ir \exp(i\theta)$$

となるが、正則ではない。

(iii) 関数

$$\begin{array}{ccc} (H, *) & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ \Phi : \quad \cup & & \cup \\ r + i\theta & \longmapsto & (r \exp(i\theta), \theta) \end{array}$$

は位相群同形となり、関数

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & (H, *) \\ \Phi^{-1} : \quad \cup & & \cup \\ (w, \theta) & \longmapsto & |w| + i\theta \end{array}$$

はその逆関数となるが、これらは正則同形ではない。

系. 空間  $\mathbb{C}^\times$  の開集合  $D$  で定義された正則関数  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、合成関数

$$g = f \circ \varphi : \varphi^{-1}(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を定める。このとき

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = ir \frac{\partial g}{\partial r}$$

が成り立つ。

注意. 補題 13 は極座標を用いても補題 4 の系や定理 2 と類似の結果を導くことができることを示しているが、これは関数  $\varphi, \Phi, \Phi^{-1}$  が正則ではないという意味で不十分である。

§6. 三角関数

定義 9. 補題 4 で定義された関数  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して

$$\Psi(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

とおくことにより定まる連続関数  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  および

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} - \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi \longrightarrow \mathbb{R}$$

を三角関数と呼ぶ。



補題 14. 三角関数  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

(i)  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) が成り立つ。

(ii) 加法定理が成り立つ。

(iii) 関数  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  はどちらも周期  $2\pi$  をもつ。

(iv) 任意の点  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して  $\theta \in \arg w$  となる点  $w \in \mathbb{C}^\times$  が存在する。  
このとき

$$\cos \theta = \frac{\Re w}{|w|}, \quad \sin \theta = \frac{\Im w}{|w|}$$

と書ける。

(v) 関数  $\cos, \sin$  は微分可能で

$$(\cos \theta)' = -\sin \theta, \quad (\sin \theta)' = \cos \theta$$

となる。

(vi) 関数  $\cos, \sin$  は正則関数  $\cos, \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に一意的に拡張されて

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (z \in \mathbb{C})$$

と表される。

補題 15. 定義 3 で定められた関数  $L : R_0 \rightarrow \mathbb{R}$  について考える。

(i) 任意の点  $w \in R_0$  に対して

$$L(w) = 2 \tan^{-1} \left( \frac{\Im w}{|w| + \Re w} \right)$$

と書ける。ここで

$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

は逆三角関数である。

(ii) 任意の点  $w \in R_0$  に対して

$$L(w) = \begin{cases} \cos^{-1} \left( \frac{\Re w}{|w|} \right) & (\Im w \geq 0 \text{ のとき}) \\ \sin^{-1} \left( \frac{\Im w}{|w|} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\Im w}{\Re w} \right) & (\Re w > 0 \text{ のとき}) \\ -\cos^{-1} \left( \frac{\Re w}{|w|} \right) & (\Im w \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書くこともできる。ここで

$$\cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

は逆三角関数である。

系. 対数関数  $\log : R_0 \rightarrow D_0$  を

$$\log w = \log |w| + 2i \int_0^{\frac{\Im w}{|w| + \Re w}} \frac{dt}{1+t^2} \quad (w \in R_0)$$

$$\log w = \log |w| + 2i \tan^{-1} \left( \frac{\Im w}{|w| + \Re w} \right) \quad (w \in R_0)$$

$$\log w = \log |w| + i \tan^{-1} \left( \frac{\Im w}{\Re w} \right) = \log |w| + i \int_0^{\frac{\Im w}{\Re w}} \frac{dt}{1+t^2} \quad (\Re w > 0)$$

$$\log w = \log |w| + i \sin^{-1} \left( \frac{\Im w}{|w|} \right) = \log |w| + i \int_0^{\frac{\Im w}{|w|}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (\Re w > 0)$$

などと表すこともできる。

補題 16. 任意の点  $w \in \mathbb{C}^\times$  に対して

$$\arg w = \begin{cases} 2 \tan^{-1} \left( \frac{\Im w}{|w| + \Re w} \right) & (w \in R_0 \text{ のとき}) \\ \pi(1 + 2\mathbb{Z}) & (w \in (-\infty, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書ける。ここで  $\tan^{-1}$  は、逆三角関数ではなく、集合論的逆像を表す。

補題 17. リーマン面  $\mathcal{R}$  を

$$\mathcal{R} = \{(w, \theta) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{R} \mid \Re w = |w| \cos \theta, \Im w = |w| \sin \theta\}$$

と表すこともできる。

定理 5. 一次分数変換

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ z & \longmapsto & -\frac{z-i}{z+i} \end{array}$$

について考える。

(i) 関数  $\Phi$  は正則同形であり、関数

$$\Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ w & \longmapsto & -i \frac{w-1}{w+1} \end{array}$$

はその逆関数となる。

(ii) 制限写像

$$\Phi : \mathbb{C} - \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{-1\}$$

は正則同形となる。

(iii) 上半平面を  $H$  と表し、単位円の内部を  $D$  と表せば、制限写像

$$\Phi : H \longrightarrow D$$

は正則同形となる。

(iv) 制限写像

$$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow C_0$$

は位相同形となり

$$\Psi(\theta) = \Phi\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) \quad (\theta \in \mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1)\pi)$$

$$\Phi(t) = \Psi(2 \tan^{-1} t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。

§7. 導関数と微分型式

ここではリーマン面で定義された関数の導関数と微分型式について考える。

まず、1次元複素多様体  $X$  で定義された正則関数  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、導関数  $f': X \rightarrow \mathbb{C}$  が定義できるかどうかを考えてみる。最も安易なのは、多様体  $X$  の座標近傍  $(U, \varphi)$  をとり

$$f' = (f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$$

と定めることであろう。しかしこれでは  $f'$  は座標近傍  $(U, \varphi)$  に依存してしまい、いわゆる well-defined にはならない。

例2. 上記の定め方では導関数  $f'$  は well-defined にはならないことを確かめる。  $X = \mathcal{R}$ ,  $f = \text{Log}$  とする。このとき

(i)  $(U, \varphi) = (\mathcal{R}, \text{Log})$  とすると

$$(f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi = 1$$

となる。

(ii)  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\tilde{R}_n = \{(w, \theta) \in \mathcal{R} \mid (n-1)\pi < \theta < (n+1)\pi\}$$

とおき、 $(U, \varphi) = (\tilde{R}_n, p)$  とすると

$$(f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi = \frac{1}{p}$$

となる。

(iii) (i), (ii) の結果は異なるから、導関数  $f'$  は well-defined にはならない。

例3.  $X = \mathcal{R}$ ,  $f = p$  とする。このとき

(i)  $(U, \varphi) = (\mathcal{R}, \text{Log})$  とすると

$$(f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi = p$$

となる。

(ii)  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\tilde{R}_n = \{(w, \theta) \in \mathcal{R} \mid (n-1)\pi < \theta < (n+1)\pi\}$$

とおき、 $(U, \varphi) = (\tilde{R}_n, p)$  とすると

$$(f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi = 1$$

となる。

(iii) (i), (ii) の結果は異なるから、導関数  $f'$  は well-defined にはならない。

注意. 例2, 例3に関して

(i) 形式的に

$$(f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi = \frac{f'}{\varphi'}$$

と変形すれば、関数  $(f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi$  が座標関数  $\varphi$  に依存することが直感的に把握できる。また、この等式を逆手にとって

$$f' = ((f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

と定めようとしても、 $\varphi'$  が定義されないことから、導関数  $f'$  は well-defined にはならないことが解る。

(ii) 例 2, 例 3 は多様体を定義域とする関数の導関数を定義することは簡単ではないということを示している。実際、現在では多様体を定義域とする正則関数の導関数を定義することなく理論が展開されている。

(iii) リーマン面上の微分形式の線積分を用いて定理 3 と類似の結果を導くことができる。即ち、多様体上では、導関数は well-defined にはならないが、微分形式は well-defined となり線積分が定義される。定義 10, 定義 11, 定理 6 を参照のこと。

複素平面  $\mathbb{C}$  またはリーマン面  $\mathcal{R}$  の開集合  $U$  で定義された正則関数  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  の全体を  $\mathcal{O}(U)$  と表す。

