(2016 年度版)

フーリエ解析入門

目次

序

本稿の目標はフーリエ級数とフーリエ変換の定義と基本的な性質を整理し、それらの応用をいくつか紹介することである。

前半ではフーリエ級数について述べる。フーリエ (Fourier, 1768-1830) は、周期 2π をもつ周期関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は

(1)
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\qquad (t\in\mathbb{R})$$

と表されると考え、それを『熱の解析的理論』に応用した。ここで a_0, a_1, a_2, $\cdots$, b_1, b_2, b_3, $\cdots$ は定数である。

関数の値域を複素数に拡張してオイラーの公式を用いると、(1) は

(2)
$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\,e^{ikt}\qquad (t\in\mathbb{R})$$

と書き直すことができる(補題1の系を参照のこと)。ここで $\cdots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \cdots$ は定数である。

§1から§6では(1), (2)のように表される関数 f の基本的な性質を調べる。

まず、関数 f が(1), (2)のように表されたとき、係数 a_k, b_k, c_k がどのように表されるかを調べ、表現(1), (2)の間の関係を明らかにする。

次に、どのような関数 f が(1), (2)のように表されるかについて考える。

最後に、これらの結果の応用をいくつか紹介する。

後半ではフーリエ変換について述べる。

§7から§12ではフーリエ変換と逆フーリエ変換を定義し、その基本的な性質を調べる。フーリエ変換を定義するためには広義積分が必要となる。

注意. (i) フーリエ級数の理論展開はテイラー展開の理論展開と対比させると解りやすい。テイラー展開の理論を復習しておくことが望ましい。

(ii) オイラーの公式を用いるので、区間 I で定義された複素数値関数 $f : I \to \mathbb{C}$ が研究の対象となる。

(iii) 積分はリーマン積分を用いるので、関数 f は区分的に連続であると仮定する。即ち、連続ではないとしても定積分は可能であるような関数を考える。

(iv) 絶対収束級数と絶対可積分関数との類似性を理解することは重要である。

(v) 主な結果である定理1と定理3は次のような統一的記述によりまとめて表現することもできる。

定理 1. (フーリエ級数) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π をもち区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかであると仮定する。このとき

$$(\Phi^* \circ \Phi)(f) = \frac{1}{2}(f_- + f_+)$$

が成り立つ。特に、関数 f が連続であれば

$$(\Phi^* \circ \Phi)(f) = f$$

が成り立つ。

定理 3. (フーリエ変換) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が任意の有界閉区間で区分的に滑らかでありかつ絶対可積分であると仮定する。このとき

$$(\mathscr{F}^* \circ \mathscr{F})(f) = \frac{1}{2}(f_- + f_+)$$

が成り立つ。特に、関数 f が連続であれば

$$(\mathscr{F}^* \circ \mathscr{F})(f) = f$$

が成り立つ。

§1. 絶対収束級数

ここでは (1), (2) により定義される関数 f の基本的な性質を調べる。そのためにまず、極限をとる前の段階を考える。即ち、自然数 n に対して

$$(1)_n \qquad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$(2)_n \qquad f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義される関数 f について考える。

補題 1. n を自然数とする。

(i) 複素定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ に対して関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $(1)_n$ により定義すれば、f は周期 2π をもつ C^∞ 級関数で

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt \qquad (0 \leqq k \leqq n)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt \qquad (1 \leqq k \leqq n)$$

となる。さらに $a_{-k} = a_k,\ \ b_{-k} = -b_k \ \ (1 \leqq k \leqq n),\ \ b_0 = 0$ とおき

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \qquad (-n \leqq k \leqq n)$$

と定めれば

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。即ち、関数 f は $(2)_n$ 形の表示をもつ。

(ii) 複素定数 $c_{-n}, \cdots, c_{-1}, c_0, c_1, \cdots, c_n$ に対して関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $(2)_n$ により定義すれば、f は周期 2π をもつ C^∞ 級関数で

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \qquad (-n \leqq k \leqq n)$$

となる。さらに

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}) \qquad (0 \leqq k \leqq n)$$

と定めれば

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。即ち、関数 f は $(1)_n$ 形の表示をもつ。

系. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して

$$f \text{ は (1) 形の表示をもつ} \iff f \text{ は (2) 形の表示をもつ}$$

が成り立つ。このとき f は周期 2π をもつ周期関数となる。

注意. 補題 1 の系では関数 f が連続になるとは限らない。

以下では、どのような数列に対して関数が実際に (1), (2) により定義されるかを調べる。

例 1． 数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ を

(i) $c_k = 0\ (k \leqq 0)$，$c_k = 1\ (k \geqq 1)$ と定める。このとき、級数

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{ikt}$$

はすべての点 $t \in \mathbb{R}$ において発散する。従って、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を (2) により定義することはできない。

(ii) $c_k = 0\ (k \leqq 0)$，$c_k = \frac{1}{k}\ (k \geqq 1)$ と定める。このとき、級数

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{ikt}$$

はすべての点 $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ において発散する。従って、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を (2) により定義することはできない。

次に、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が (1), (2) により定義できるような数列 $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$, $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ の例を挙げる。そのためには準備がひとつ必要となる。

補題 2． 複素数列 $(\alpha_k)_{k=1}^{+\infty}$ が条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k| < +\infty$$

を満たせば

(i) 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$ は加える順序にかかわりなくただひとつの値に収束する。

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty$ が成り立つ。

注意. (i) 数列 $(\alpha_k)_{k=1}^{+\infty}$ が補題 2 の条件を満たすとき、級数 $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$ は絶対収束するという。

(ii) 補題 2 に関連して一般に

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \text{ は収束} \implies \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k| < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty \implies \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k| < +\infty$$

はどちらも成り立たない。例えば $\alpha_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\ (k \geqq 1)$ により定義される数列 $(\alpha_k)_{k=1}^{+\infty}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \text{ は収束}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k| = +\infty$$

が成り立つ。

補題 3. 次が成り立つ。

(i) 複素数列 $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$ が条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty$$

を満たせば、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義される。このとき f は周期 2π をもつ連続関数で

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt \qquad (k \geqq 0)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \qquad (k \geqq 1)$$

となる。さらに $a_{-k} = a_k$, $b_{-k} = -b_k$ $(k \geqq 1)$, $b_0 = 0$ とおき

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

と定めれば

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。即ち、(1) により定義される関数 f は (2) 形の表示をもつことが示された。

(ii) 複素数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ が条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_{-k}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| < +\infty$$

を満たせば、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義される。このとき f は周期 2π をもつ連続関数で

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

となる。さらに

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}) \qquad (k \geqq 0)$$

と定めれば

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。即ち、(2) により定義される関数 f は (1) 形の表示をもつことが示された。

注意. 補題 3 から補題 1 を導くこともできる。

補題 4. 負でない整数 r に対して次が成り立つ。

(i) 複素数列 $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$ が条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |a_k| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |b_k| < +\infty$$

を満たせば、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義され、周期 2π をもつ C^r 級関数となる。さらに $r \geqq 1$ であれば、関数 f の m 階導関数 $f^{(m)}$ $(1 \leqq m \leqq r)$ は

$$f^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(k^m a_k \cos\big(kt + \frac{m\pi}{2}\big) + k^m b_k \sin\big(kt + \frac{m\pi}{2}\big)\Big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。

(ii) 複素数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ が条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_{-k}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_k| < +\infty$$

を満たせば、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義され、周期 2π をもつ C^r 級関数となる。さらに $r \geqq 1$ であれば、関数 f の m 階導関数 $f^{(m)}$ $(1 \leqq m \leqq r)$ は

$$f^{(m)}(t) = i^m \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m c_k\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。

注意. 以下に示す通り、フーリエ級数の理論には「連続ではない関数についても興味深い結果が出る」という特徴がある。従って、補題 3 の条件を満たさない重要な例も数多く存在する。例 3, 例 4 や定理 1 を参照のこと。

§1 の問題

問題 1.1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が (1) により定義できないような複素数列 $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$ の例を挙げよ。

問題 1.2. 補題 3, (ii) の条件を満たす複素数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, $(d_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ に対して関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ をそれぞれ (2) により定義する。このとき

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \overline{d_k}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2$$

が成り立つことを示せ。

注意. 問題 1.2 で示した最後の等式をパーセバルの等式という。パーセバルの等式はより一般に、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が連続であれば成り立つが、証明は難しいのでここでは略す。

問題 1.3. 負でない整数 r に対して次を示せ。

(i) 補題 4, (i) の条件を満たす複素数列 $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$ に対して関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を (1) により定義すれば

$$|f(t)|\leqq\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k|+|b_k|)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

が成り立つ。さらに $r\geqq 1$ であれば、任意の整数 m $(1\leqq m\leqq r)$ に対して

$$|f^{(m)}(t)|\leqq\sum_{k=1}^{+\infty}k^m(|a_k|+|b_k|)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

も成り立つ。

(ii) 補題 4, (ii) の条件を満たす複素数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ に対して関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を (2) により定義すれば

$$|f(t)|\leqq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\qquad(t\in\mathbb{R})$$

が成り立つ。さらに $r\geqq 1$ であれば、任意の整数 m $(1\leqq m\leqq r)$ に対して

$$|f^{(m)}(t)|\leqq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k^m c_k|\qquad(t\in\mathbb{R})$$

も成り立つ。

注意. 問題 1.3 は補題 4 の補足である。

§2. フーリエ級数の定義

ここでは区分的に連続な関数とそのフーリエ級数を定義する。

定義 1. $I = [a, b]$ を有界閉区間とする。

(i) 関数 $f : I \to \mathbb{C}$ は、有限個の点を除いて連続で任意の点 $t \in (a, b]$ に対して片側極限値

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t-h) \ \in \mathbb{C}$$

が存在し任意の点 $t \in [a, b)$ に対して片側極限値

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t+h) \ \in \mathbb{C}$$

が存在するとき、区分的に連続であるといわれる。

(ii) 区分的に連続な関数 $f : I \to \mathbb{C}$ に対して、関数

$$f_- \,:\, (a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_+ \,:\, [a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$$

をそれぞれ

$$f_-(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t-h) \qquad (a < t \leqq b)$$

$$f_+(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t+h) \qquad (a \leqq t < b)$$

により定義する。

補題 5. $I = [a, b]$ を有界閉区間とする。

(i) 連続関数 $f : I \to \mathbb{C}$ は区分的に連続であり

$$a < t \leqq b \implies f_-(t) = f(t)$$

$$a \leqq t < b \implies f_+(t) = f(t)$$

が成り立つ。

(ii) 区分的に連続な関数 $f : I \to \mathbb{C}$ は I で有界かつ積分可能である。

(iii) 関数 $f, g : I \to \mathbb{C}$ がどちらも区分的に連続であれば、和 $f+g : I \to \mathbb{C}$ も積 $fg : I \to \mathbb{C}$ も区分的に連続となり

$$(f+g)_- = f_- + g_-, \qquad (f+g)_+ = f_+ + g_+$$

$$(fg)_- = f_- g_-, \qquad (fg)_+ = f_+ g_+$$

が成り立つ。

系. p を正の定数とし、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 $2p$ をもち区間 $[-p, p]$ で区分的に連続であると仮定する。このとき、関数 f は任意の有界閉区間で区分的に連続となる。また、任意の点 $c \in \mathbb{R}$ に対して、関数 f は区間 $[c-p, c+p]$ で積分可能で

$$\int_{c-p}^{c+p} f(t)\, dt = \int_{-p}^{p} f(t)\, dt$$

が成り立つ。さらに、定義 1, (ii) で定められた関数 f_-, f_+ は関数

$$f_- \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_+ \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

に拡張され、周期 $2p$ をもち区間 $[-p, p]$ で区分的に連続となる。

例 2. 区分的に連続な関数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ と定数 $k\in\mathbb{Z}$ に対して、定積分

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt$$
$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-ikt}\,dt$$

が定まる。このとき

(i) $a_{-k}=a_k$, $b_{-k}=-b_k$ $(k\in\mathbb{Z})$ となる。従って $b_0=0$ も解る。

(ii) $c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$, $a_k=c_k+c_{-k}$, $b_k=i(c_k-c_{-k})$ $(k\in\mathbb{Z})$ となる。

(iii) 任意の自然数 n と点 $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\,e^{ikt}$$

が成り立つ。

定義 2. 区分的に連続な関数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ に対して

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt\qquad(k\in\mathbb{Z})$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt\qquad(k\in\mathbb{Z})$$
$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-ikt}\,dt\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

を関数 f のフーリエ係数という。また、負でない整数 n に対して

$$S_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\,e^{ikt}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

を関数 f のフーリエ級数の第 n 部分和といい、この極限

$$\tilde{f}(t)=\lim_{n\to+\infty}S_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\,e^{ikt}$$

を関数 f のフーリエ級数という。

補題 6. 区分的に連続な関数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ と負でない整数 n に対して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-S_n(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt-\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2$$

が成り立つ。従って、不等式

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt$$

が成立することも解る。

注意. 補題 6 の不等式をベッセルの不等式という。また、問題 1.2 ではより強く等号が成立する（パーセバルの等式）ことを示した。問題 1.2 と補題 6 とでは関数 f に関する仮定が異なることに注意する。

系. 区分的に連続な関数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ のフーリエ係数 a_k, b_k, c_k $(k\in\mathbb{Z})$ は条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|c_{-k}|^2<+\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}|c_k|^2<+\infty$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2<+\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2<+\infty$$

を満たす。従って

$$\lim_{k\to+\infty}c_{-k}=\lim_{k\to+\infty}c_k=0$$
$$\lim_{k\to+\infty}a_k=\lim_{k\to+\infty}b_k=0$$

が成り立つことも解る。

注意. (i) 補題 6 の系の後半の結果を関数 f のフーリエ係数の記号 a_k, b_k, c_k $(k\in\mathbb{Z})$ を用いることなく表せば

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{ikt}\,dt=\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-ikt}\,dt=0$$
$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt=\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt=0$$

となる。これらをリーマン・ルベーグの補題と呼ぶ。

(ii) 区分的に連続な関数 f のフーリエ級数により関数 $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が定義されるとは限らない。従って「どのような関数 f に対して関数 $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が定義されるのか、またどのような関数 f に対して $f=\tilde{f}$ となるのか」という問題が生ずる。この問題を解決することを以下の目標とする。ここで、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 2π をもち区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に連続であると仮定して考える。

即ち、次の課題の解決が本稿の目標のひとつである。

課題 1. 周期 2π をもち区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して

(i) 関数 f のフーリエ級数

$$\tilde{f}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\,e^{ikt}$$

がすべての点 $t\in\mathbb{R}$ において収束するための条件を求めよ。

(ii) 関数 f が $f=\tilde{f}$ と表されるための条件を求めよ。即ち、すべての点 $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\,e^{ikt}$$

が成り立つための条件を求めよ。

§2 の問題

問題 2.1. 有界閉区間 I で定義された関数 $f : I \to \mathbb{C}$ を $f = u + iv$ $(u, v : I \to \mathbb{R})$ と表すとき

$$f \text{ は区分的に連続} \iff u, v \text{ はどちらも区分的に連続}$$

が成り立つことを示せ。

問題 2.2. 有界閉区間 I で定義された関数 $f : I \to \mathbb{C}$ に対して、関数 $\bar{f} : I \to \mathbb{C}$ を

$$\bar{f}(t) = \overline{f(t)} \qquad (t \in I)$$

により定義する。このとき

$$f \text{ は区分的に連続} \iff \bar{f} \text{ は区分的に連続}$$

が成り立つことを示せ。

問題 2.3. 有界閉区間 I で定義された関数 $f : I \to \mathbb{C}$ に対して、関数 $|f| : I \to \mathbb{R}$ を

$$|f|(t) = |f(t)| \qquad (t \in I)$$

により定義する。このとき

$$f \text{ は区分的に連続} \implies |f| \text{ は区分的に連続}$$

が成り立つことを示せ。また、この逆は成り立たないことを例を挙げることにより示せ。

問題 2.4. 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

(i) 関数 $f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ がそれぞれ

$$f_-(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t - h), \qquad f_+(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t + h) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義されることを示せ。

(ii) 関数 $f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ はどちらも任意の有界閉区間で区分的に連続であることを示せ。

問題 2.5. 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、関数 $f_D : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f_D(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(t - h) + f(t + h)}{2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義する。このとき

$$f_D = \frac{1}{2}(f_- + f_+)$$

が成り立つことを示せ。

§3. フーリエ級数の計算例

ここでは関数 f のフーリエ級数 $\tilde{f}$ の計算例をいくつか紹介する。

例 3. 周期 2π をもつ周期関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (-\pi \leqq t < 0 \text{ のとき}) \\ \\ 1 & (0 \leqq t < \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ係数は、定数 $k\in\mathbb{Z}$ に対し

$$a_0=1, \qquad a_k=0 \quad (k\neq 0)$$

$$b_k=0 \quad (k \text{ は偶数}), \qquad b_k=\frac{2}{k\pi} \quad (k \text{ は奇数})$$

と表される。

(ii) 関数 f のフーリエ級数は

$$\tilde{f}(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$

となる。

(iii) $\tilde{f}(-\pi)=\tilde{f}(0)=\dfrac{1}{2}$ となる。よって $f\neq\tilde{f}$ が解る。

注意. これだけでは関数 f のフーリエ級数 $\tilde{f}(t)$ がどのような点 $t\in\mathbb{R}$ において収束するのかは解らない。

例 4. 周期 2π をもつ周期関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t)=t \qquad (-\pi \leqq t < \pi)$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ係数は、定数 $k\in\mathbb{Z}$ に対し

$$a_k=0, \qquad b_0=0, \qquad b_k=(-1)^{k+1}\frac{2}{k} \quad (k\neq 0)$$

と表される。

(ii) 関数 f のフーリエ級数は

$$\tilde{f}(t)=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt$$

となる。

(iii) $\tilde{f}(-\pi)=\tilde{f}(0)=0$ となる。よって $f\neq\tilde{f}$ が解る。

注意. これだけでは関数 f のフーリエ級数 $\tilde{f}(t)$ がどのような点 $t\in\mathbb{R}$ において収束するのかは解らない。

例 5. 周期 2π をもつ周期関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t)=t^2 \qquad (-\pi \leqq t < \pi)$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ係数は、定数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2, \qquad a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2} \quad (k \neq 0), \qquad b_k = 0$$

と表される。

(ii) 関数 f のフーリエ級数は

$$\tilde{f}(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt$$

となる。

(iii) 関数 f のフーリエ級数 $\tilde{f}(t)$ はすべての点 $t \in \mathbb{R}$ において絶対収束する。従って、関数 $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が定義されて、周期 2π をもつ連続関数となる。

注意. これだけでは $f = \tilde{f}$ が成り立つか否かは解らない。

例 6. 周期 2π をもつ連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ で f のフーリエ級数 $\tilde{f}(t)$ が点 $t = 0$ において発散するものが存在する。このとき

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| = +\infty, \qquad f \neq \tilde{f}$$

となることも解る。

注意. このような関数の具体例はデュボア-レイモン (Du Bois-Reymond) により与えられた。ここでは関数 f の具体的な形を書き表すことは省略する。

フーリエ係数 $a_k,\, b_k,\, c_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ が関数 f より定義されたものであることを明示したいときは

$$a_k = a_k(f), \qquad b_k = b_k(f), \qquad c_k = c_k(f) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

などと表す。

補題 7. 周期 2π をもつ周期関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

(i) f が C^1 級であれば

$$c_k(f') = ik\, c_k(f) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ。

(ii) f が連続で $c_0(f) = 0$ であると仮定する。このとき、関数 f の任意の原始関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は周期 2π をもつ。従って、周期 2π をもち $c_0(F) = 0$ となる f の原始関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が唯ひとつ存在する。

例 7. 任意の整数 $r \geqq 0$ に対して、周期 2π をもつ C^r 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ で

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_{-k}| = +\infty \quad \text{または} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_k| = +\infty$$

となるものが存在する。

補題 8. 任意の整数 $r \geqq 0$ に対して、周期 2π をもつ C^{r+2} 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のフーリエ係数 $a_k,\, b_k,\, c_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ は条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |a_k| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |b_k| < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_{-k}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_k| < +\infty$$

を満たす。

注意. 例 7 は補題 8 で関数 f を C^r 級に一般化することはできないことを示している。即ち、次の命題

「任意の整数 $r \geqq 0$ に対して、周期 2π をもつ C^r 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のフーリエ係数 a_k, b_k, c_k $(k \in \mathbb{Z})$ は条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |a_k| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |b_k| < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_{-k}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_k| < +\infty$$

を満たす」

の反例を与えている。

§3 の問題

問題 3.1. 例 3, 例 4 で定義された関数 f のフーリエ級数 $\tilde{f}(t)$ は点 $t = \pm\dfrac{\pi}{2}$ において絶対収束しないことを示せ。

問題 3.2. 例 3, 例 4, 例 5 で定義された関数 f のフーリエ係数 c_k $(k \in \mathbb{Z})$ を求め、フーリエ級数

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt}$$

を具体的に表せ。

§4. フーリエ級数の収束定理

ここでは、周期 2π をもち区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して、フーリエ級数 $\tilde{f}(t)$ がすべての点 $t\in\mathbb{R}$ において収束するための十分条件と $f=\tilde{f}$ が成り立つための十分条件を紹介する。

定義 3. $I=[a,b]$ を有界閉区間とする。

(i) 関数 $f:I\to\mathbb{C}$ は、有限個の点を除いて C^1 級で任意の点 $t\in(a,b]$ に対して片側極限値

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(t-h), \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(t-h) \ \in\mathbb{C}$$

が存在し任意の点 $t\in[a,b)$ に対して片側極限値

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(t+h), \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(t+h) \ \in\mathbb{C}$$

が存在するとき、区分的に滑らかであるといわれる。

(ii) 区分的に滑らかな関数 $f:I\to\mathbb{C}$ に対して、関数

$$f_- : (a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f'_- : (a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f_+ : [a,b) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f'_+ : [a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$$

をそれぞれ

$$f_-(t)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(t-h), \qquad f'_-(t)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(t-h) \qquad (a<t\leqq b)$$
$$f_+(t)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(t+h), \qquad f'_+(t)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(t+h) \qquad (a\leqq t<b)$$

により定義する。

例 8. 連続関数と区分的に滑らかな関数を比較する。

(i) 例 3, 例 4 で定義された関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかであるが連続ではない。

(ii) 区間 $[-1,1]$ を定義域とする関数 $f(t)=\sqrt{1-t^2}$ は連続であるが区分的に滑らかではない。

補題 9. $I=[a,b]$ を有界閉区間とする。

(i) 区分的に滑らかな関数 $f:I\to\mathbb{C}$ は区分的に連続である。

(ii) C^1 級関数 $f:I\to\mathbb{C}$ は区分的に滑らかであり

$$a<t\leqq b \implies f_-(t)=f(t),\ f'_-(t)=f'(t)$$
$$a\leqq t<b \implies f_+(t)=f(t),\ f'_+(t)=f'(t)$$

が成り立つ。

(iii) 区分的に滑らかな関数 $f:I\to\mathbb{C}$ に対して

$$a<t\leqq b \implies \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t-h)-f_-(t)}{-h}=f'_-(t)$$
$$a\leqq t<b \implies \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t+h)-f_+(t)}{h}=f'_+(t)$$

が成り立つ。

系. p を正の定数とし、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 $2p$ をもち区間 $[-p,p]$ で区分的に滑らかであると仮定する。このとき、関数 f は任意の有界閉区間で区分的に滑らかとなる。さらに、定義 3, (ii) で定められた関数 f_-, f_+ は関数

$$f_- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

に拡張され、周期 $2p$ をもち区間 $[-p,p]$ で区分的に滑らかとなる。同様に、関数

$$f'_- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f'_+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

も定義され、周期 $2p$ をもち区間 $[-p,p]$ で区分的に連続となる。

以上の記号のもと、次が成り立つ。

定理 1. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 2π をもち区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかであると仮定する。このとき

$$\tilde{f} = \frac{1}{2}(f_- + f_+)$$

が成り立つ。即ち、関数 f のフーリエ級数 $\tilde{f}(t)$ はすべての点 $t\in\mathbb{R}$ において収束し

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\big(f_-(t) + f_+(t)\big)$$

が成り立つ。

系 1. 周期 2π をもち区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかな関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が連続であれば $f=\tilde{f}$ が成り立つ。即ち、任意の点 $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt}$$