**補題 18.** リーマン面  $\mathcal{R}$  に対して、写像

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\mathcal{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\mathbb{C}) \\ \psi & & \psi \\ (f, F) & \longmapsto & (f \circ \text{Exp}) \cdot (F \circ \text{Exp})' \end{array}$$

を定める。このとき

(i) 任意の関数  $f, g, F, G \in \mathcal{O}(\mathcal{R})$  と定数  $c \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{aligned} \Phi(f+g, F) &= \Phi(f, F) + \Phi(g, F), & \Phi(fg, F) &= (f \circ \text{Exp}) \Phi(g, F) \\ \Phi(f, F+G) &= \Phi(f, F) + \Phi(f, G), & \Phi(f, FG) &= \Phi(fG, F) + \Phi(fF, G) \\ \Phi(f, c) &= 0, & \Phi(f, \text{Log}) &= f \circ \text{Exp} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(ii) 写像  $\Phi$  は全射である。

**定義 10.** リーマン面  $\mathcal{R}$  に対して

(i) 写像  $\Phi$  に付随する  $\mathcal{O}(\mathcal{R})^2$  の同値関係が定める商集合を  $\Omega^1(\mathcal{R})$  と表す。さらに、写像  $\Phi$  より定まる全単射  $\tilde{\Phi} : \Omega^1(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C})$  が  $\mathcal{O}(\mathcal{R})$  加群同形となるように  $\Omega^1(\mathcal{R})$  に  $\mathcal{O}(\mathcal{R})$  加群の構造を導入する。

(ii) 対  $(f, F) \in \mathcal{O}(\mathcal{R})^2$  の属する同値類を

$$f dF \in \Omega^1(\mathcal{R})$$

と表し、 $\mathcal{R}$  上の正則微分形式という。

**補題 19.** リーマン面  $\mathcal{R}$  に対して

(i)  $\mathcal{R}$  上の正則微分形式全体のつくる  $\mathcal{O}(\mathcal{R})$  加群  $\Omega^1(\mathcal{R})$  は

$$\Omega^1(\mathcal{R}) = \mathcal{O}(\mathcal{R}) \cdot d\text{Log}$$

と表される。

(ii) 写像

$$d : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{R}) \\ \psi & & \psi \\ F & \longmapsto & dF \end{array}$$

を定める。このとき、任意の関数  $F, G \in \mathcal{O}(\mathcal{R})$  と定数  $c \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{aligned} d(F+G) &= dF + dG \\ d(FG) &= G dF + F dG \\ dc &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

系. 写像  $d: \mathcal{O}(\mathcal{R}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{R})$  は  $\mathbb{C}$  線形となる。

定義 11. リーマン面  $\mathcal{R}$  上の正則微分型式  $f dF \in \Omega^1(\mathcal{R})$  と区分的に滑らかな関数  $\beta: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$  により

$$B: Q = \beta(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメータ表示されている  $\mathcal{R}$  内の曲線  $B$  に対して

$$\int_B f dF = \int_a^b (f \circ \beta)(t) \cdot (F \circ \beta)'(t) dt$$

とおき、微分型式  $f dF$  の曲線  $B$  に沿う線積分という。

定理 6. 対数関数のリーマン面を  $\mathcal{R}$  と表す。このとき

(i) 正則関数  $\text{Log}: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対して

$$d\text{Log} = \frac{1}{p} dp \in \Omega^1(\mathcal{R})$$

が成り立つ。

(ii) 任意の点  $P \in \mathcal{R}$  に対して

$$\text{Log}(P) = \int_I^P \frac{1}{p} dp$$

が成り立つ。ここで積分路は群  $\mathcal{R}$  の単位元  $I = (1, 0) \in \mathcal{R}$  を始点とし、 $P$  を終点とする  $\mathcal{R}$  内の任意の曲線である。

系. 任意の点  $P \in \mathcal{R}$  に対して

$$\text{Log}(P) = \int_B p^* \left( \frac{1}{w} dw \right) = \int_{p^*B} \frac{1}{w} dw$$

が成り立つ。ここで  $B$  は群  $\mathcal{R}$  の単位元  $I$  を始点とし、 $P$  を終点とする  $\mathcal{R}$  内の任意の曲線である。

注意. 定理 6 の系は定理 3 の一般化である。

## §8. 演習問題

問題 1. 定数  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 0$ ) に対して、位相群同形

$$\mathbb{C}/a\mathbb{Z} \simeq C \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}/ia\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} \times C$$

が成立することを証明せよ。ここで  $C$  は単位円周を表す。

問題 2. 定数  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  が  $\mathbb{R}$  上線形独立であれば、位相群同形

$$\mathbb{C}/(\alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}) \simeq C \times C$$

が成立することを証明せよ。ここで  $C$  は単位円周を表す。

問題 3. 定理 1 の系 4 に関連して、等式

$$L(w_1 w_2) = L(w_1) + L(w_2)$$

$$\log(w_1 w_2) = \log(w_1) + \log(w_2)$$

が成り立たないような点  $w_1, w_2 \in R_0$  ( $w_1 w_2 \in R_0$ ) の例を挙げよ。

問題 4. 補題 10 に関連して、任意の点  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して

$$\{w' \in \mathbb{C}^\times \mid \theta \in \arg w'\} = (0, +\infty) \cdot \Psi(\theta)$$

が成り立つことを示せ。

問題 5. 有界閉区間  $I$  で定義された任意の連続関数  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対して、条件

$$\gamma = \exp \circ \Gamma$$

を満たす連続関数  $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  が存在することを証明せよ。

問題 6. 複素三角関数  $\sin, \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = \pm 1\} = \mathbb{Z}\pi$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = \pm 1\} = \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi$$

が成り立つことを示せ。

注意. 問題 6 より、複素関数

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{C} - \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow \mathbb{C}$$

が定義されることが解る。

問題 7. 定義 3 で定められた関数  $L : R_0 \rightarrow \mathbb{R}$  について考える。

(i) 任意の点  $w \in R_0$  に対して

$$\arg w \cap (-\pi, \pi) = \{L(w)\}$$

が成り立つことを示せ。

(ii) 任意の点  $w \in R_0$  に対して

$$\cos L(w) = \frac{\Re w}{|w|}, \quad \sin L(w) = \frac{\Im w}{|w|}$$

が成り立つことを示せ。

(iii) 補題 15, (ii) を用いて、定義 3 で定められた関数  $\log : R_0 \rightarrow \mathbb{C}$  が正則であることを証明せよ。

問題 8. 対数関数のリーマン面を  $\mathcal{R}$  と表す。このとき

(i)  $\mathcal{O}(\mathcal{R})$  加群同形

$$\tilde{\Phi} : \Omega^1(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{R})$$

は条件

$$\tilde{\Phi}(f dF) = \Phi(f, F) \quad (f, F \in \mathcal{O}(\mathcal{R}))$$

を満たすことを示せ。

(ii) 標準的全射

$$c : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\mathcal{R})^2 & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{R}) \\ \Psi & & \Psi \\ (f, F) & \longmapsto & f dF \end{array}$$

は多重  $\mathbb{C}$  線形写像となることを証明せよ。

(iii)  $\mathbb{C}$  線形写像  $d : \mathcal{O}(\mathcal{R}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{R})$  に対して

$$\text{Ker}(d) = \mathbb{C}$$

が成り立つことを証明せよ。

### 参考文献

- [1] 田村二郎：解析関数、裳華房 (1962)
- [2] 高橋礼司：複素解析、東京大学出版会 (1990)
- [3] 藤本淳夫：複素解析学概説、培風館 (1977)
- [4] 西本敏彦：微分積分学講義、培風館 (1996)
- [5] 岩沢健吉：代数函数論、岩波書店 (1952)
- [6] 大学数学教育研究会 (編)：大学課程 微分積分学概説、共立出版 (1975)

### 精神

松尾芭蕉：高く心を悟りて俗に帰るべし

まど・みちお：やさしく書けば退屈します  
やさしい中にカチッと歯が立つものがないとー  
それを子どもが自力でかみ砕いていく

§9. 関連事項の整理

9.1. ここでは微分型式について補足する。

[1]. 単位元をもつ可換環  $R$  と自然数  $m, n$  に対して、 $R$  の要素を成分とする  $(m, n)$  形行列の全体を  $R^{(m, n)}$  と表す。

$n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  から  $\mathbb{R}^{(m, n)}$  への  $C^\infty$  級関数の全体を

$$C^\infty(D, \mathbb{R}^{(m, n)})$$

と表す。このとき

$$C^\infty(D, \mathbb{R}^{(m, n)}) = C^\infty(D)^{(m, n)}$$

が成り立つ。

**補題 20.**  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  に対して、写像

$$\Phi : \begin{array}{ccc} C^\infty(D, \mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & C^\infty(D)^{(1, n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f, F) & \longmapsto & {}^t f \cdot F' \end{array}$$

を定める。このとき

(i) 任意の関数  $f, g, F, G \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $f_0 \in C^\infty(D)$  と定数ベクトル  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\begin{aligned} \Phi(f + g, F) &= \Phi(f, F) + \Phi(g, F), & \Phi(f_0 f, F) &= f_0 \Phi(f, F) \\ \Phi(f, F + G) &= \Phi(f, F) + \Phi(f, G), & \Phi(f, f_0 F) &= {}^t f F f'_0 + f_0 \Phi(f, F) \\ \Phi(f, \mathbf{c}) &= \mathbf{0}, & \Phi(f, id) &= {}^t f \end{aligned}$$

が成り立つ。

(ii) 写像  $\Phi$  は全射である。

系. 写像  $\Phi$  に付随する  $C^\infty(D, \mathbb{R}^n)^2$  の同値関係が定める商集合を  $\Omega^1(D)$  と表す。このとき、写像  $\Phi$  は標準的全射

$$c : C^\infty(D, \mathbb{R}^n)^2 \longrightarrow \Omega^1(D)$$

と全単射

$$\tilde{\Phi} : \Omega^1(D) \longrightarrow C^\infty(D)^{(1, n)}$$

により

$$\Phi = \tilde{\Phi} \circ c$$

と表される。また

$$\Omega^1(D) = \{c(f, F) \mid f, F \in C^\infty(D)^n\}$$

と表すこともできる。

**定義 12.**  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  に対して

(i) 写像  $\Phi$  より定まる全単射  $\tilde{\Phi} : \Omega^1(D) \rightarrow C^\infty(D)^{(1, n)}$  が  $C^\infty(D)$  加群同形となるように  $\Omega^1(D)$  に  $C^\infty(D)$  加群の構造を導入する。

(ii)  $C^\infty(D)$  加群  $\Omega^1(D)$  の要素を  $D$  で定義された 1 次の  $C^\infty$  級微分型式という。

(iii) 関数  $f \in C^\infty(D)$  に対して

$$df = \tilde{\Phi}^{-1}(f') \in \Omega^1(D)$$

とおき、 $f$  の外微分と呼ぶ。



補題 21.  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  に対して定まる写像

$$c : C^\infty(D, \mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \Omega^1(D)$$

について考える。

(i) 任意の関数  $f, g, F, G \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $f_0 \in C^\infty(D)$  と定数ベクトル  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , 定数  $a \in \mathbb{R}$  に対して

$$c(f+g, F) = c(f, F) + c(g, F), \quad c(f_0 f, F) = f_0 c(f, F)$$

$$c(f, F+G) = c(f, F) + c(f, G), \quad c(f, aF) = ac(f, F)$$

$$c(f, \mathbf{c}) = 0, \quad c(f, id) = \tilde{\Phi}^{-1}({}^t f)$$

が成り立つ。

(ii) 関数  $F \in C^\infty(D)^n$  の成分表示を  $F = {}^t[F_1 \cdots F_n]$  とすれば、任意の整数  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して

$$c(\mathbf{e}_i, F) = dF_i \in \Omega^1(D)$$

が成り立つ。

(iii) 関数  $f, F \in C^\infty(D)^n$  の成分表示をそれぞれ

$$f = {}^t[f_1 \cdots f_n], \quad F = {}^t[F_1 \cdots F_n]$$

とすれば

$$c(f, F) = f_1 dF_1 + \cdots + f_n dF_n \in \Omega^1(D)$$

と表される。

補題 22.  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  に対して定まる写像

$$d : \begin{array}{ccc} C^\infty(D) & \longrightarrow & \Omega^1(D) \\ \psi & & \psi \\ f & \longmapsto & \tilde{\Phi}^{-1}(f') \end{array}$$

について考える。

(i)  $\mathbb{R}^n$  の座標関数を  $id = [x_1 \cdots x_n]$  と表せば、任意の関数  $f \in C^\infty(D)$  に対して

$$\tilde{\Phi}(df) = f' = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

が成り立つ。

(ii) 任意の関数  $f, g \in C^\infty(D)$  と定数  $c \in \mathbb{R}$  に対して

$$d(f+g) = df + dg$$

$$d(fg) = g df + f dg$$

$$dc = 0$$

が成り立つ。

(iii)  $\Omega^1(D) = C^\infty(D) dx_1 \oplus \cdots \oplus C^\infty(D) dx_n$  と表すことができる。

系. 写像  $d : C^\infty(D) \rightarrow \Omega^1(D)$  は線形で

$$\text{Ker}(d) = \mathbb{R}$$

が成り立つ。

注意. 補題 22 は定義 12 で定められた微分型式のつくる  $C^\infty(D)$  加群  $\Omega^1(D)$  がベクトル解析入門, §3.1, 定義 5, (ii) で定められた 1 次の微分型式の全体と一致することを示している。

例 4. 内積を用いれば

(i) 補題 20 で定義された写像  $\Phi$  を

$$\Phi(f, F) = [\langle f, \frac{\partial F}{\partial x_1} \rangle \cdots \langle f, \frac{\partial F}{\partial x_n} \rangle]$$

と表すことができる。

(ii) 定義 12, (iii) において、関数  $F = {}^t[F_1 \cdots F_n] \in C^\infty(D)^n$  に対して

$$\mathbf{d}F = {}^t[dF_1 \cdots dF_n] \in \Omega^1(D)^n$$

と定めれば、補題 21, (iii) より

$$c(f, F) = {}^t f \mathbf{d}F = \langle f, \mathbf{d}F \rangle \in \Omega^1(D)$$

と表すこともできる。

(iii) 補題 21, 補題 22 の記号のもと

$$c(f, F) = \sum_{j=1}^n ({}^t f \frac{\partial F}{\partial x_j}) dx_j = \sum_{j=1}^n \langle f, \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle dx_j$$

と表すことができる。

次に微分型式の積分について考える。

補題 23.  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  で定義された関数  $f, F, g, G \in C^\infty(D)^n$  に対して、等式

$$c(f, F) = c(g, G)$$

が成り立つと仮定する。このとき、区間  $I$  で定義された任意の  $C^1$  級関数  $\gamma : I \rightarrow D$  に対して

$$({}^t f \circ \gamma) \cdot (F \circ \gamma)' = ({}^t g \circ \gamma) \cdot (G \circ \gamma)' \in C^0(I)$$

が成り立つ。従って、関数  $f, F, g, G \in C^\infty(D)^n$  の成分表示をそれぞれ

$$f = {}^t[f_1 \cdots f_n], \quad F = {}^t[F_1 \cdots F_n]$$

$$g = {}^t[g_1 \cdots g_n], \quad G = {}^t[G_1 \cdots G_n]$$

とすれば

$$\sum_{i=1}^n (f_i \circ \gamma) \cdot (F_i \circ \gamma)' = \sum_{i=1}^n (g_i \circ \gamma) \cdot (G_i \circ \gamma)' \in C^0(I)$$

が成り立つことも解る。

定義 13.  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  で定義された微分型式

$$\omega = c(f, F) = \sum_{i=1}^n f_i dF_i \in \Omega^1(D)$$

と区分的に滑らかな関数  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  により

$$C: \mathbf{x} = \gamma(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメータ表示されている  $D$  内の曲線  $C$  に対して

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_a^b ({}^t f \circ \gamma)(t) \cdot (F \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \gamma)(t) \cdot (F_i \circ \gamma)'(t) dt \end{aligned}$$

とおき、微分型式  $\omega$  の曲線  $C$  に沿う線積分という。

注意. (i) 補題 23 より、線積分の値が関数  $f, F \in C^\infty(D)^n$  の取り方に拠らず定まることが解る。

(ii) 微分型式  $\omega$  が関数  $g = {}^t[g_1 \cdots g_n] \in C^\infty(D)^n$  により

$$\omega = c(g, id) = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$$

と表されていれば、線積分は

$$\int_C \omega = \int_a^b {}^t g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_a^b g_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) dt$$