が成り立つ。

系 2. 周期 2π をもつ C^1 級関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して $f=\tilde{f}$ が成り立つ。即ち、任意の点 $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt}$$

が成り立つ。

系 3. 周期 2π をもつ連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ のフーリエ係数を $c_k = c_k(f)$ $(k\in\mathbb{Z})$ と書く。このとき

(i) 関数 f が C^2 級であれば

$$f'(t) = i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kc_k\, e^{ikt} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

が成り立つ。

(ii) 関数 f の原始関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ はすべて

$$F(t) = c + c_0 t - i\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty}\frac{c_k}{k}e^{ikt} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

と表される。ここで $c\in\mathbb{C}$ は任意定数である。

注意. (i) 定理 1 をフーリエ級数の収束定理という。

(ii) 定理 1 の系 3, (i) は項別微分が可能であることを示している。ここで、関数 f を C^1 級に一般化することはできない。

(iii) 定理 1 の系 3, (ii) は項別積分が可能であることを示している。これより補題 7, (ii) の前半を導くこともできる。

(iv) 定理 1, 系 1, 系 2, 系 3 は次の §5 で証明する。

§4 の問題

問題 4.1. 有界閉区間 I で定義された関数 $f,\, g : I \to \mathbb{C}$ がどちらも区分的に滑らかであれば、和 $f+g : I \to \mathbb{C}$ も積 $fg : I \to \mathbb{C}$ も区分的に滑らかとなり

$$(f+g)'_- = f'_- + g'_-, \qquad (f+g)'_+ = f'_+ + g'_+$$
$$(fg)'_- = f'_- g_- + f_- g'_-, \qquad (fg)'_+ = f'_+ g_+ + f_+ g'_+$$

が成り立つことを示せ。

問題 4.2. 有界閉区間 I で定義された関数 $f : I \to \mathbb{C}$ を $f = u + iv$ $(u, v : I \to \mathbb{R})$ と表すとき

$$f \text{ は区分的に滑らか} \iff u, v \text{ はどちらも区分的に滑らか}$$

が成り立つことを示せ。

注意. 問題 4.1, 問題 4.2 は定理 1, 系 1, 系 2, 系 3 を用いることなく証明できる。以下の問題では定理 1, 系 1, 系 2, 系 3 を用いてよい。

問題 4.3. 関数 $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ がどちらも周期 2π をもち区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかであると仮定する。このとき

$$\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$$

が成り立つことを示せ。また

$$\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$$

は成り立たないことを例を挙げることにより示せ。

問題 4.4. 周期 2π をもつ連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のフーリエ係数を $a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$ $(k \in \mathbb{Z})$ と書く。このとき次を示せ。

(i) 関数 f が C^2 級であれば

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k b_k \cos kt - k a_k \sin kt) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。

(ii) 関数 f の原始関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ はすべて

$$F(t) = c + \frac{a_0}{2} t - \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{b_k}{k} \cos kt - \frac{a_k}{k} \sin kt \Big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。ここで $c \in \mathbb{C}$ は任意定数である。

§5. 収束定理の証明

ここでは定理 1 とその系を証明する。

補題 10. 負でない整数 n に対して、関数 $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義する。このとき

(i) 関数 D_n は周期 2π をもつ C^∞ 級の偶関数で

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。また

$$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(nt + \frac{1}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} & (t \notin 2\pi\mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ 2n+1 & (t \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表すこともできる。

(ii) 関数 D_n は条件

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$$

を満たす。

注意. 関数 D_n $(n \geqq 0)$ をディリクレ核という。

補題 11. 周期 2π をもち区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と負でない整数 n に対して、f のフーリエ級数の第 n 部分和 S_n は

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)D_n(x)\,dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。また

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t-x)D_n(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x)D_n(x)\,dx$$

と表すこともできる。

補題 12. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が周期 2π をもち区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかであれば、任意の点 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \frac{1}{2}\big(f_-(t) + f_+(t)\big)$$

が成り立つ。

証明. n を負でない整数とし、関数 $R_n,\ I_n,\ J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を点 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$R_n(t) = \frac{1}{2}\big(f_-(t) + f_+(t)\big) - S_n(t)$$

$$I_n(t) = \frac{1}{2}f_-(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t-x)D_n(x)\,dx$$

$$J_n(t) = \frac{1}{2} f_+(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(t+x) D_n(x)\,dx$$

とおくことにより定める。このとき

Step 1. $R_n(t) = I_n(t) + J_n(t)$ が成り立つ。

Step 2. $I_n(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{f_-(t) - f(t-x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \sin(nx + \tfrac{1}{2}x)\,dx$ と表される。

Step 3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(t) = 0$ が成り立つ。

Step 4. $J_n(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{f_+(t) - f(t+x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \sin(nx + \tfrac{1}{2}x)\,dx$ と表される。

Step 5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n(t) = 0$ が成り立つ。

Step 6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(t) = 0$ が成り立つ。

以上により

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \frac{1}{2}\big(f_-(t) + f_+(t)\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が示された。即ち、補題 12 の証明が完了した。 □

定理 1 の証明：補題 12 と

$$\tilde{f}(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

より

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\big(f_-(t) + f_+(t)\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が解る。即ち、定理 1 が証明された。 □

系 1 の証明 : 関数 f が連続であれば $f_- = f_+ = f$ となるから、定理 1 より

$$\tilde{f} = \frac{1}{2}(f_- + f_+) = f$$

が解る。 □

系 2 の証明：関数 f が C^1 級であれば、連続かつ区分的に滑らかとなるから、系 1 より $f = \tilde{f}$ が解る。 □

系 3 の証明：(i) 関数 f' は C^1 級となるから、補題 7, (i) と系 2 より

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f')\,e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik\,c_k(f)\,e^{ikt} = i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kc_k\,e^{ikt}$$

が解る。

(ii) 関数 F に対して、関数 $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$G(t) = F(t) - c_0 t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定めれば、G は周期 2π をもつ C^1 級関数で

$$k \neq 0 \implies c_k(G) = -\frac{i}{k} c_k$$

が成り立つ。従って、系 2 より

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(G) e^{ikt} = c_0(G) - i \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{c_k}{k} e^{ikt}$$

が解る。ここで $c = c_0(G)$ とおけば

$$F(t) = c + c_0 t - i \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{c_k}{k} e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

となる。 □

§6. 収束定理の応用

ここでは定理 1 の応用をいくつか紹介する。

補題 13. 周期 2π をもち区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかな関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が条件 $2f = f_- + f_+$ を満たすと仮定する。このとき、次の 3 条件：

(a) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

(b) 任意の整数 $k \geqq 0$ に対して $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

(c) 任意の整数 $k \geqq 0$ に対して $c_{-k} = \overline{c_k}$

は同値である。

例 9. 周期 2π をもつ周期関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq t < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 \leqq t < \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定めれば、関数 f のフーリエ級数が

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

と表されることを例 3, (ii) で示した。ここで $t = \frac{\pi}{2}$ を代入すれば、定理 1 より

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

が成り立つことが解る。これをライプニッツの公式という。

例 10. 周期 2π をもつ周期関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f(t) = t^2 \qquad (-\pi \leqq t < \pi)$$

により定めれば、関数 f のフーリエ級数が

$$\tilde{f}(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt$$

と表されることを例 5, (ii) で示した。

(i) $t = \pi$, $t = 0$ を代入すれば、定理 1 より

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

が成り立つことが解る。さらに

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

となることも解る。

(ii) 例 2 より $c_0 = \frac{1}{3}\pi^2$, $c_k = (-1)^k \frac{2}{k^2}$ $(k \neq 0)$ が解る。従って、問題 1.2 と定理 1 の系 1 より

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

も解る。

補題 14. 整数 k に対して、関数 $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$e_k(t) = e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義する。このとき、集合 $\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}$ 上線形独立であり

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times \mid f \text{ は周期 } 2\pi \text{をもつ連続な群準同形}\} = \{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

が成り立つ。

補題 15. 周期 2π をもち区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続で条件 $2f = f_- + f_+$ を満たす関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の全体を V と表し、周期 2π をもつ C^∞ 級関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の全体を W と表す。このとき

(i) V は $\mathbb{C}$ 上の線形空間であり、W は V の部分空間である。

(ii) 写像

$$\langle\ ,\ \rangle : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt \end{array}$$

は V のエルミート内積となり、集合 $\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ は正規直交系となる。

(iii) 写像

$$T : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & W \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ f & \longmapsto & -if' \end{array}$$

は W のエルミート変換となる。

(iv) エルミート変換 T の固有値は整数であり、固有値 $k \in \mathbb{Z}$ に対する T の固有空間は $\mathbb{C}e_k$ である。

定理 2. 周期 2π をもつ周期関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に関する次の 2 条件：

(a) f は C^∞ 級である

(b) f は区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかかつ $2f = f_- + f_+$ であり、f のフーリエ係数 c_k $(k \in \mathbb{Z})$ は任意の自然数 r に対して条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_{-k}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_k| < +\infty$$

を満たす

は同値である。このとき、関数 f は

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。

これまでの結果をまとめておこう。

関数空間　周期 2π をもち区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の全体を $\mathcal{F}_{-1}$ と表す。また、負でない整数 r に対して、周期 2π をもつ C^r 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の全体を $\mathcal{F}_r$ と表し

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_r$$

とおく。このとき

$$\mathcal{F}_\infty \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathcal{F}_2 \subsetneqq \mathcal{F}_1 \subsetneqq \mathcal{F}_0 \subsetneqq \mathcal{F}_{-1}$$

となる。

数列空間　条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_{-k}|^2 < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty$$

を満たす複素数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ の全体を $\mathcal{C}_{-1}$ と表す。また、負でない整数 r に対して、条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_{-k}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r |c_k| < +\infty$$

を満たす複素数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ の全体を $\mathcal{C}_r$ と表し

$$\mathcal{C}_\infty = \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathcal{C}_r$$

とおく。このとき

$$\mathcal{C}_\infty \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathcal{C}_2 \subsetneqq \mathcal{C}_1 \subsetneqq \mathcal{C}_0 \subsetneqq \mathcal{C}_{-1}$$

となる。

線形写像　関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に f のフーリエ係数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ を対応させる写像を Φ と表す。また、複素数列 $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ に (2) により定義される関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を対応させる写像を Φ^* と表す。

まとめ　これまでの結果を上記の記号を用いて記述すれば

(i)　写像 $\Phi^* : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{F}_0$ が定義されて

$$\Phi \circ \Phi^* = I_{\mathcal{C}_0}$$

が成り立つ（補題 3）。従って $\Phi^* : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{F}_0$ は単射である。さらに

$$\mathcal{C}_r \cong \Phi^*(\mathcal{C}_r) \subset \mathcal{F}_r \qquad (r \in \mathbb{Z},\ r \geqq 0)$$

も解る（補題 4）。

(ii)　写像 $\Phi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{C}_{-1}$ が定義されて

$$\Phi^* \circ \Phi = I_{\mathcal{F}_1}$$

が成り立つ（定理 1 の系 2）。従って $\Phi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{C}_{-1}$ は単射である。さらに

$$\mathcal{F}_{r+2} \cong \Phi(\mathcal{F}_{r+2}) \subset \mathcal{C}_r \qquad (r \in \mathbb{Z},\ r \geqq 0)$$

も解る（補題 8）。

(iii) 写像 $\Phi : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{C}_{-1}$ は単射である（パーセバルの等式）。しかし Φ^* は全単射 $\Phi : \mathcal{F}_0 \to \Phi(\mathcal{F}_0)$ の逆写像ではない（例 6）。また

$$\Phi(\mathcal{F}_r) \subset \mathcal{C}_r \qquad (r \in \mathbb{Z},\ r \geqq 0)$$

は成り立たない（例 7）。

(iv) 写像 $\Phi : \mathcal{F}_{-1} \to \mathcal{C}_{-1}$ は定義される（補題 6 の系）。しかし、写像 $\Phi^* : \mathcal{C}_{-1} \to \mathcal{F}_{-1}$ は定義されない（例 1）。

(v) 線形写像

$$\Phi\ :\ \mathcal{F}_\infty\ \longrightarrow\ \mathcal{C}_\infty$$

は同形であり

$$\Phi^*\ :\ \mathcal{C}_\infty\ \longrightarrow\ \mathcal{F}_\infty$$

は Φ の逆写像となる（定理 2）。即ち

$$\Phi^{-1} =\ \Phi^*\ :\ \mathcal{C}_\infty\ \longrightarrow\ \mathcal{F}_\infty$$