と表される。

(iii) ここでの微分型式とその線積分の記述は、岩沢健吉、代数函数論、第 3 章、§3 に従った。

[1] の最後に  $C^\infty(D)$  加群  $\Omega^1(D)$  とケーラー微分加群との関連について考える。

$A$  を環、 $B$  を  $A$  多元環、 $M$  を  $B$  加群とする。このとき、写像  $\mathcal{D}: B \rightarrow M$  は、次の 3 条件:

- (a)  $\mathcal{D}(x+y) = \mathcal{D}(x) + \mathcal{D}(y) \quad (x, y \in B)$
- (b)  $\mathcal{D}(xy) = y\mathcal{D}(x) + x\mathcal{D}(y) \quad (x, y \in B)$
- (c)  $\mathcal{D}(a) = 0 \quad (a \in A)$

を満たすならば、環  $A$  上の微分作用素であるといわれる。環  $A$  上の微分作用素  $\mathcal{D}: B \rightarrow M$  の全体を  $\text{Der}_A(B, M)$  と表す。特に、 $M = B$  であるときは  $\text{Der}_A(B) = \text{Der}_A(B, M)$  と略記する。

例 5.  $A = \mathbb{R}$  とし、 $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  に対して  $B = C^\infty(D)$  とおく。このとき

(i) 任意の整数  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \in \text{Der}_A(B)$$

となる。

(ii)  $M = C^\infty(D)^{(1,n)}$  とおき、写像  $\mathcal{D} : B \rightarrow M$  を

$$\mathcal{D}(f) = \text{grad} f = f' \quad (f \in B)$$

により定めれば

$$\mathcal{D} = \text{grad} \in \text{Der}_A(B, M)$$

となる。

(iii)  $M = \Omega^1(D)$  とおけば、補題 22 で定義された写像  $d : B \rightarrow M$  は

$$d \in \text{Der}_A(B, M)$$

となる。

**補題 24.**  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の原点  $\mathbf{0}$  を含む凸開集合  $D$  に対して

(i) 関数  $f \in C^\infty(D)$  を任意にとれば

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^n h_i(\mathbf{x}) x_i$$

となる関数  $h_i \in C^\infty(D)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) が存在する。

(ii) 任意の関数  $g \in C^\infty(D)$  に対して

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{0}) x_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{jk}(\mathbf{x}) x_j x_k$$

となる関数  $h_{jk} \in C^\infty(D)$  ( $1 \leq j, k \leq n$ ) が存在する。

$n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  と点  $\mathbf{a} \in D$  に対して、写像

$$\mathbf{a}^* : \begin{array}{ccc} C^\infty(D) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \psi & & \psi \\ f & \longmapsto & f(\mathbf{a}) \end{array}$$

は全射かつ  $\mathbb{R}$  多元環の準同形となる。また

$$\mathfrak{m}(D, \mathbf{a}) = \text{Ker}(\mathbf{a}^*) = \{f \in C^\infty(D) \mid f(\mathbf{a}) = 0\}$$

とおけば、 $\mathfrak{m}(D, \mathbf{a})$  は  $C^\infty(D)$  の極大イデアルとなり

$$C^\infty(D) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}(D, \mathbf{a})$$

が成り立つ。ここで

$$\mathbb{R}_{\mathbf{a}} = C^\infty(D)/\mathfrak{m}(D, \mathbf{a})$$

とおく。環準同形  $\mathbf{a}^*$  により  $\mathbb{R}$  を  $C^\infty(D)$  加群とみなしたものを  $\mathbb{R}_{\mathbf{a}}$  と表すと考えてもよい。さらに、開集合  $D$  が凸であれば、補題 24 より

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(D, \mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^n C^\infty(D)(x_i - a_i) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}(x_i - a_i) \oplus \mathfrak{m}(D, \mathbf{a})^2 \\ C^\infty(D) &= \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}(D, \mathbf{a}) = \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}(x_i - a_i) \oplus \mathfrak{m}(D, \mathbf{a})^2 \end{aligned}$$

が成り立つことも解る。

例 6.  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の凸開集合  $D$  と点  $\mathbf{a} \in D$  に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(D), \mathbb{R}_{\mathbf{a}}) \\ \psi & & \psi \\ \mathbf{u} & \longmapsto & \mathbf{a}^* \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \end{array}$$

は線形空間の同形となり、写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(D), \mathbb{R}_{\mathbf{a}}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \psi & & \psi \\ v & \longmapsto & {}^t[v(x_1) \cdots v(x_n)] \end{array}$$

はその逆写像となる。従って

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(D), \mathbb{R}_{\mathbf{a}}) &= \left\{ \mathbf{a}^* \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^n u_j \cdot \left( \mathbf{a}^* \circ \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mid u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R} \right\} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R} \cdot \left( \mathbf{a}^* \circ \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

と表されることも解る。

注意. 例 6 で、関数  $f \in C^\infty(D)$  より定まる値

$$\left( \mathbf{a}^* \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right)(f) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \cdot u_j$$

は関数  $f$  の点  $\mathbf{a} \in D$  における  $\mathbf{u}$  方向の偏微分係数と呼ばれる。ベクトル解析入門、例 10.1 を参照のこと。従って、ベクトル

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

は関数  $f$  の点  $\mathbf{a}$  における  $\mathbf{u}$  向きの接ベクトルを表す。

補題 25. 環  $A$  と  $A$  多元環  $B$  および  $B$  加群  $M$  に対して

- (i)  $\text{Der}_A(B, M)$  は  $\text{Hom}_A(B, M)$  の部分  $B$  加群となる。
- (ii)  $N$  を  $B$  加群とする。このとき  $\mathcal{D} \in \text{Der}_A(B, M)$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_B(M, N)$  であれば  $\varphi \circ \mathcal{D} \in \text{Der}_A(B, N)$  となる。
- (iii)  $\sigma : B_0 \rightarrow B$  が  $A$  多元環の準同形で  $\mathcal{D} \in \text{Der}_A(B, M)$  であれば  $\mathcal{D} \circ \sigma \in \text{Der}_A(B_0, M)$  となる。

定理 7. 任意の環  $A$  と  $A$  多元環  $B$  に対して

(i) 次の 2 条件:

(a)  $\Omega_{B/A} = \sum_{x \in B} B d_{B/A} x$

(b) 任意の  $B$  加群  $M$  に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) & \longrightarrow & \text{Der}_A(B, M) \\ d_{B/A}^* : & \psi & \psi \\ & \varphi & \longmapsto \varphi \circ d_{B/A} \end{array}$$

は全射である

を満たす  $B$  加群  $\Omega_{B/A}$  と写像  $d_{B/A} \in \text{Der}_A(B, \Omega_{B/A})$  が存在する。

(ii) 写像  $d_{B/A}^* : \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \rightarrow \text{Der}_A(B, M)$  は  $B$  加群同形となる。

系. (i) 環  $A$  と  $A$  多元環  $B$  に対して、写像

$$d_{B/A}^* : \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, B) \longrightarrow \text{Der}_A(B)$$

は  $B$  加群同形となる。

(ii) 環  $A$  と  $A$  多元環  $B$  および  $B$  加群  $M$  に対して定まる写像

$$\langle , \rangle_M : \begin{array}{ccc} \Omega_{B/A} \times \text{Der}_A(B, M) & \longrightarrow & M \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ (\omega, \mathcal{D}) & \longmapsto & ((d_{B/A}^*)^{-1}(\mathcal{D}))(\omega) \end{array}$$

は多重  $B$  加群準同形となる。この写像の零化作用素を  $\text{Ann}^M$  と表せば

$$\text{Ann}^M(\Omega_{B/A}) = 0$$

が成り立つ。

注意. 環  $A$  と  $A$  多元環  $B$  に対して定まる  $B$  加群  $\Omega_{B/A}$  をケーラー微分加群と呼ぶ。

定理 8.  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  に対して

$$A = \mathbb{R}, \quad B = C^\infty(D)$$

とおく。このとき

(i) 条件  $\varphi_D \circ d_{B/A} = d$  を満たす  $B$  加群準同形  $\varphi_D : \Omega_{B/A} \rightarrow \Omega^1(D)$  が存在する。

(ii) 写像  $\varphi_D$  は全射である。

(iii)  $\Omega_{B/A} = \text{Ker}(\varphi_D) \oplus \Omega^1(D)$  が成り立つ。

以上により、 $C^\infty(D)$  加群  $\Omega^1(D)$  はケーラー微分加群  $\Omega_{B/A}$  の部分  $B$  加群としても、剰余  $B$  加群としても表現できることが解った。

[2]. 多様体上の微分型式

ここでは  $n$  次元  $C^\infty$  級多様体  $(X, C_X^\infty)$  上の微分型式を定義し、その基本的な性質を調べる。層の理論の初歩を既知とする。

$n$  次元  $C^\infty$  級多様体  $(X, C_X^\infty)$  の座標近傍  $(U, \varphi)$  をとり  $D = \varphi(U)$  とおけば、 $D$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合で、写像

$$\varphi^* : \begin{array}{ccc} C^\infty(D) & \longrightarrow & C_X^\infty(U) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ g & \longmapsto & g \circ \varphi \end{array}$$

は  $\mathbb{R}$  多元環の同形となる。従って、環  $C^\infty(D)$  から  $C^\infty(D)$  加群  $\Omega^1(D)$  を構成した方法と同様の方法により、環  $C_X^\infty(U)$  から  $C_X^\infty(U)$  加群  $\Omega_X^1(U)$  を構成することができる。実際、写像

$$\Phi : \begin{array}{ccc} C_X^\infty(U, \mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & C^\infty(D)^{(1,n)} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ (f, F) & \longmapsto & ({}^t f \circ \varphi^{-1}) \cdot (F \circ \varphi^{-1})' \end{array}$$

に付随する同値関係が定める商集合に  $C_X^\infty(U)$  加群構造を導入して  $\Omega_X^1(U)$  と定義すればよい。これを

$$\Omega_X^1(U) = \varphi^*(\Omega^1(D))$$

と表す。

ここで、以下に必要となる記号をいくつか定義しておく。

写像  $\Phi : C_X^\infty(U, \mathbb{R}^n)^2 \rightarrow C^\infty(D)^{(1,n)}$  を標準的全射

$$c : C_X^\infty(U, \mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \Omega_X^1(U)$$

と  $C_X^\infty(U)$  加群同形

$$\tilde{\Phi} : \Omega_X^1(U) \rightarrow C_X^\infty(U)^{(1,n)}$$

および  $\mathbb{R}$  多元環の同形  $\varphi^* : C^\infty(D) \rightarrow C_X^\infty(U)$  より定まる  $C_X^\infty(U)$  加群同形

$$\varphi^{*(1,n)} : C^\infty(D)^{(1,n)} \rightarrow C_X^\infty(U)^{(1,n)}$$

を用いて

$$\Phi = (\varphi^{*(1,n)})^{-1} \circ \tilde{\Phi} \circ c$$

と表す。

注意. 定義 12, (i) と同様に、写像  $\tilde{\Phi} : \Omega_X^1(U) \rightarrow C_X^\infty(U)^{(1,n)}$  が  $C_X^\infty(U)$  加群同形となるように  $\Omega_X^1(U)$  に  $C_X^\infty(U)$  加群の構造を導入する。

関数  $f \in C_X^\infty(U)$  に対して

$$\frac{df}{d\varphi} = \varphi^{*(1,n)}((f \circ \varphi^{-1})') = (f \circ \varphi^{-1})' \circ \varphi \in C_X^\infty(U)^{(1,n)}$$

とおけば

$$\frac{d}{d\varphi} \circ \varphi^* = \varphi^{*(1,n)} \circ \text{grad}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_X^\infty(U), C_X^\infty(U)^{(1,n)})$$

$$\text{Ker}\left(\frac{d}{d\varphi}\right) = \mathbb{R}$$

が成り立つ。関数  $\varphi$  の成分表示を  $\varphi = {}^t[\varphi_1 \cdots \varphi_n]$  とするとき

$$\frac{df}{d\varphi} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial \varphi_n} \right]$$

と表せば、任意の整数  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) に対して

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_j} \in C_X^\infty(U)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_X^\infty(U))$$

が成り立つ。さらに

$$\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_X^\infty(U)) \supset \bigoplus_{j=1}^n C_X^\infty(U) \frac{\partial}{\partial \varphi_j}$$

も成り立つ。

関数  $f \in C_X^\infty(U)$  に対して

$$df = \tilde{\Phi}^{-1}\left(\frac{df}{d\varphi}\right) \in \Omega_X^1(U)$$

とおけば

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} \circ d &= \frac{d}{d\varphi} \\ d &\in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_X^\infty(U), \Omega_X^1(U)) \\ \text{Ker}(d) &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}df &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} d\varphi_j \\ \Omega_X^1(U) &= \bigoplus_{j=1}^n C_X^\infty(U) d\varphi_j\end{aligned}$$

が成り立つ。

ここで

$$\Sigma = \{U \mid (U, \varphi) \text{ は } (X, C_X^\infty) \text{ の座標近傍}\}$$

とおけば、反変関手

$$\Omega_X^1 : \Sigma \longrightarrow (\text{Mod.})$$

が定まる。集合系  $\Sigma$  は  $X$  の開集合の基底となるから、反変関手

$$\Omega_X^1 : \text{open}(X) \longrightarrow (\text{Mod.})$$

が定まり局所条件を満たす。従って、 $X$  上の  $C_X^\infty$  加群層  $\Omega_X^1$  が定義される。これを多様体  $(X, C_X^\infty)$  上 1 次の  $C^\infty$  級微分形式のつくる層という。

以下では、多様体  $(X, C_X^\infty)$  の局所的な性質を調べる。特に、点  $P \in X$  における茎 (stalk)

$$\begin{aligned}C_{X,P}^\infty &= \text{ind. lim } C_X^\infty(U) \\ \Omega_{X,P}^1 &= \text{ind. lim } \Omega_X^1(U)\end{aligned}$$

について考える。このとき、 $\Omega_{X,P}^1$  は  $C_{X,P}^\infty$  加群となることに注意する。

注意. 点  $P$  を含む  $X$  の座標近傍  $(U, \varphi)$  をひとつ固定して、 $U$  の開部分集合に関する帰納極限をとっても  $C_{X,P}^\infty$  や  $\Omega_{X,P}^1$  が得られるから、これらの研究に  $(U, \varphi)$  を用いることができる。

**例 7.**  $n$  次元  $C^\infty$  級多様体  $(X, C_X^\infty)$  と点  $P \in X$  に対して、 $P$  を含む  $(X, C_X^\infty)$  の座標近傍  $(U, \varphi)$  を任意にとり、標準的環準同形  $\Omega_X^1(U) \rightarrow \Omega_{X,P}^1$  による  $d\varphi_j$  の像を  $(d\varphi_j)_P$  と表せば

$$\Omega_{X,P}^1 = \bigoplus_{i=1}^n C_{X,P}^\infty (d\varphi_i)_P \simeq (C_{X,P}^\infty)^n$$

が成り立つ。

$n$  次元  $C^\infty$  級多様体  $(X, C_X^\infty)$  と点  $P \in X$  に対して、写像

$$P^* : \begin{array}{ccc} C_{X,P}^\infty & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \psi & & \psi \\ f & \longmapsto & f(P) \end{array}$$

は全射かつ  $\mathbb{R}$  多元環の準同形となり

$$\text{Ker}(P^*) = \mathfrak{m}_{X,P} = \mathfrak{m}(C_{X,P}^\infty)$$



が成り立つ。さらに

$$C_{X,P}^{\infty} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}_{X,P}$$

も成り立つ。ここで

$$\mathbb{R}_{X,P} = C_{X,P}^{\infty} / \mathfrak{m}_{X,P}$$

とおく。環準同形  $P^*$  により  $\mathbb{R}$  を  $C_{X,P}^{\infty}$  加群とみなしたものを  $\mathbb{R}_{X,P}$  と表すと考えてもよい。

$n$  次元  $C^{\infty}$  級多様体  $(X, C_X^{\infty})$  と点  $P \in X$  に対して、 $C_{X,P}^{\infty}$  加群  $\Omega_{X,P}^1$  の部分  $\mathbb{R}$  加群

$$S_P(X) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R} (d\varphi_i)_P$$

を定める。このとき例 7 より

$$\Omega_{X,P}^1 = S_P(X) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{m}_{X,P} (d\varphi_i)_P$$