が成り立つ。また、写像 Φ, Φ^* は補題 15, (ii) で定められた $\mathcal{F}_\infty$ の内積と $\mathcal{C}_\infty$ の通常の内積を保つ（問題 1.2）。

§7. 絶対可積分関数

ここでは絶対可積分関数の定義と基本的な性質をまとめる。

補題 16. 正の定数 R を任意にとり固定する。区分的に連続な関数 $f : [-R, R] \to \mathbb{C}$ に対して

$$c_k = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f(t)\, e^{-\frac{ik\pi t}{R}}\, dt \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

とおき、負でない整数 n に対して

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{\frac{ik\pi t}{R}} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と定めれば

$$\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |f(t) - S_n(t)|^2\, dt = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |f(t)|^2\, dt - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

が成り立つ。従って、不等式

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leqq \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |f(t)|^2\, dt$$

が成立することも解る。

系. 区分的に連続な関数 $f : [-R, R] \to \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{k\to+\infty} c_{-k} = \lim_{k\to+\infty} c_k = 0$$

が成り立つ。従って

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\cos\frac{k\pi t}{R}\, dt = \lim_{k\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\sin\frac{k\pi t}{R}\, dt = 0$$

が成り立つことも解る。

注意. 補題 16 とその系で $R = \pi$ とおけば、これらの結果は補題 6 とその系に一致する。即ち、ベッセルの不等式とリーマン・ルベーグの補題が一般化された。従って、補題 16 の c_k $(k \in \mathbb{Z})$ は区間 $[-R, R]$ で定義された関数 f のフーリエ係数であると考えることもできる。

定義 4. 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は、条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$$

を満足するとき、絶対可積分であるといわれる。

例 11. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & (|t| \geqq 1 \text{ のとき}) \\ -t^3 + 2t & (|t| \leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき、関数 f は C^1 級でありかつ絶対可積分ではないが、導関数 $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は絶対可積分である。

補題 17. 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が絶対可積分であると仮定する。このとき

(i) 関数 f は任意の有界閉区間で積分可能で、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)\,dt$$

は収束する。

(ii) 関数 f に対して、関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が広義積分

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,dt \qquad (x\in\mathbb{R})$$

により定義される。このとき、関数 F は有界かつ連続となる。

(iii) 関数 f に対して

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{ixt}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,dt = 0$$

が成り立つ。従って

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos xt\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt = 0$$

が成り立つことも解る。

注意. (i) 補題 6 の系と同様に、補題 17, (iii) もリーマン・ルベーグの補題と呼ばれる。

(ii) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が絶対可積分ではなくても、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

が収束することはある。例 12 を参照のこと。

例 12. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & (t\neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (t=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき、関数 f は絶対可積分ではないが

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \pi$$

が成り立つ。

§8. フーリエ変換の定義

ここでは任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ のフーリエ変換とフーリエ逆変換を定義する。

定義 5. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は任意の有界閉区間で区分的に連続であると仮定する。

(i) 関数 f に対して、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt$$

が任意の点 $x\in\mathbb{R}$ において収束するならば、関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt \qquad (x\in\mathbb{R})$$

により定義される。このとき、関数 F を f のフーリエ変換といい $F=\mathscr{F}(f)$ と表す。即ち、関数 f に関数 F を対応させる写像 $\mathscr{F}$ が定まる。

(ii) 関数 f に対して、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt$$

が任意の点 $x\in\mathbb{R}$ において収束するならば、関数 $F^{-}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が

$$F^{-}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt \qquad (x\in\mathbb{R})$$

により定義される。このとき、関数 F^{-} を f のフーリエ逆変換といい $F^{-}=\mathscr{F}^{-}(f)$ と表す。即ち、関数 f に関数 F^{-} を対応させる写像 $\mathscr{F}^{-}$ が定まる。

注意. (i) 関数 f のフーリエ変換 F は $\mathscr{F}(f)$ 以外にも

$$\mathscr{F}[f],\quad \mathscr{F}[f(t)],\quad \mathscr{F}[f](x),\quad \mathscr{F}\left[f(t)\right](x)$$

などと表されることもある。同様に、関数 f のフーリエ逆変換 F^{-} は $\mathscr{F}^{-}(f)$ 以外にも

$$\mathscr{F}^{-}[f],\quad \mathscr{F}^{-}[f(t)],\quad \mathscr{F}^{-}[f](x),\quad \mathscr{F}^{-}\left[f(t)\right](x)$$

などと表されることもある。

(ii) 関数 f のフーリエ変換やフーリエ逆変換は定義されないこともある。例 14 を参照のこと。

例 13. 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して

$$F=\mathscr{F}(f) \text{ が定義される } \iff F^{-}=\mathscr{F}^{-}(f) \text{ が定義される}$$

が成り立つ。また、これらが定義されるならば

$$\mathscr{F}^{-}(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(f)(-x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\mathscr{F}(f)(x)=2\pi\mathscr{F}^{-}(f)(-x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

となる。

例 **14.** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

(i) $f(t) = 0$ $(t < 0)$, $f(t) = 1$ $(t \geqq 0)$ と定める。このとき、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}\, dt$$

はすべての点 $x \in \mathbb{R}$ において発散する。従って、関数 f のフーリエ変換 $F = \mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ もフーリエ逆変換 $F^{-} = \mathscr{F}^{-}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ も定義することはできない。

(ii) $f(t) = 0$ $(t < 1)$, $f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \geqq 1)$ と定める。このとき、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-ixt}\, dt$$

は点 $x = 0$ において発散する。従って、関数 f のフーリエ変換 $F = \mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ もフーリエ逆変換 $F^{-} = \mathscr{F}^{-}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ も定義することはできない。

(iii) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$, $f(t) = 1$ $(t = 0)$ と定める。このとき、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-ixt}\, dt$$

は点 $x = \pm 1$ において発散する。従って、関数 f のフーリエ変換 $F = \mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ もフーリエ逆変換 $F^{-} = \mathscr{F}^{-}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ も定義することはできない。

補題 **18.** 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が絶対可積分であると仮定する。このとき

(i) 関数 f のフーリエ変換 $F = \mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が定義され、有界かつ連続となる。さらに

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$$

が成り立つ。

(ii) 関数 f のフーリエ逆変換 $F^{-} = \mathscr{F}^{-}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が定義され、有界かつ連続となる。さらに

$$\lim_{x \to -\infty} F^{-}(x) = \lim_{x \to +\infty} F^{-}(x) = 0$$

が成り立つ。

注意. 任意の有界閉区間で区分的に滑らかな関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が絶対可積分であっても、f のフーリエ変換 $F = \mathscr{F}(f)$ が絶対可積分にはならないこともある。例 15 を参照のこと。

例 **15.** 正の定数 R を固定して、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leqq R \text{ のとき}) \\ 0 & (|t| > R \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき

(i) 関数 f は任意の有界閉区間で区分的に滑らかでありかつ絶対可積分である。

(ii) 関数 f のフーリエ変換 $F = \mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin Rx}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2R & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表される。従って、例 12 より、関数 F は絶対可積分ではないことが解る。

次に、フーリエ級数の理論との類似をより強くするために、定義 5, (ii) のフーリエ逆変換の定義を修正する。

任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、極限値

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(t)\, e^{ixt}\, dt$$

が任意の点 $x \in \mathbb{R}$ において存在するならば、関数 $F^* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$$F^*(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} f(t)\, e^{ixt}\, dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

により定義される。このとき、すでに定義 5, (ii) で定めた関数 F^- と同様に、関数 F^* も f のフーリエ逆変換と呼び $F^* = \mathscr{F}^*(f)$ と表す。即ち、関数 f に関数 F^* を対応させる写像 $\mathscr{F}^*$ が定まる。

例 16. 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

$$F^- = \mathscr{F}^-(f) \text{ が定義される} \implies F^* = \mathscr{F}^*(f) \text{ が定義される}$$

が成り立つ。また、関数 $F^- = \mathscr{F}^-(f)$ が定義されるならば

$$\mathscr{F}^*(f) = \mathscr{F}^-(f)$$

となる。

注意. 例 16 前半の逆は成り立たない。例 23 を参照のこと。

以下では、任意の有界閉区間で区分的に連続でありかつ絶対可積分である関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のフーリエ変換のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f)) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ について考える。

定義より、関数 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f)) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \mathscr{F}(f)(x)\, e^{itx}\, dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{ix(t-y)}\, dy \Big) dx \end{aligned}$$

と表される。そこで、負でない整数 n に対して

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \mathscr{F}(f)(x)\, e^{itx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{ix(t-y)}\, dy \Big) dx \end{aligned}$$

とおき、関数 f のフーリエ変換のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))$ の第 n 部分和という。このとき

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t)$$

が成り立つ。

注意． 例 15 において、フーリエ変換が絶対可積分にはならない例が示された。このような場合、極限値

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{ix(t-y)}\, dy\Big)dx$$

は存在しないこともある。いいかえれば、任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 f が絶対可積分であっても、f のフーリエ変換のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f)) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が定義されるとは限らない。従って「どのような関数 f に対して関数 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f)) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が定義されるのか、またどのような関数 f に対して $f = \mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))$ となるのか」という問題が生ずる。この問題を解決することを以下の目標とする。

即ち、次の課題の解決が本稿の目標のひとつである。

課題 2． 任意の有界閉区間で区分的に連続でありかつ絶対可積分である関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

(i) 関数 f のフーリエ変換のフーリエ逆変換

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{ix(t-y)}\, dy\Big)dx$$

がすべての点 $t \in \mathbb{R}$ において収束するための条件を求めよ。

(ii) 関数 f が $f = \mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))$ と表されるための条件を求めよ。即ち、すべての点 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{ix(t-y)}\, dy\Big)dx$$

が成り立つための条件を求めよ。

§9. フーリエ変換の計算例

ここでは関数 f のフーリエ変換とフーリエ逆変換の計算例をいくつか紹介する。

例 17. 正の定数 a を固定して、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0 \text{ のとき}) \\ e^{-at} & (t\geqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ変換 $F=\mathscr{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は定義され

$$F(x)=\frac{1}{a+ix} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

と表される。

(ii) 関数 f のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^-(f),\ \mathscr{F}^*(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ はどちらも定義され

$$\mathscr{F}^-(f)(x)=\mathscr{F}^*(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{a-ix} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

と表される。

例 18. 正の定数 a を固定して、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t)=e^{-a|t|} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ変換 $F=\mathscr{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は定義され

$$F(x)=\frac{2a}{x^2+a^2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

と表される。

(ii) 関数 f のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^-(f),\ \mathscr{F}^*(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ はどちらも定義され

$$\mathscr{F}^-(f)(x)=\mathscr{F}^*(f)(x)=\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

と表される。

例 19. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t)=\begin{cases} 1-t^2 & (|t|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|t|>1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ変換 $F=\mathscr{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は定義され

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x^3}(\sin x-x\cos x) & (x\neq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{4}{3} & (x=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表される。

(ii) 関数 f のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^-(f)$, $\mathscr{F}^*(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ はどちらも定義され

$$\mathscr{F}^-(f)(x) = \mathscr{F}^*(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi x^3}(\sin x - x\cos x) & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{2}{3\pi} & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表される。

補題 19. r を自然数とする。関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が C^r 級で、任意の整数 m $(0 \leqq m \leqq r-1)$ に対して

$$\lim_{t \to -\infty} f^{(m)}(t) = \lim_{t \to +\infty} f^{(m)}(t) = 0$$

が成り立つと仮定する。このとき、関数 f のフーリエ変換 $\mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が定義されれば

(i) 関数 $f^{(r)}$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}(f^{(r)}) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ もフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^-(f^{(r)})$, $\mathscr{F}^*(f^{(r)}) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ も定義され

$$\mathscr{F}(f^{(r)})(x) = (ix)^r \mathscr{F}(f)(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\mathscr{F}^-(f^{(r)})(x) = (-ix)^r \mathscr{F}^-(f)(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\mathscr{F}^*(f^{(r)})(x) = (-ix)^r \mathscr{F}^*(f)(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。

(ii) さらに、関数 $f^{(r)} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が絶対可積分であれば

$$\lim_{x \to -\infty} x^r \mathscr{F}(f)(x) = \lim_{x \to +\infty} x^r \mathscr{F}(f)(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^r \mathscr{F}^-(f)(x) = \lim_{x \to +\infty} x^r \mathscr{F}^-(f)(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^r \mathscr{F}^*(f)(x) = \lim_{x \to +\infty} x^r \mathscr{F}^*(f)(x) = 0$$

も成り立つ。

例 20. 例 11 で定義された関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のフーリエ変換 $F = \mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は定義されないが、導関数 f' のフーリエ変換 $F_1 = \mathscr{F}(f') : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は定義される。

補題 20. r を自然数とする。連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r f(t)|\, dt < +\infty$$

を満たすと仮定する。このとき

(i) 関数 f は絶対可積分である。

(ii) 関数 f のフーリエ変換 $\mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ とフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^-(f)$, $\mathscr{F}^*(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ はどれも C^r 級で

$$(\mathscr{F}(f))^{(r)}(x) = (-i)^r \mathscr{F}(t^r f(t))(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$(\mathscr{F}^-(f))^{(r)}(x) = i^r \mathscr{F}^-(t^r f(t))(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$(\mathscr{F}^*(f))^{(r)}(x) = i^r \mathscr{F}^*(t^r f(t))(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。

例 21. 正の定数 a を固定して、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t)=e^{-at^2} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ変換 $F=\mathscr{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は C^1 級で、微分方程式

$$F'(x)+\frac{x}{2a}F(x)=0$$

の解となる。

(ii) 関数 f のフーリエ変換 F は

$$F(x)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\frac{x^2}{4a}} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

と表される。

§10. フーリエ変換の収束定理

ここでは、任意の有界閉区間で区分的に連続でありかつ絶対可積分である関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して、フーリエ変換のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t)$ がすべての点 $t\in\mathbb{R}$ において収束するための十分条件と $f=\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))$ が成り立つための十分条件を紹介する。

定理 3. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が任意の有界閉区間で区分的に滑らかでありかつ絶対可積分であると仮定する。このとき

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))=\frac{1}{2}(f_-+f_+)$$

が成り立つ。即ち、関数 f のフーリエ変換のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t)$ はすべての点 $t\in\mathbb{R}$ において収束し

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t)=\frac{1}{2}\big(f_-(t)+f_+(t)\big)$$

が成り立つ。

系 1. 任意の有界閉区間で区分的に滑らかでありかつ絶対可積分である関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が連続であれば $f=\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))$ が成り立つ。即ち、任意の点 $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(t)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,e^{ix(t-y)}\,dy\Big)dx$$

が成り立つ。

系 2. C^1 級関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が絶対可積分であれば $f=\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))$ が成り立つ。即ち、任意の点 $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(t)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,e^{ix(t-y)}\,dy\Big)dx$$

が成り立つ。

注意. (i) 定理 3 をフーリエ変換の収束定理という。

(ii) 定理 3, 系 1, 系 2 は次の §11 で証明する。

§11. 収束定理の証明

ここでは定理 3 とその系を証明する。

補題 21. 負でない整数 n に対して、関数 $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\rho_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^n \cos tx \, dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義する。このとき

(i) 関数 ρ_n は有界かつ C^∞ 級の偶関数で

$$\rho_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{itx} \, dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。また

$$\rho_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin nt}{\pi t} & (t \neq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{n}{\pi} & (t = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表すこともできる。

(ii) $n \geqq 1$ であれば、関数 ρ_n は条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) \, dt = 1$$

を満たす。

注意. 関数 ρ_n $(n \geqq 0)$ はディリクレ核 D_n $(n \geqq 0)$ の類似である。

補題 22. 任意の有界閉区間で区分的に連続でありかつ絶対可積分である関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と負でない整数 n に対して、f のフーリエ変換のフーリエ逆変換の第 n 部分和 S_n は

$$S_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\rho_n(x) \, dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。また

$$S_n(t) = \int_0^{+\infty} \bigl(f(t-x) + f(t+x)\bigr)\rho_n(x) \, dx$$

と表すこともできる。

補題 23. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が任意の有界閉区間で区分的に滑らかでありかつ絶対可積分であれば、任意の点 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(t) = \frac{1}{2}\bigl(f_-(t) + f_+(t)\bigr)$$

が成り立つ。

証明. n を負でない整数とし、関数 $R_n, I_n, J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を点 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$R_n(t) = \frac{1}{2}\bigl(f_-(t) + f_+(t)\bigr) - S_n(t)$$

$$I_n(t) = \frac{1}{2} f_-(t) - \int_0^{+\infty} f(t-x)\rho_n(x) \, dx$$

$$J_n(t) = \frac{1}{2}f_+(t) - \int_0^{+\infty} f(t+x)\rho_n(x)\,dx$$

とおくことにより定める。このとき

Step 1. $R_n(t) = I_n(t) + J_n(t)$ が成り立つ。

Step 2. $I_n(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f_-(t) - f(t-x)}{x} \sin nx\,dx$ と表される。

Step 3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(t) = 0$ が成り立つ。

Step 4. $J_n(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f_+(t) - f(t+x)}{x} \sin nx\,dx$ と表される。

Step 5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n(t) = 0$ が成り立つ。

Step 6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(t) = 0$ が成り立つ。

以上により

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \frac{1}{2}\big(f_-(t) + f_+(t)\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が示された。即ち、補題 23 の証明が完了した。 $\square$

定理 3 の証明 : 補題 23 と

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

より

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t) = \frac{1}{2}\big(f_-(t) + f_+(t)\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が解る。即ち、定理 3 が証明された。 $\square$

系 1 の証明 : 関数 f が連続であれば $f_- = f_+ = f$ となるから、定理 3 より

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f)) = \frac{1}{2}(f_- + f_+) = f$$

が解る。 $\square$

系 2 の証明 : 関数 f が C^1 級であれば、連続かつ区分的に滑らかとなるから、系 1 より $f = \mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))$ が解る。 $\square$

§12. 収束定理の応用

ここでは定理 3 の応用をいくつか紹介する。

補題 24. 任意の有界閉区間で区分的に滑らかでありかつ絶対可積分である関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のフーリエ変換を $F = \mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ と表す。このとき、関数 f が条件 $2f = f_- + f_+$ を満たすならば、次の 2 条件：

(a) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

(b) $F(-x) = \overline{F(x)}$ $(x \in \mathbb{R})$

は同値である。

例 22. 正の定数 R を固定して、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leqq R \text{ のとき}) \\ 0 & (|t| > R \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ変換のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f)) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は定義され

$$\mathscr{F}^*(\mathscr{F}(f))(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < R \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (|t| = R \text{ のとき}) \\ 0 & (|t| > R \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表される。

(ii) 関数 f のフーリエ変換のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^-(\mathscr{F}(f)) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は定義されない。

例 23. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & (t \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (t = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき

(i) 関数 f のフーリエ逆変換 $F^* = \mathscr{F}^*(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は定義され

$$\mathscr{F}^*(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (|x| < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{4} & (|x| = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表される。

(ii) 関数 f のフーリエ逆変換 $F^- = \mathscr{F}^-(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は定義されない。

注意. 例 23 は例 16 前半の逆は成り立たないことを示している。

定義 6. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は、C^∞ 級でありかつ任意の整数 $m,\, n \geqq 0$ に対して

$$\lim_{t \to -\infty} t^m f^{(n)}(t) = \lim_{t \to +\infty} t^m f^{(n)}(t) = 0$$

が成り立つとき、急減少であるといわれる。急減少関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の全体をシュワルツ空間と呼び $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ と表す。

注意. シュワルツ空間 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の線形空間となる。

例 24. 正の定数 a を固定して、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(t)=e^{-at^2} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

により定義すれば、f は急減少関数となる。

補題 25. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が急減少であると仮定する。このとき

(i) 負でない整数 $k,\ \ell$ に対して関数 $f_{k\ell}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f_{k\ell}(t)=t^k f^{(\ell)}(t) \qquad (t\in\mathbb{R})$$

により定義すれば $f_{k\ell}$ も急減少関数となる。

(ii) 関数 f は有界かつ絶対可積分である。

定理 4. 線形写像

$$\mathscr{F}\ :\ \mathscr{S}\ \longrightarrow\ \mathscr{S}$$

は同形であり

$$\mathscr{F}^{-}\ :\ \mathscr{S}\ \longrightarrow\ \mathscr{S}$$

は $\mathscr{F}$ の逆写像となる。即ち、シュワルツ空間 $\mathscr{S}$ からそれ自身への写像として

$$\mathscr{F}^{-1}=\mathscr{F}^{-}=\mathscr{F}^{*}$$

が成り立つ。

§13. 合成積

ここでは合成積の定義と基本的な性質について述べる。

定義 7. 数列の合成積と関数の合成積を次のように定義する。

(i) 複素数列 $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\beta = (\beta_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ に対して、無限和

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k-\ell}\beta_\ell$$

が任意の点 $k \in \mathbb{Z}$ において収束するならば、数列 $\alpha * \beta = ((\alpha * \beta)_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ が

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k-\ell}\beta_\ell \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

により定義される。このとき、数列 $\alpha * \beta$ を数列 α と β の合成積またはたたみこみという。

(ii) 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,dx$$

が任意の点 $t \in \mathbb{R}$ において収束するならば、関数 $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

により定義される。このとき、関数 $f * g$ を関数 f と g の合成積またはたたみこみという。

注意. 数列の合成積や関数の合成積は定義されないこともある。例 26 を参照のこと。

例 25. 数列の合成積と関数の合成積に関して次が成り立つ。

(i) 複素数列 $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\beta = (\beta_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ に対して

$$\alpha * \beta \text{ が定義される} \iff \beta * \alpha \text{ が定義される}$$

が成り立つ。また、これらが定義されるならば

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha$$

となる。

(ii) 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

$$f * g \text{ が定義される} \iff g * f \text{ が定義される}$$

が成り立つ。また、これらが定義されるならば

$$f * g = g * f$$

となる。

例 26. 数列の合成積と関数の合成積が定義されない例を挙げる。

(i) 複素数列 $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\beta = (\beta_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ を $\alpha_k = \beta_k = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ と定める。このとき、無限和 $\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k-\ell}\beta_\ell$ はすべての点 $k \in \mathbb{Z}$ において発散する。従って、合成積 $\alpha * \beta$ を定義することはできない。

(ii) 関数 $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を $f(t) = g(t) = 1$ $(t \in \mathbb{R})$ と定める。このとき、広義積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\, dx$ はすべての点 $t \in \mathbb{R}$ において発散する。従って、合成積 $f * g$ を定義することはできない。

補題 26. 次が成り立つ。

(i) 複素数列 $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\beta = (\beta_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ が条件

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\beta_k|^2 < +\infty$$

を満たすと仮定する。このとき、無限和 $\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{k-\ell}\beta_\ell|$ は任意の点 $k \in \mathbb{Z}$ において収束する。従って、合成積 $\alpha * \beta$ を定義することができる。また、数列 $\alpha * \beta$ は有界となる。

(ii) 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt < +\infty$$

を満たすと仮定する。このとき、広義積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-x)g(x)|\, dx$ は任意の点 $t \in \mathbb{R}$ において収束する。従って、合成積 $f * g$ を定義することができる。また、関数 $f * g$ は有界となる。

補題 27. 次が成り立つ。

(i) 複素数列 $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ が条件

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < +\infty$$

を満たし、複素数列 $\beta = (\beta_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ が有界であると仮定する。このとき、無限和 $\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{k-\ell}\beta_\ell|$ は任意の点 $k \in \mathbb{Z}$ において収束する。従って、合成積 $\alpha * \beta$ を定義することができる。また、数列 $\alpha * \beta$ は有界となる。

(ii) 任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が絶対可積分であり、任意の有界閉区間で区分的に連続な関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が有界であると仮定する。このとき、広義積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-x)g(x)|\, dx$ は任意の点 $t \in \mathbb{R}$ において収束する。従って、合成積 $f * g$ を定義することができる。また、関数 $f * g$ は有界となる。さらに、関数 g が連続であれば $f * g$ も連続となる。