が成り立つこと、および  $\mathbb{R}$  加群の同形

$$S_P(X) \simeq \Omega_{X,P}^1 \otimes_{C_{X,P}^{\infty}} \mathbb{R}_{X,P}$$

が成立することが解る。

**定義 14.**  $n$  次元  $C^{\infty}$  級多様体  $(X, C_X^{\infty})$  と点  $P \in X$  に対して

$$T_P(X) = \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{X,P}^{\infty}, \mathbb{R}_{X,P})$$

とおき、 $X$  の  $P$  における接ベクトル空間という。

注意. 多様体  $(X, C_X^{\infty})$  の点  $P \in X$  における接ベクトル空間  $T_P(X)$  は次の 3 条件:

- (a)  $v(f+g) = v(f) + v(g) \quad (f, g \in C_{X,P}^{\infty})$
- (b)  $v(fg) = g(P)v(f) + f(P)v(g) \quad (f, g \in C_{X,P}^{\infty})$
- (c)  $v(a) = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

を満たす写像  $v: C_{X,P}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$  の全体であると定義することもできる。

**補題 26.**  $n$  次元  $C^{\infty}$  級多様体  $(X, C_X^{\infty})$  と点  $P \in X$  に対して

(i) 点  $P$  を含む  $(X, C_X^{\infty})$  の座標近傍  $(U, \varphi)$  を任意にとり、標準的環準同形を  $\rho_{U,P}: C_X^{\infty}(U) \rightarrow C_{X,P}^{\infty}$  と表せば、任意の整数  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) に対して、条件

$$\left( \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right)_P \circ \rho_{U,P} = \rho_{U,P} \circ \frac{\partial}{\partial \varphi_j}$$

を満たす微分作用素

$$\left( \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right)_P \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{X,P}^{\infty})$$

が存在する。さらに

$$\partial_{j,P} = P^* \circ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right)_P : C_{X,P}^{\infty} \longrightarrow \mathbb{R}$$

とおけば

$$\partial_{j,P} \in T_P(X)$$

となる。

(ii) 接ベクトル空間  $T_P(X)$  は

$$T_P(X) = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R} \cdot \partial_{j,P}$$

と表される。従って

$$\dim_{\mathbb{R}} T_P(X) = n$$

であることも解る。

(iii) 接ベクトル空間  $T_P(X)$  は  $S_P(X)$  の双対空間となる。即ち

$$T_P(X) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(S_P(X), \mathbb{R})$$

が成り立つ。

注意. 一般に、線形空間  $V$  の双対空間を  $V^*$  と表す。このとき、補題 26, (iii) を

$$T_P(X) = S_P(X)^*, \quad S_P(X) = T_P(X)^*$$

と表すこともできる。

[2] の最後に多様体とその接ベクトル空間の埋め込みについて考える。

$n$  次元  $C^\infty$  級多様体  $(X, C_X^\infty)$  に対して、位相空間  $X$  が第二可算公理を満たすと仮定する。このとき  $N \geq 2n$  であれば、 $(X, C_X^\infty)$  は  $\mathbb{R}^N$  の閉部分多様体と  $C^\infty$  級同形となる。これを Whitney の定理という。即ち、多様体として  $X \subset \mathbb{R}^N$  と考えることができる。このとき、任意の点  $P \in X$  に対して、接ベクトル空間  $T_P(X)$  も  $\mathbb{R}^N$  の部分線形空間とみなすことができる。実際、 $\mathbb{R}^N$  の座標関数を  $\mathbf{y} = {}^t[y_1 \cdots y_N]$  とするとき、写像

$$\mathbf{y}_{X,P}^* : \begin{array}{ccc} T_P(X) & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ \psi & & \downarrow \\ v & \longmapsto & \begin{bmatrix} v(y_1|_P) \\ \vdots \\ v(y_N|_P) \end{bmatrix} \end{array}$$

は単射かつ線形となる。これを接ベクトル空間  $T_P(X)$  の  $\mathbb{R}^N$  への埋め込みという。従って

$$T_P(X) = \text{Im}(\mathbf{y}_{X,P}^*) = \mathbf{y}_{X,P}^*(T_P(X))$$

は  $\mathbb{R}^N$  の  $n$  次元部分線形空間となる。これを

$$\begin{aligned} T_P(X) &= \left\{ \begin{bmatrix} v(y_1|_P) \\ \vdots \\ v(y_N|_P) \end{bmatrix} \mid v \in T_P(X) \right\} \\ &= \left\{ \frac{d\mathbf{y}}{d\varphi}(P) \cdot \mathbf{t} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

と表すこともできる。また、この等式より

$$\text{rank}\left(\frac{d\mathbf{y}}{d\varphi}(P)\right) = n$$

であることも解る。

注意. 以上により、 $X \subset \mathbb{R}^N$  とみなせるとき、多様体  $(X, C_X^\infty)$  と点  $P \in X$  に対して、ふたつの接ベクトル空間  $T_P(X)$  および  $T_P(X)$  が定義された。

$\mathbb{T}_P(X)$  を代数的接ベクトル空間と呼び、 $\mathbb{T}_P(X)$  を幾何学的接ベクトル空間と呼ぶべきと思われる。また、 $N$ 次元空間  $\mathbb{R}^N$  の部分アフィン空間

$$\overrightarrow{OP} + \mathbb{T}_P(X)$$

を多様体  $X$  の点  $P$  における接空間と呼ぶ。より正確には、接アフィン空間と呼ぶべきかも知れない。

例 8. 平面  $\mathbb{R}^2$  内の単位円

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

と点  $P \in X$  に対して、 $X$  の  $P$  における接空間  $\overrightarrow{OP} + \mathbb{T}_P(X)$  は  $X$  の  $P$  における接線を表す。従って、 $P = {}^t[a \ b] \in \mathbb{R}^2$  とすれば、接線の方程式が

$$ax + by = 1$$

であることも解る。

定理 9.  $n$ 次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  で定義された  $C^\infty$  級関数  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  に対して

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \mid \mathbf{x} \in D, \mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \right\} \subset D \times \mathbb{R}^m$$

とおけば、 $X$  は  $n$ 次元  $C^\infty$  級多様体となる。このとき、点  $P \in X$  を任意にとり  $P = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ F(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$  と表せば、 $X$  の  $P$  における接空間

$$\overrightarrow{OP} + \mathbb{T}_P(X)$$

の方程式は

$$\mathbf{y} = F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + F(\mathbf{a})$$

となる。

注意. 定理 9 で、 $m = n = 1$  であれば接空間は接線となり、 $m = 1, n = 2$  であれば接空間は接平面となる。

[3]. 複素平面  $\mathbb{C}$  の開集合  $D$  に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(D)^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}(D) \\ \Phi : \quad \cup & & \cup \\ & & (f, F) \longmapsto f \cdot F' \end{array}$$

を定める。このとき、リーマン面の場合や補題 20 と同様に、写像  $\Phi$  の定める同値類を  $f dF$  と表せば、 $D$  上の正則微分型式が定義できる。開集合  $D$  上の正則微分型式の全体を  $\Omega^1(D)$  と表す。このとき  $\Omega^1(D)$  は  $\mathcal{O}(D)$  加群となる。

[4]. 積の導関数の公式

(1)  $n$ 次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  で定義された  $C^1$  級関数  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$$(fg)' = gf' + fg'$$

が成り立つ。

注意. (1) を

$$(fg)' = f'g + fg'$$

と表すこともできる。

(2)  $n$ 次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  で定義された  $C^1$  級関数  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  と  $G : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  に対して

$$(fG)' = Gf' + fG'$$

が成り立つ。

注意.  $m \geq 2$  のとき、(2) を

$$(fG)' = f'G + fG'$$

と表すことはできない。

[5]. 代数学的テイラー近似

ここでは、補題 24 の一般化として、関数  $f \in C^\infty(D)$  のテイラー近似について考える。まず、補題 24 を別の形に書き換える。

**補題 27.**  $n$ 次元空間  $\mathbb{R}^n$  の原点  $\mathbf{0}$  を含む凸開集合  $D$  で定義された任意の関数  $f \in C^\infty(D)$  に対して

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + f'(\mathbf{0})\mathbf{x} + {}^t\mathbf{x}H(\mathbf{x})\mathbf{x}$$