例 27. テイラー展開可能な関数 $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$, $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$ に対して $a = (a_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, $b = (b_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ とおけば

$$f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a * b)_k t^k$$

が成り立つ。特に、多項式 $f(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$, $g(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ に対して

$$f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{mn} (a * b)_k t^k$$

が成り立つ。

注意. 例 27 は数列 $a=(a_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, $b=(b_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ が補題 26, (i) や補題 27, (i) の条件を満たしていなくても合成積 $a*b$ が定義されることを示している。また、一般に関数の合成積 $f*g$ は定義されない。従って

$$(f*g)(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k t^k$$

は成り立たない。

例 28. 補題 22 の前半を合成積の記号を用いて表せば

$$S_n = f*\rho_n$$

となる。従って、補題 27, (ii) より、関数 $S_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は連続であることも解る。

定理 5. $f,\, g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を連続関数とする。

(i) 関数 $f,\, g$ が周期 2π をもち区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかであると仮定する。このとき、関数 $f,\, g$ のフーリエ係数列をそれぞれ $c=(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$, $d=(d_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ とすれば

$$f(t)g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(c*d)_k\, e^{ikt} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

が成り立つ。

(ii) 関数 $f,\, g$ が有界かつ絶対可積分であれば

$$\mathscr{F}(f*g)=\mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$$

が成り立つ。さらに $f,\, g\in\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ であれば

$$\mathscr{F}(fg)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(f)*\mathscr{F}(g)$$

も成り立つ。

注意. 定理 5, (i) は

$$\Phi^*(c*d)=\Phi^*(c)\Phi^*(d)=fg$$

と表すこともできる。また、一般に関数の合成積 $f*g$ は定義されない。従って

$$\Phi^*(cd)=\Phi^*(c)*\Phi^*(d)=f*g$$

は成り立たない。

§14. 偏微分方程式論への応用

ここではフーリエ級数の理論を偏微分方程式の理論へ応用する。

補題 28. 未知関数 $u = u(t,x)$ に関する偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

について考える。

(i) C^2 級関数 $F,\ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意にとり、関数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$u(t,x) = F(t+x) + G(t-x) \qquad (t, x \in \mathbb{R})$$

により定義すれば、$u = u(t,x)$ は偏微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の C^2 級関数解となる。

(ii) 偏微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の C^2 級関数解 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ はすべて C^2 級関数 $F,\ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いて

$$u(t,x) = F(t+x) + G(t-x) \qquad (t, x \in \mathbb{R})$$

と表される。

証明. (i) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F''(t+x) + G''(t-x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ より明らか。

(ii) 一般に、2 階偏微分可能関数 $u = u(t,x)$ に対して、変数を

$$w = t + x, \qquad y = t - x$$

と変換すれば

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial w} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

が成り立つ。関数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^2 級であるから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial w} = \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)$$

となる。従って $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ より $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial w} = 0$ が導かれるから

$$u = F(w) + G(y) = F(t+x) + G(t-x)$$

と表されることが解る。 □

系. 偏微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の C^2 級関数解 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の全体を $\mathscr{U}_2$ と表し、写像

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{U}_2 \\ \cup & & \cup \\ (F,G) & \longmapsto & u \end{array}$$

を補題 28, (i) により定める。このとき

(i) 写像 $\mathcal{K}$ は全射かつ線形で $\operatorname{Ker} \mathcal{K} = \{(-c, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ となる。

(ii) $\mathscr{D}_2 = \{(F,G) \mid F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), G(0) = 0\}$ とおけば、写像 $\mathcal{K}$ の制限

$$\mathcal{K}_2 : \mathscr{D}_2 \longrightarrow \mathscr{U}_2$$

は同形となる。

注意． 補題 28 はダランベールの解法と呼ばれる。また、(ii) の証明で重要な役割を果たした等式はヘッセ行列の変数変換公式の一例である。

定理 6． 未知関数 $u = u(t,x)$ に関する偏微分方程式の境界値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \qquad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

について考える。

(i) 周期 2π をもつ C^2 級関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意にとり、関数 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$u(t,x) = F(t+x) - F(t-x) \qquad (t, x \in \mathbb{R})$$

により定義すれば、$u = u(t,x)$ は (3) の C^2 級関数解となる。逆に、(3) の C^2 級関数解 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ はすべてこのようにして得られる。また、任意の点 $t,\, x \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(t,x) + u(t,-x) = 0$$
$$u(t+2\pi, x) = u(t,x) = u(t, x+2\pi)$$

が成り立つ。

(ii) 周期 2π をもつ C^2 級関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して、数列 $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$, $(b_k)_{k=0}^{+\infty}$ を

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin kt\,dt, \qquad b_k = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos kt\,dt \qquad (k \geqq 0)$$

により定めれば

$$F(x) = -\frac{b_0}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k\cos kx - a_k\sin kx) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

と表される。従って (3) の解 $u(t,x) = F(t+x) - F(t-x)$ は

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\sin kx$$

と表されることも解る。

(iii) C^2 級関数 $v,w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ より定まる関数 $u(t,x) = v(t)w(x)$ が (3) の解であれば、定数 $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$u(t,x) = (a\cos kt + b\sin kt)\sin kx \qquad (t, x \in \mathbb{R})$$

と表される。逆に、任意に実数列 $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$ と定数 $n \in \mathbb{N}$ をとり、関数 $u_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$u_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\sin kx \qquad (t, x \in \mathbb{R})$$

により定めれば、u_n は (3) の C^∞ 級関数解となる。さらに、関数項級数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\sin kx$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(b_k\cos kt - a_k\sin kt)\cos kx$$

がどちらも点 $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ に関して一様収束し、関数項級数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k \cos kx$$

が点 $x \in \mathbb{R}$ に関して一様収束するならば、関数列 $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ は関数

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$$

に一様収束し、極限関数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は (3) の C^2 級関数解となる。

証明. (i) 関数 $u(t,x) = F(t+x) - F(t-x)$ が (3) の解であることは補題 28, (i) より解る。逆に、補題 28, (ii) より、(3) の任意の解は $u(t,x) = F(t+x) + G(t-x)$ と表される。このとき $F(t) + G(t) = u(t,0) = 0$ より $G = -F$ となるから $u(t,x) = F(t+x) - F(t-x)$ と書けることが解る。

(ii) は略す。

(iii) 段階を踏んで示す。

Step 1. 関数 $u(t,x) = v(t)w(x) \neq 0$ が (3) の解であると仮定する。このとき

$$^{\exists}\lambda \in \mathbb{R}, \quad v''(t) = \lambda v(t), \quad w''(x) = \lambda w(x), \quad w(0) = w(\pi) = 0$$

となる。さらに $\lambda = -k^2$ $(k \in \mathbb{N})$ となり

$$v(t) = a \cos kt + b \sin kt, \qquad w(x) = c \sin kx \qquad (a,b,c \in \mathbb{R})$$

と表される。

Step 2. 任意の定数 $k \in \mathbb{N}$, a, $b \in \mathbb{R}$ に対して

$$u = u(t,x) = (a \cos kt + b \sin kt) \sin kx$$

は (3) の解である。従って $u_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ も (3) の解であることが解る。

Step 3. 関数

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$$

は (3) の C^2 級関数解である。 □

系 1. 偏微分方程式の境界値問題 (3) の C^2 級関数解 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の全体を $\mathscr{B}_2$ と表し、写像

$$\mathcal{L} : \begin{array}{ccc} C^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{B}_2 \\ \cup & & \cup \\ F & \longmapsto & u \end{array}$$

を定理 6, (i) により定める。ここで $C^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ は周期 2π をもつ C^2 級関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の全体を表す。このとき

(i) 写像 $\mathcal{L}$ は全射かつ線形で $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L} = \mathbb{R}$ となる。

(ii) $\mathscr{F}_2 = \{F \mid F \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F(0) = 0\}$ とおけば、写像 $\mathcal{L}$ の制限

$$\mathcal{L}_2 \,:\, \mathscr{F}_2 \longrightarrow \mathscr{B}_2$$

は同形となる。

系 2. 条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2|a_k| < +\infty$$

を満たす実数列 $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ の全体を $\mathscr{A}_2$ と表し、写像

$$\mathcal{M}: \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_2 \times \mathscr{A}_2 & \longrightarrow & \mathscr{B}_2 \\ \Psi & & \Psi \\ \big((a_k)_{k=1}^{+\infty}, (b_k)_{k=1}^{+\infty}\big) & \longmapsto & u \end{array}$$

を

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx \qquad (t, x \in \mathbb{R})$$

により定める。このとき、写像 $\mathcal{M}$ は単射かつ線形であるが、全射ではない。

注意. (i) 補題 28 と同様に、定理 6, (i) もダランベールの解法と呼ばれる。

(ii) 定理 6, (ii) で、関数 F のフーリエ係数を α_k, β_k $(k \in \mathbb{Z})$ とすれば

$$F(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

および

$$a_k = 2\beta_k, \qquad b_k = -2\alpha_k \qquad (k \geqq 0)$$

が成り立つ。

(iii) 定理 6, (iii) で無条件に

$$v(t) = a\cos kt + b \sin kt, \qquad w(x) = c \sin kx \qquad (k \in \mathbb{N},\ a, b, c \in \mathbb{R})$$

と表せるわけではない。

(iv) 定理 6, (ii), (iii) の解法は定数変化法と考えることもできる。実際、フーリエ級数

$$u_0(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

の定数 a_k, b_k を関数 $a_k(x)$, $b_k(x)$ に変えて

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(x) \cos kt + b_k(x) \sin kt)$$

が (3) の解となるように $a_k(x)$, $b_k(x)$ を定めれば

$$a_k(x) = a_k \sin kx, \qquad b_k(x) = b_k \sin kx$$

となる。従って

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$$

が解る。

定理 7. C^2 級関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と C^1 級関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を固定して、未知関数 $u=u(t,x)$ に関する偏微分方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad u(0,x)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x)\quad ({}^\forall x\in\mathbb{R}) \tag{4}$$

について考える。

(i) 次の 3 条件：

$$F(0)+G(0)=f(0)$$
$$F'(x)=\frac{1}{2}\bigl(f'(x)+g(x)\bigr)\qquad (x\in\mathbb{R})$$
$$G'(x)=-\frac{1}{2}\bigl(f'(-x)-g(-x)\bigr)\qquad (x\in\mathbb{R})$$

を満たす C^2 級関数 $F,\,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意にとり、関数 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$u(t,x)=F(t+x)+G(t-x)\qquad (t,x\in\mathbb{R})$$

により定義すれば、$u=u(t,x)$ は (4) の C^2 級関数解となる。逆に、(4) の C^2 級関数解 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ はすべてこのようにして得られる。従って、初期値問題 (4) の C^2 級関数解 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は唯ひとつ存在する。

(ii) $f,\,g$ が奇関数であると仮定する。このとき、条件

$$F'(x)=\frac{1}{2}\bigl(f'(x)+g(x)\bigr)\qquad (x\in\mathbb{R})$$

を満たす C^2 級関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意にとり、関数 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$u(t,x)=F(t+x)-F(t-x)\qquad (t,x\in\mathbb{R})$$

により定義すれば、$u=u(t,x)$ は (4) の唯一の C^2 級関数解となる。また、任意の点 $t,\,x\in\mathbb{R}$ に対して

$$u(t,x)+u(t,-x)=0$$

が成り立つ。

(iii) $f,\,g$ が周期 2π をもつ奇関数であると仮定する。このとき、数列 $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$ を

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx,\qquad b_k=\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi g(x)\sin kx\,dx\qquad (k\geqq 1)$$

により定めれば、(ii) の関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は

$$F(x)=c-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k\cos kx-a_k\sin kx)\qquad (x\in\mathbb{R})$$

と表される。ここで c は任意定数である。従って (4) の唯一の C^2 級関数解 $u(t,x)=F(t+x)-F(t-x)$ は

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\sin kx$$

と表されることも解る。また、任意の点 $t,\,x\in\mathbb{R}$ に対して

$$u(t+2\pi,x)=u(t,x)=u(t,x+2\pi)$$

が成り立つ。

系 1. 写像

$$\mathcal{S} : \begin{array}{ccc} C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{U}_2 \\ \cup & & \cup \\ (f,g) & \longmapsto & u \end{array}$$

を定理 7, (i) により定める。このとき

(i) 写像 $\mathcal{S}$ は線形空間の間の同形となる。

(ii) 関数 $u = \mathcal{S}(f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy\Big) \qquad (t, x \in \mathbb{R})$$

と表すこともできる。

系 2. 周期 2π をもつ C^2 級奇関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と周期 2π をもつ C^1 級奇関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の対 (f,g) の全体を $\mathscr{I}$ と表せば、定理 7 の系 1 で定義された線形写像 $\mathcal{S}$ の制限

$$\mathcal{T} : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{B}_2$$

は同形となる。

注意. (i) 補題 28 と同様に、定理 7, (i) もダランベールの解法と呼ばれる。また、関数 F, G を用いて関数 f, g を表せば

$$f(x) = F(x) + G(-x), \qquad g(x) = F'(x) + G'(-x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

となる。

(ii) 定理 7, (ii) で、関数 F を用いて関数 f, g を表せば

$$f(x) = F(x) - F(-x), \qquad g(x) = F'(x) - F'(-x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

となる。

(iii) 定理 7, (iii) で、関数 f, g を

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin kx, \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k \sin kx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

と表すこともできる。

§14 の問題

問題 14.1. 整数 $r \geqq 2$ に対して次を示せ。

(i) 偏微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の C^r 級関数解 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の全体を $\mathscr{U}_r$ と表す。このとき、$\mathscr{D}_r = \{(F,G) \mid F, G \in C^r(\mathbb{R},\mathbb{R}), G(0) = 0\}$ とおけば、補題 28 の系で定義された線形写像 $\mathcal{K}$ の制限

$$\mathcal{K}_r : \mathscr{D}_r \longrightarrow \mathscr{U}_r$$

は同形となる。

(ii) 偏微分方程式の境界値問題 (3) の C^r 級関数解 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の全体を $\mathscr{B}_r$ と表す。このとき、周期 2π をもつ C^r 級関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の全体を $C^r_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ と表し $\mathscr{F}_r = \{F \mid F \in C^r_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F(0) = 0\}$ とおけば、定理 6 の系 1 で定義された線形写像 $\mathcal{L}$ の制限

$$\mathcal{L}_r : \mathscr{F}_r \longrightarrow \mathscr{B}_r$$

は同形となる。

(iii) 条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r |a_k| < +\infty$$

を満たす実数列 $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ の全体を $\mathscr{A}_r$ と表せば、定理 6 の系 2 で定義された線形写像 $\mathcal{M}$ の制限

$$\mathcal{M}_r \,:\, \mathscr{A}_r \times \mathscr{A}_r \;\longrightarrow\; \mathscr{B}_r$$

は単射であるが、全射ではない。

(iv) 定理 7, (i) で

$$f \text{ は } C^r \text{ 級かつ } g \text{ は } C^{r-1} \text{ 級} \iff u \text{ は } C^r \text{ 級}$$

が成り立つ。従って、定理 7 の系 1 で定義された線形写像 $\mathcal{S}$ の制限

$$\mathcal{S}_r \,:\, C^r(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times C^{r-1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\longrightarrow\; \mathscr{U}_r$$

は同形となる。

(v) 周期 2π をもつ C^r 級奇関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と周期 2π をもつ C^{r-1} 級奇関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の対 (f,g) の全体を $\mathscr{I}_r$ と表せば、定理 7 の系 2 で定義された線形写像 $\mathcal{T}$ の制限

$$\mathcal{T}_r \,:\, \mathscr{I}_r \;\longrightarrow\; \mathscr{B}_r$$

は同形となる。

注意. 問題 14.1 の (i), (ii), (iv), (v) は $r=\infty$ に対しても成り立つ。さらに、問題 14.1, (iii) をより強い形にまとめることもできる。即ち

問題 14.2. 次を示せ。

(i) 偏微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の C^∞ 級関数解 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の全体を $\mathscr{U}_\infty$ と表す。このとき、$\mathscr{D}_\infty = \{(F,G) \mid F,G \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), G(0)=0\}$ とおけば、補題 28 の系で定義された線形写像 $\mathcal{K}$ の制限

$$\mathcal{K}_\infty \,:\, \mathscr{D}_\infty \;\longrightarrow\; \mathscr{U}_\infty$$

は同形となる。

(ii) 偏微分方程式の境界値問題 (3) の C^∞ 級関数解 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の全体を $\mathscr{B}_\infty$ と表す。このとき、周期 2π をもつ C^∞ 級関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の全体を $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ と表し $\mathscr{F}_\infty = \{F \mid F \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F(0)=0\}$ とおけば、定理 6 の系 1 で定義された線形写像 $\mathcal{L}$ の制限

$$\mathcal{L}_\infty \,:\, \mathscr{F}_\infty \;\longrightarrow\; \mathscr{B}_\infty$$

は同形となる。

(iii) $\mathscr{A}_\infty = \displaystyle\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathscr{A}_r$ とおけば、定理 6 の系 2 で定義された線形写像 $\mathcal{M}$ の制限

$$\mathcal{M}_\infty \,:\, \mathscr{A}_\infty \times \mathscr{A}_\infty \;\longrightarrow\; \mathscr{B}_\infty$$

は同形となる。

(iv) 定理 7, (i) で

$$f,\, g \text{ は } C^\infty \text{ 級} \iff u \text{ は } C^\infty \text{ 級}$$

が成り立つ。従って、定理 7 の系 1 で定義された線形写像 $\mathcal{S}$ の制限

$$\mathcal{S}_\infty \,:\, C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\longrightarrow\; \mathscr{U}_\infty$$

は同形となる。

(v) 周期 2π をもつ C^∞ 級奇関数 $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の対 (f, g) の全体を $\mathscr{I}_\infty$ と表せば、定理 7 の系 2 で定義された線形写像 $\mathcal{T}$ の制限

$$\mathcal{T}_\infty : \mathscr{I}_\infty \longrightarrow \mathscr{B}_\infty$$

は同形となる。

参考文献

[1] 井上昌昭：「数学 8」（フーリエ解析）、高知工科大学 TEX クラブ (2016)

[2] 三村征雄：微分積分学⊠, ⊠, 岩波全書 (1973)

[3] 西本敏彦：微分積分学講義、培風館 (1996)

[4] 森毅：現代の古典解析、現代数学社 (1970)

[5] 森毅：異説　数学者列伝、蒼樹書房 (1973)

精神

松尾芭蕉：高く心を悟りて俗に帰るべし

まど·みちお：やさしく書けば退屈します
やさしい中にカチッと歯が立つものがないと—
それを子どもが自力でかみ砕いていく

§15. 補足と発展

§1 について

補題 3, 補題 4 の証明には次の結果が必要である。

補題 1.1. 開区間 I で定義された連続関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \geqq 0)$ よりなる関数列 $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に広義一様収束すると仮定する。このとき

(i) 関数 f は連続となる。

(ii) 任意に点 $c \in I$ をとり固定すれば

$$\lim_{n \to +\infty} \int_c^x f_n(t)\, dt = \int_c^x f(t)\, dt$$

は変数 $x \in I$ に関して広義一様収束する。

補題 1.2. 開区間 I で定義された C^1 級関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \geqq 0)$ よりなる関数列 $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ が次の 2 条件：

(a) 数列 $(f_n(c))_{n=0}^{+\infty}$ が収束するような点 $c \in I$ が存在する

(b) 関数列 $(f'_n)_{n=0}^{+\infty}$ は区間 I で広義一様収束する

を満たすと仮定する。このとき、C^1 級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が存在して

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n, \qquad f' = \lim_{n \to +\infty} f'_n$$

はどちらも区間 I で広義一様収束する。

補題 1.3. 開区間 I で定義された C^2 級関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \geqq 0)$ よりなる関数列 $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ が次の 3 条件：

(a_0) 数列 $(f_n(c_0))_{n=0}^{+\infty}$ が収束するような点 $c_0 \in I$ が存在する

(a_1) 数列 $(f'_n(c_1))_{n=0}^{+\infty}$ が収束するような点 $c_1 \in I$ が存在する

(b) 関数列 $(f''_n)_{n=0}^{+\infty}$ は区間 I で広義一様収束する

を満たすと仮定する。このとき、C^2 級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が存在して

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n, \qquad f' = \lim_{n \to +\infty} f'_n, \qquad f'' = \lim_{n \to +\infty} f''_n$$

はすべて区間 I で広義一様収束する。

注意. 補題 1.1, 補題 1.2, 補題 1.3 はどれも各点収束では成り立たない。

§4 について

補題 9, (iii) より基本的な命題として次がある。

補題 4.1. $a \in \mathbb{R}$, $R > 0$ とする。

(i) 関数 $f : (a - R, a] \to \mathbb{R}$ は連続で、区間 $(a - R, a)$ において微分可能でありかつ片側極限値

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f'(x) \ \in \mathbb{R}$$

が存在すると仮定する。このとき、関数 f は $x = a$ で片側微分可能で

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h} = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f'(x)$$

が成り立つ。

(ii) 関数 $f : [a, a+R) \to \mathbb{R}$ は連続で、区間 $(a, a+R)$ において微分可能でありかつ片側極限値

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) \ \in \mathbb{R}$$

が存在すると仮定する。このとき、関数 f は $x = a$ で片側微分可能で

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x)$$

が成り立つ。

系. 関数 $f : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ は連続で $(a-R, a) \cup (a, a+R)$ において微分可能でありかつ極限値

$$\lim_{x \to a} f'(x) \ \in \mathbb{R}$$

が存在すると仮定する。このとき、関数 f は $x = a$ で微分可能で

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$$

が成り立つ。

注意. 補題 4.1 を定義 3, (ii) の記号で表せば

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = f'_-(a), \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a)$$

となる。これらの結果より補題 9, (iii) を導くこともできる。

§7 について

例 12 で

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \pi$$

が成り立つと述べたが、証明は簡単ではない。以下では、この等式を厳密に証明する。

補題 7.1. 開区間 I で定義された連続関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \geqq 0)$ よりなる関数列 $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に広義一様収束すると仮定する。このとき

(i) 関数 f は連続となる。

(ii) 任意に点 $c \in I$ をとり固定すれば

$$\lim_{n \to +\infty} \int_c^x f_n(t) \, dt = \int_c^x f(t) \, dt$$

は変数 $x \in I$ に関して広義一様収束する。

補題 7.2. 開区間 I で定義された C^1 級関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \geqq 0)$ よりなる関数列 $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ が次の 2 条件：

(a) 数列 $(f_n(c))_{n=0}^{+\infty}$ が収束するような点 $c \in I$ が存在する

(b) 関数列 $(f'_n)_{n=0}^{+\infty}$ は区間 I で広義一様収束する

を満たすと仮定する。このとき、C^1 級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が存在して

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n, \qquad f' = \lim_{n \to +\infty} f'_n$$

はどちらも区間 I で広義一様収束する。

注意. 補題 7.1, 補題 7.2 はどちらも各点収束では成り立たない。

補題 7.3. $a,\ b,\ c,\ d\ (a<b,\ c<d)$ を定数とする。このとき、2 変数関数 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ が連続であれば、f は積分可能であり

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)dy$$

が成り立つ。

補題 7.4. $I,\ J$ を開区間とし、2 変数関数 $f:I\times J\to\mathbb{R}$ が連続であると仮定する。このとき

(i) 任意の定数 $x_0\in I,\ c,\ d\in J\ (c<d)$ に対して

$$\lim_{x\to x_0} f(x,t) = f(x_0,t)$$

は変数 $t\in[c,d]$ に関して一様収束する。従って

$$F(x)=\int_c^d f(x,t)\,dt \qquad (x\in I)$$

により定義される関数 $F:I\to\mathbb{R}$ は連続であることも解る。

(ii) 関数 $f:I\times J\to\mathbb{R}$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}:I\times J\to\mathbb{R}$ が連続であれば、任意の定数 $c,\ d\in J$ に対して、関数：

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_c^d f(x,t)\,dt \end{array}$$

は C^1 級で

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,t)\,dt = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

が成り立つ。

補題 7.5. I を開区間とする。2 変数関数 $f:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とその偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ がどちらも連続で、任意の点 $x\in I$ に対して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|\,dt < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big|\,dt < +\infty$$

が成り立つと仮定する。このとき、定数 $a,\ b\in I\ (a<b)$ に対して

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{|t|\geqq R}\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big|\,dt = 0$$

が変数 $x\in[a,b]$ に関して一様収束するならば、関数：

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,dt \end{array}$$

は C^1 級で

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

が成り立つ。

注意．補題 7.5 は変数 t の積分区間を $[0, +\infty)$ としても成り立つ。

補題 7.6. a, b $(a < b)$ を定数とする。

(i) 関数 f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ がどちらも連続で、任意の点 $t \in [a, b]$ に対して $f(t) \geqq 0$ が成り立つならば、条件