となる関数  $H \in C^\infty(D)^{(n,n)}$  が存在する。

注意. 補題 27 で行列  $H(\mathbf{x})$  を対称行列と仮定することができる。

**補題 28.**  $n$ 次元空間  $\mathbb{R}^n$  の原点  $\mathbf{0}$  を含む凸開集合  $D$  で定義された任意の関数  $f \in C^\infty(D)$  に対して

$$f(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{0}) + f'(\mathbf{0})\mathbf{x} + \frac{1}{2}{}^t\mathbf{x}H_f(\mathbf{0})\mathbf{x} \pmod{\mathfrak{m}(D, \mathbf{0})^3}$$

となる。ここで  $H_f$  は関数  $f$  のヘッセ行列である。

**例 9.** 自然数  $n$  と負でない整数  $k$  に対して

$$\mathbb{I}_k^n = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n \mid i_1, \dots, i_n \geq 0, i_1 + \dots + i_n = k\}$$

とおく。このとき

(i) 不定元  $X_1, \dots, X_n$  に対して

$$(X_1 + \dots + X_n)^k = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_k^n} \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

が成り立つ。従って  $k \geq 1$  であれば

$$\sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n X_{j_1} \dots X_{j_k} = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_k^n} \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

が成り立つことも解る。

(ii) 環  $B$  のイデアル  $\mathfrak{m}$  が  $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$  ( $x_1, \dots, x_n \in B$ ) と表されていれば

$$\mathfrak{m}^k = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_k^n} B x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

となる。

**定理 10.**  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の原点  $\mathbf{0}$  を含む凸開集合  $D$  で定義された関数  $f \in C^\infty(D)$  と負でない整数  $k$  に対して

$$f_k(\mathbf{x}) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_k^n} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\mathbf{0}) x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

とおく。このとき

(i)  $f_k(\mathbf{x})$  は  $k$  次同次多項式で  $f_0 = f(\mathbf{0})$  となる。また  $k \geq 1$  であれば

$$f_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(\mathbf{0}) x_{j_1} \cdots x_{j_k}$$

と表すこともできる。

(ii) 任意の自然数  $r$  に対して

$$f \equiv f_0 + f_1 + \cdots + f_{r-1} \pmod{\mathfrak{m}(D, \mathbf{0})^r}$$

が成り立つ。

**例 10.** 定理 10 の仮定と記号のもと

$$f_0 = f(\mathbf{0})$$

$$f_1 = f'(\mathbf{0}) \mathbf{x}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{x} H_f(\mathbf{0}) \mathbf{x}$$

となる。従って、定理 10, (ii) で  $r = 3$  とおけば補題 28 が得られる。

定理 10, (ii) をテイラー展開に近い形で表現するために、環  $B = C^\infty(D)$  とその極大イデアル  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(D, \mathbf{0})$  に対して、 $B$  の  $\mathfrak{m}$  進完備化

$$\hat{B} = \text{proj. lim } B/\mathfrak{m}^r$$

を導入する。負でない整数  $k$  に対して

$$B_k = \bigoplus_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_k^n} \mathbb{R} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

とおけば、任意の自然数  $r$  に対して

$$B = \bigoplus_{k=0}^{r-1} B_k \oplus \mathfrak{m}^r, \quad \mathfrak{m} = \bigoplus_{k=1}^{r-1} B_k \oplus \mathfrak{m}^r$$

が成り立つ。従って、同形

$$B/\mathfrak{m}^r \simeq \bigoplus_{k=0}^{r-1} B_k, \quad \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^r \simeq \bigoplus_{k=1}^{r-1} B_k$$

が成立するから

$$\hat{B} \simeq \prod_{k=0}^{+\infty} B_k = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

$$\hat{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{k=1}^{+\infty} B_k = x_1 \hat{B} + \cdots + x_n \hat{B}$$

となる。ここで関数列

$$(f_k)_{k=0}^{+\infty} \in \prod_{k=0}^{+\infty} B_k$$

と形式的無限級数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

を同一視している。このとき、写像

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \hat{B} \\ \Phi : \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & (f_k)_{k=0}^{+\infty} \end{array}$$

は  $\mathbb{R}$  多元環の準同形で

$$\text{Ker}(\Phi) = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^r \in \text{Spec } B$$

となる。即ち、環  $\hat{B} = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$  において、関数  $f \in B$  に関する合同式

$$f \equiv f_0 + f_1 + \dots + f_{r-1} \pmod{\mathfrak{m}^r} \quad (r \in \mathbb{N})$$

より無限級数

$$\Phi(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

が導かれる。これを  $C^\infty$  級関数  $f$  の形式的テイラー展開と呼ぶ。ただし

$$B \subset \hat{B}$$

は成り立たないので、環  $B$  の  $\mathfrak{m}$  進位相は分離的ではないことに注意する。

**例 11.** 環準同形  $\Phi : B \rightarrow \hat{B}$  に対して

$$\text{Ker}(\Phi) = \left\{ f \in B \mid \forall k_1, \dots, k_n \geq 0; \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(\mathbf{0}) = 0 \right\}$$

が成り立つ。従って  $f \in \text{Ker}(\Phi)$ ,  $f \neq 0$  であれば  $f$  は原点  $\mathbf{0}$  でテイラー展開可能ではないことが解る。

**例 12.**  $D = \mathbb{R}^n$  として、関数  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbf{x} = {}^t[x_1 \dots x_n]$  に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x_1^2}) & (x_1 > 0) \\ 0 & (x_1 \leq 0) \end{cases} \quad g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x_1^2}) & (x_1 < 0) \\ 0 & (x_1 \geq 0) \end{cases}$$

とおくことにより定める。このとき  $f, g \in C^\infty(D)$ ,  $f \neq 0, g \neq 0$  かつ  $fg = 0$  となる。従って、環  $B = C^\infty(D)$  は整ではない。また

$$f, g \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^r$$

となる。従って

$$\bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^r \neq 0$$

であることも解る。

次に、代数学的ではなく、解析学的にテイラー近似とテイラー展開について考える。定理 10, (ii) によれば

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{r-1} + g_r \quad (g_r \in \mathfrak{m}(D, \mathbf{0})^r)$$

と表すことができる。ここで関数  $g_r$  の具体的な形を調べる。

**補題 29.**  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の原点  $\mathbf{0}$  を含む凸開集合  $D$  と  $D$  で定義された関数  $f \in C^\infty(D)$  に対して

(i)  $\tilde{D} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t\mathbf{x} \in D \right\}$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の開集合である。

(ii) 関数  $F : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$F\left(\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}\right) = f(t\mathbf{x}) \quad \left(\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \tilde{D}\right)$$

により定義する。このとき  $F \in C^\infty(\tilde{D})$  となり、任意の自然数  $k$  に対して

$$\frac{\partial^k F}{\partial t^k} \left(\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}\right) = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(t\mathbf{x}) x_{j_1} \cdots x_{j_k}$$

が成り立つ。

**定理 11.**  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の原点  $\mathbf{0}$  を含む凸開集合  $D$  で定義された関数  $f \in C^\infty(D)$  と負でない整数  $k$  に対して

$$f_k(\mathbf{x}) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_k^n} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\mathbf{0}) x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

とおき、定理 10, (ii) に従って

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{r-1} + g_r \quad (g_r \in \mathfrak{m}(D, \mathbf{0})^r)$$

と表す。このとき

(i) 誤差項  $g_r$  ( $r \geq 1$ ) は

$$g_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_r=1}^n x_{j_1} \cdots x_{j_r} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}}(t\mathbf{x}) dt$$

と表される。

(ii) 条件

$$g_r(\mathbf{x}) = \frac{(1-b)^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_r=1}^n \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}}(b\mathbf{x}) x_{j_1} \cdots x_{j_r}$$

を満たす実数  $b \in (0, 1)$  が存在する。

(iii) 条件

$$g_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{r!} \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_r=1}^n \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}}(c\mathbf{x}) x_{j_1} \cdots x_{j_r}$$

を満たす実数  $c \in (0, 1)$  が存在する。

系. 関数  $f \in C^\infty(D)$  に対して、正の定数  $\delta, M$  が存在して、任意の点  $\mathbf{x} \in D$  と自然数  $k$  および  $j_1, \dots, j_k$  ( $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$ ) に対して

$$\|\mathbf{x}\| \leq \delta \implies \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(\mathbf{x}) \right| \leq M$$

が成り立つと仮定する。このとき、関数  $f$  は原点  $\mathbf{0}$  でテイラー展開可能で、無限級数

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\mathbf{x})$$

は集合  $\{\mathbf{x} \in D \mid \|\mathbf{x}\| \leq \delta\}$  において一様収束する。

注意. (i) 定理 11, (ii), (iii) の実数  $b, c \in (0, 1)$  は点  $\mathbf{x} \in D$  に依存して定まる。

(ii) 補題 24 は  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  が凸ではなくても原点  $\mathbf{0}$  を基点とする星状集合であれば成り立つ。従って、補題 27, 補題 28, 定理 10, 例 10, 例 11, 補題 29, 定理 11 とその系はすべて  $D$  を原点  $\mathbf{0}$  を基点とする星状開集合に一般化しても成立する。

特に  $n = 1$  の場合、次の結果が知られている。

**定理 12.**  $\mathbb{R}$  多元環の準同形

$$\Phi : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]$$

は全射である。従って、 $\mathbb{R}$  多元環の同形

$$C^\infty(\mathbb{R})/\text{Ker}(\Phi) \simeq \mathbb{R}[[x]]$$

が成立する。

注意.  $\mathbb{R}$  多元環の同形

$$C^\infty(\mathbb{R}) \simeq \text{Ker}(\Phi) \oplus \mathbb{R}[[x]]$$

は成立しないと思われる。キチンと確かめよ。

**定義 15.**  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $D$  で定義された関数  $f \in C^\infty(D)$  は、 $D$  のすべての点においてテイラー展開可能であるとき、 $D$  で実解析的であるといわれる。開集合  $D$  で実解析的な関数の全体を  $\mathcal{A}(D)$  と表す。このとき  $\mathcal{A}$  は位相空間  $\mathbb{R}^n$  上の  $\mathbb{R}$  多元環の層となる。これを  $\mathbb{R}^n$  の実解析的関数のつくる層という。

次に、環  $B = C^\infty(D)$  と環  $\mathcal{A}(D)$  の局所的な性質を調べる。特に、原点  $\mathbf{0} \in D$  における茎

$$B_0 = C_0^\infty = \text{ind. lim } C^\infty(U)$$

$$\mathcal{A}_0 = \text{ind. lim } \mathcal{A}(U)$$

について考える。このとき、環  $B_0, \mathcal{A}_0$  は局所環となり

$$\mathcal{A}_0 \subset B_0, \quad \mathfrak{m}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0 \cap \mathfrak{m}(B_0)$$

および

$$B_0 = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}(B_0), \quad \mathcal{A}_0 = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{A}_0)$$

が成り立つ。以下では  $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}(B_0)$  と表す。



関数の芽 (germ)  $f \in B_0 = C_0^\infty$  に対して、 $f$  のすべての階数の偏導関数の原点における値が一意的に定まることから、負でない任意の整数  $k$  に対して定理 10 と同様に  $f_k$  を定めることができる。即ち、写像

$$\Phi_0 : \begin{array}{ccc} B_0 & \longrightarrow & \hat{B} \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & (f_k)_{k=0}^{+\infty} \end{array}$$

が定まる。写像  $\Phi_0$  は  $\mathbb{R}$  多元環の準同形で

$$\text{Ker}(\Phi_0) = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathfrak{m}_0^r \in \text{Spec } B_0$$

が成り立つ。また、収束冪級数環を  $\mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$  と表せば、写像

$$\Phi_0 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$$

は  $\mathbb{R}$  多元環の同形となり

$$\mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\} \subsetneq \Phi_0(B_0)$$

が成り立つ。

**定理 13.**  $n = 1$  であれば、 $\mathbb{R}$  多元環の準同形

$$\Phi_0 : B_0 \longrightarrow \mathbb{R}[[x]]$$

は全射である。従って、 $\mathbb{R}$  多元環の同形

$$B_0/\text{Ker}(\Phi_0) \simeq \mathbb{R}[[x]]$$

が成立する。

系. 原点  $0$  の周りでテイラー展開可能ではない  $C^\infty$  級関数は集合

$$\text{Ker}(\Phi_0) - \{0\}$$

の要素と集合

$$\mathbb{R}[[x]] - \mathbb{R}\{\{x\}\}$$

の要素とに分類される。

注意. 任意の自然数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}$  多元環の準同形

$$\Phi : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

が全射となることが期待される。これが証明されれば、 $\mathbb{R}$  多元環の同形

$$C^\infty(\mathbb{R}^n)/\text{Ker}(\Phi) \simeq \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

が成立する。また、 $\mathbb{R}$  多元環の準同形

$$\Phi_0 : B_0 \longrightarrow \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

も全射となり、 $\mathbb{R}$  多元環の同形

$$B_0/\text{Ker}(\Phi_0) \simeq \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

が成立する。さらに、テイラー展開可能ではない  $C^\infty$  級関数が集合

$$\text{Ker}(\Phi_0) - \{0\}$$

の要素と集合

$$\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]] - \mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$$

の要素とに分類されることも分かる。

予想. 自然数  $n$  を固定する。負でない整数  $k$  と  $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{I}_k^n$  に対して

$$Q_{(k_1, \dots, k_n)}(\mathbf{x}) = \frac{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}}{1 + b_k x_1^2 \cdots x_n^2}$$

$$Q_k(\mathbf{x}) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{I}_k^n} a_{(k_1 \cdots k_n)} Q_{(k_1, \dots, k_n)}(\mathbf{x})$$

とおく。ここで

$$b_k \in (0, +\infty) \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$a_{(k_1 \cdots k_n)} \in \mathbb{R} \quad ((k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{I}_k^n)$$

である。このとき、数列

$$(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$$

および

$$(a_{(k_1 \cdots k_n)})_{(k_1 \cdots k_n) \in \mathbb{I}_k^n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{I}_k^n} \quad (k \in \mathbb{N})$$

をうまくとれば

(i) 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k$$

により定義され  $C^\infty$  級となる。

(ii) 関数  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  の形式的テイラー展開はすべての形式的冪級数を表すことができる。

この予想が証明されれば、 $\mathbb{R}$  多元環の準同形

$$\Phi: C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

が全射となることが解る。従って  $B = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$  とおくととき、環  $B$  は  $\mathfrak{m}$  進位相に関して分離的ではないが完備であることも解る。

**補題 30.** 数列  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$  と  $(a_{(k_1 \cdots k_n)})_{(k_1 \cdots k_n) \in \mathbb{I}_k^n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{I}_k^n}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) が条件

$$(*) \quad k! \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{I}_k^n} |a_{(k_1 \cdots k_n)}| \leq b_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

を満たすと仮定する。このとき、関数  $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$  が

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k$$

により定義され

$$f(\mathbf{0}) = a_{(0 \cdots 0)}$$

が成り立つ。

**補題 31.** 数列  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$  と  $(a_{(k_1 \cdots k_n)})_{(k_1 \cdots k_n) \in \mathbb{I}_k^n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{I}_k^n}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) が条件

$$(*) \quad k! \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{I}_k^n} |a_{(k_1 \cdots k_n)}| \leq b_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

を満たすと仮定する。このとき、補題 30 で定義された関数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^1$  級となり、任意の整数  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = a_{\mathbf{e}_i} = a_{(0 \dots 1 \dots 0)}$$

が成り立つ。

**補題 32.** 数列  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$  と  $(a_{(k_1 \dots k_n)})_{(k_1 \dots k_n) \in \mathbb{I}_k^n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{I}_k^n}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) が条件

$$(*) \quad k! \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{I}_k^n} |a_{(k_1 \dots k_n)}| \leq b_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

を満たすと仮定する。このとき、補題 30 で定義された関数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^2$  級となり、任意の整数  $i, j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{0}) = a_{2\mathbf{e}_i} = a_{(0 \dots 2 \dots 0)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}) = a_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j} = a_{(0 \dots 1 \dots 1 \dots 0)}$$

が成り立つ。

皆殺しの数式：

$$18782 \times 2 = 37564 = 9391 \times 4$$

ダサイの語源：駄才（駄馬）、惰才（惰眠）、橢才（橢円）、蛇才（蛇行）

我隣閉路、雲と影、蜘蛛・蜥蜴

複素関数論入門、リーマン面、riemann ; 2010 年 10 月 7 日版