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt, \qquad a \leqq c \leqq b$$

を満たす定数 c が存在する。

(ii) 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が単調かつ C^1 級で、関数 $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続であれば、条件

$$\int_a^b f(t)h(t)\,dt = f(a)\int_a^c h(t)\,dt + f(b)\int_c^b h(t)\,dt, \qquad a \leqq c \leqq b$$

を満たす定数 c が存在する。

注意．補題 7.6, (ii) は関数 f が C^1 級でなくても成り立つ。これを第 2 平均値の定理という。三村征雄、微分積分学⊠ (岩波全書)、p.29, 定理 18 を参照のこと。

補題 7.7. 定数 $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos bt\,dt = \frac{a}{a^2 + b^2} \tag{5}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt = \tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{6}$$

$$b > 0 \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin bt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

が成り立つ。

注意．(i) 補題 7.7 の (7) で $b = 1$ とおけば

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

となるから、例 12 が示されたことになる。

(ii) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が任意の有界閉区間で区分的に滑らかでありかつ絶対可積分であっても、有界であるとは限らない。例 29 を参照のこと。

例 29. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を、任意の点 $t \in \mathbb{R}$ に対して $n \leqq |t| < n + 1$ となる整数 $n \geqq 0$ をとり

$$f(t) = \begin{cases} n + 1 & \left(n \leqq |t| \leqq n + \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(n + \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} < |t| < n + 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

とおくことにより定める。このとき、関数 f は任意の有界閉区間で区分的に滑らかでありかつ絶対可積分であるが、有界ではない。

§11 について

補題 21, (ii) において積分の順序交換はできない。実際、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,dt$$

はすべての点 $x \in \mathbb{R}$ において発散するから

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-n}^{n} e^{itx}\,dx\Big)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,dt\Big)dx$$

という変形の右側の等号は成立しない。

§13 について

定理 5, (ii) の証明のためには、広義積分の順序交換が可能であることを示す必要がある。

補題 13.1. 連続関数 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ と正の定数 R に対して、関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が

$$F(y) = \int_{-R}^{R} f(x,y)\,dx \qquad (y \in \mathbb{R})$$

により定義され連続となる。

補題 13.2. 連続関数 $f_0:\mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ に関する次の 4 条件：

(a$_0$) 関数 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,y)\,dy$ が定義され連続となる

(b$_0$) 関数 $\mathbb{R} \ni y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,y)\,dx$ が定義され連続となる

(c$_0$) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,y)\,dx\Big)dy$ は収束する

(d$_0$) 極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \Big(\int_{-R}^{R} f_0(x,y)\,dx\Big)dy$ が存在する

を考える。

(i) このとき

$$(\mathrm{b}_0),\ (\mathrm{d}_0) \implies (\mathrm{c}_0) \implies (\mathrm{d}_0)$$

が成り立つ。

(ii) 関数 f_0 が条件 (b$_0$), (d$_0$) を満たせば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,y)\,dx\Big)dy = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \Big(\int_{-R}^{R} f_0(x,y)\,dx\Big)dy$$

が成り立つ。

(iii) 関数 f_0 が条件 (a$_0$), (b$_0$), (d$_0$) を満たせば、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,y)\,dx\Big)dy, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,y)\,dy\Big)dx$$

はどちらも収束し

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,y)\,dx\Big)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,y)\,dy\Big)dx$$

が成り立つ。

補題 13.3. 連続関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ が次の 3 条件：

(a) 関数 $\mathbb{R}\ni x\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|\,dy$ が定義され連続となる

(b) 関数 $\mathbb{R}\ni y\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|\,dx$ が定義され連続となる

(c) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|\,dx\Big)dy$ は収束する

を満たすと仮定する。このとき、広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\Big)dy,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy\Big)dx$$

はどちらも収束し

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\Big)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy\Big)dx$$

が成り立つ。

例 30. 関数 $f:\mathbb{R}\times(0,+\infty)\to\mathbb{C}$ を

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad(x\in\mathbb{R},\ y>0)$$

により定める。このとき、関数 $f:\mathbb{R}\times(0,+\infty)\to\mathbb{C}$ は連続であり、広義積分

$$\int_{1}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\Big)dy,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{1}^{+\infty}f(x,y)\,dy\Big)dx$$

はどちらも収束するが

$$\int_{1}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\Big)dy\neq\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{1}^{+\infty}f(x,y)\,dy\Big)dx$$

となる。

§14 について

補題 28, (ii) に関する注意で述べたヘッセ行列の変数変換公式は次のように一般化される。

補題 14.1. (m,n) 形行列 A に対して、関数 $f_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を

$$f_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}\qquad(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n)$$

により定義する。このとき、2 階偏微分可能な関数 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ に対して

$$H_{g\circ f_A}={}^tA(H_g\circ f_A)A$$

が成り立つ。これは

$$H_{g\circ f_A}(\mathbf{x})={}^tA(H_g(A\mathbf{x}))A\qquad(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n)$$

と表すこともできる。ここで H_g は関数 g のヘッセ行列である。

注意. 補題 14.1 で、関数 f_A を 2 階偏微分可能な関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に一般化することは簡単にはできないと思われる。

定理 6, (iii) の後半を示すために、§15, 補題 1.1, 補題 1.2 を多変数化する。

補題 14.2. *I, J を区間とする。連続関数 $F_n : I \times J \to \mathbb{R}$ $(n \geqq 0)$ よりなる関数列 $(F_n)_{n=0}^{+\infty}$ が関数 $F : I \times J \to \mathbb{R}$ に一様収束すると仮定する。このとき*

(i) 関数 F は連続となる。

(ii) 区間 J が有界閉で $x_0 \in J$ とすれば

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} F_n(t,y)\,dy = \int_{x_0}^{x} F(t,y)\,dy$$

は変数 $(t,x) \in I \times J$ に関して一様収束する。

補題 14.3. *I を区間、J を有界閉区間とする。連続な偏導関数 $\frac{\partial F_n}{\partial x}$ をもつ連続関数 $F_n : I \times J \to \mathbb{R}$ $(n \geqq 0)$ よりなる関数列 $(F_n)_{n=0}^{+\infty}$ が次の 2 条件 :*

(a) 関数列 $(F_n(t,x_0))_{n=0}^{+\infty}$ が変数 $t \in I$ に関して一様収束するような点 $x_0 \in J$ が存在する

(b) 関数列 $(\frac{\partial F_n}{\partial x})_{n=0}^{+\infty}$ は $I \times J$ で一様収束する

を満たすと仮定する。このとき、連続な偏導関数 $\frac{\partial F}{\partial x}$ をもつ連続関数 $F : I \times J \to \mathbb{R}$ が存在して

$$F = \lim_{n\to+\infty} F_n, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\partial F_n}{\partial x}$$

はどちらも変数 $(t,x) \in I \times J$ に関して一様収束する。

§16. 関連事項の整理

補題 7.7, (7) について考える。

補題 29. 有限数列 $a_0, \cdots, a_n,\ b_0, \cdots, b_n$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})b_k + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}(b_k - b_{k-1}) = a_n b_n - a_0 b_0$$

が成り立つ。

系. 有限数列 $b_0, \cdots, b_n,\ c_0, \cdots, c_n$ に対して

$$\sigma_k = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell \qquad (0 \leqq k \leqq n)$$

とおけば

$$\sum_{k=0}^{n} b_k c_k = \sum_{k=0}^{n-1}(b_k - b_{k+1})\sigma_k + b_n \sigma_n$$

が成り立つ。

補題 30. 有限数列 $b_0, \cdots, b_n$ が条件

$$b_0 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_{n-1} \geqq b_n \geqq 0$$

を満たすと仮定する。このとき、有限数列 $c_0, \cdots, c_n$ に対して

$$\sigma_k = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell \qquad (0 \leqq k \leqq n)$$

とおけば、不等式

$$b_0 \cdot \min\{\sigma_k \mid 0 \leqq k \leqq n\} \ \leqq\ \sum_{k=0}^{n} b_k c_k \ \leqq\ b_0 \cdot \max\{\sigma_k \mid 0 \leqq k \leqq n\}$$

が成り立つ。

補題 31. $a,\ b\ (a < b)$ を定数とする。

(i) 関数 $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ が単調減少で、関数 $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続であれば、条件

$$\int_a^b f(t)h(t)\,dt = f(a)\int_a^c h(t)\,dt, \qquad a \leqq c \leqq b$$

を満たす定数 c が存在する。

(ii) 関数 $f : [a, b] \to (-\infty, 0]$ が単調減少で、関数 $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続であれば、条件

$$\int_a^b f(t)h(t)\,dt = f(b)\int_c^b h(t)\,dt, \qquad a \leqq c \leqq b$$

を満たす定数 c が存在する。

注意. 補題 31 を用いて補題 7.7, (7) を示すこともできる。

§17. ルベーグ積分について

本稿では、区分的に連続であるという性質を表にだすことにより、ルベーグ積分を用いることなく、リーマン積分で理論を展開した。しかし、ルベーグ積分を用いる方が定式化が簡単になることも多い。以下ではそのような例をいくつか紹介する。

(i) ルベーグ積分を用いると補題 1 の系を一般化することができる。例えば、関数 f が $[-\pi, \pi]$ で 2 乗可積分であれば、即ち条件

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt < +\infty$$

を満たせば、区分的に連続ではなくても、補題 1 の系は成り立つ。

(ii) 補題 9 についても同様である。

疑問点の整理

Question 1. §3, 例 7, 補題 8 に関連して、次の予想は正しいか？

予想. r を負でない整数とする。このとき、周期 2π をもつ C^{r+1} 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のフーリエ係数 a_k, b_k, c_k $(k \in \mathbb{Z})$ は条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r|a_k| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r|b_k| < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^r|c_{-k}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^r|c_k| < +\infty$$

を満たす。

特に $r = 0$ の場合が重要である。即ち、次の予想：

周期 2π をもつ C^1 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のフーリエ係数 a_k, b_k, c_k $(k \in \mathbb{Z})$ は条件

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_{-k}| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| < +\infty$$

を満たす。

は正しいか？

Question 2.

Question 3.

Question 4.

Question 5.

文字表

$\mathcal{A}$, $\mathfrak{A}$, $\mathscr{A}$
$\mathcal{B}$, $\mathfrak{B}$, $\mathscr{B}$
$\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$, $\mathscr{C}$
$\mathcal{D}$, $\mathfrak{D}$, $\mathscr{D}$
$\mathcal{E}$, $\mathfrak{E}$, $\mathscr{E}$
$\mathcal{F}$, $\mathfrak{F}$, $\mathscr{F}$
$\mathcal{G}$, $\mathfrak{G}$, $\mathscr{G}$
$\mathcal{H}$, $\mathfrak{H}$, $\mathscr{H}$
$\mathcal{I}$, $\mathfrak{I}$, $\mathscr{I}$
$\mathcal{J}$, $\mathfrak{J}$, $\mathscr{J}$
$\mathcal{K}$, $\mathfrak{K}$, $\mathscr{K}$
$\mathcal{L}$, $\mathfrak{L}$, $\mathscr{L}$
$\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}$, $\mathscr{M}$
$\mathcal{N}$, $\mathfrak{N}$, $\mathscr{N}$
$\mathcal{O}$, $\mathfrak{O}$, $\mathscr{O}$
$\mathcal{P}$, $\mathfrak{P}$, $\mathscr{P}$
$\mathcal{Q}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathscr{Q}$
$\mathcal{R}$, $\mathfrak{R}$, $\mathscr{R}$
$\mathcal{S}$, $\mathfrak{S}$, $\mathscr{S}$
$\mathcal{T}$, $\mathfrak{T}$, $\mathscr{T}$
$\mathcal{U}$, $\mathfrak{U}$, $\mathscr{U}$
$\mathcal{V}$, $\mathfrak{V}$, $\mathscr{V}$
$\mathcal{W}$, $\mathfrak{W}$, $\mathscr{W}$
$\mathcal{X}$, $\mathfrak{X}$, $\mathscr{X}$
$\mathcal{Y}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{Y}$
$\mathcal{Z}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathscr{Z}$

アナグラム：青木昭雄、青木愛子　　Q.E.D. (quod erat demonstrandum)

$\boxed{\text{フーリエ解析入門、fourier2 ; 2014 年 9 月 24 日版}}$