< 外積の向き >

3 次の列ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ の外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ は

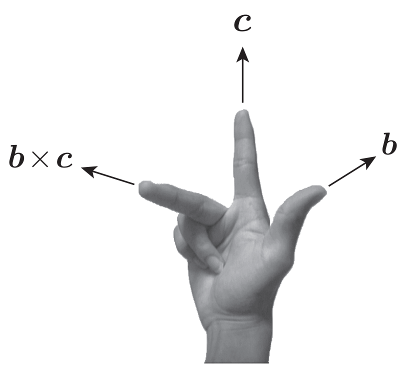
$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ c_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{bmatrix}$$

で定まる。3 次のベクトルである。$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ に垂直であり、

$|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|$ は 2 つベクトル $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の作る平行四辺形の面積に等しい。

また、$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ の向きは

$\boxed{\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\} \text{ は右手系}}$ $\cdots$ $(*)$



をみたす方向である。すなわち、右図のような位置関係にあることを、次ページからの解説で、次のような 5 段階に分けて説明する。

[1] 平面の中心とする回転 $\cdots$ P.2

[2] 空間の z 軸 , x 軸 , y 軸を中心とする回転 $\cdots$ P.3 ～ P.5

[3] 直交する単位ベクトル $\cdots$ P.6

[4] 一般の回転行列 $\cdots$ P.7 ～ P.9

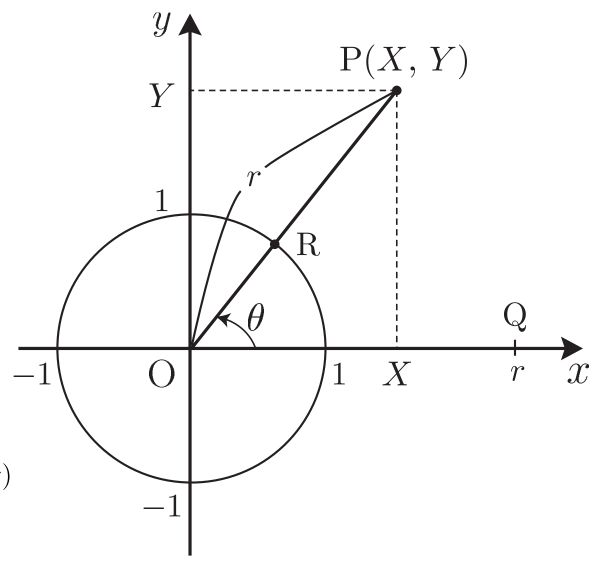
[5] 外積の向き ($(*)$ の証明) $\cdots$ P.10 ～ P.13

< 平面の回転 >

座標平面上の任意の点 $\mathrm{P}(X, Y)$ に対し，
点 P と原点 O を結ぶ線分 OP の長さを r，
点 $(r,\ 0)$ を Q とする。線分 OQ を，原点
を中心として反時計まわりに 角 $\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$
だけ回転した線分が OP とする。原点を中心と
して半径 1 の円と線分との交点を R とすると，
R の座標は $\mathrm{R}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であり，点 P の
座標は $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ である。すなわち，

$$X = r\cos\theta, \qquad Y = r\sin\theta \qquad (r \geqq 0, \quad 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

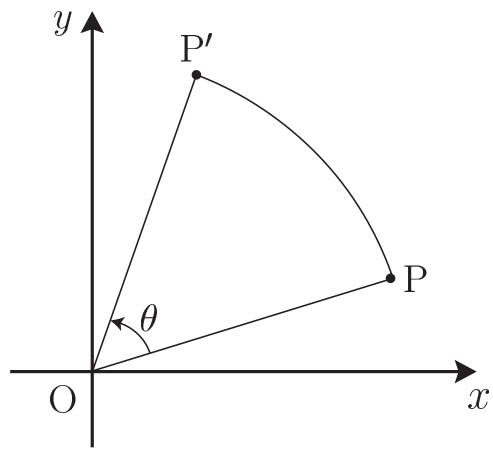
と表される。これを点 $\mathrm{P}(X, Y)$ の**極座標表示**という。



座標平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を，
原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心として反時計まわりに
角 $\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ だけ回転移動してできた点を
$\mathrm{P}'(x',\ y')$ とする。点 P，P$'$ は極座標によって

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

と表される。



$$x' = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = y\cos\theta + x\sin\theta$$ だから

行列を用いると

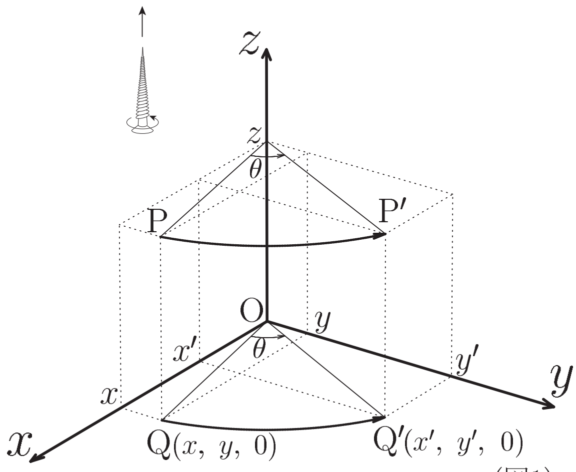
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表される。この行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ を**回転行列** という。

< 空間の回転１ （z 軸回転）>

座標空間内の任意の点を z 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は図１のようである。

すなわち z 軸と同じ方向に右ねじを置き，右ねじが回転しながら進むときの回転する方向にまわす。

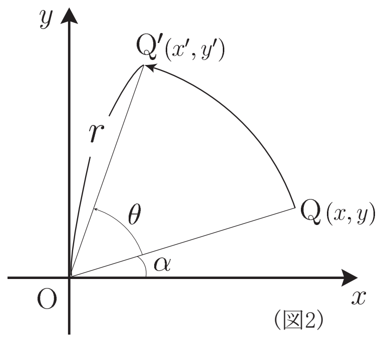


(図1)

今空間の任意の点 P(x, y, z) を上記の方向に角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ だけ回転移動して，点 P′(x', y', z') に移ったとする。

z 軸のまわりに回転するので，z 座標は変わらない。すなわち

$$z' = z \quad \cdots \quad ①$$



(図2)

である。点 P, P′ を xy 平面に射影した点を Q, Q′ とする。 Q, Q′ は図２のような位置関係にある。前ページの結果より

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta \quad \cdots \quad ②$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta \quad \cdots \quad ③$$

となる。

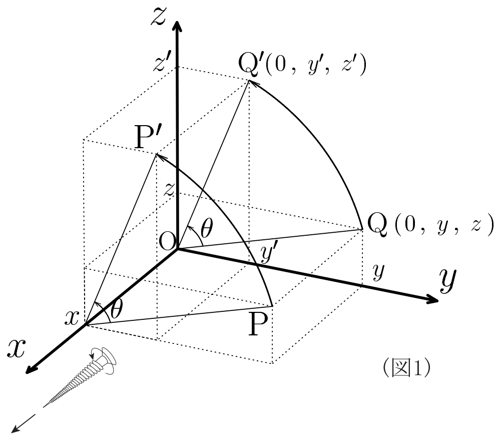
①, ②, ③ より (x, y, z) を (x', y', z') に移す変換を行列で表すと

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

である。

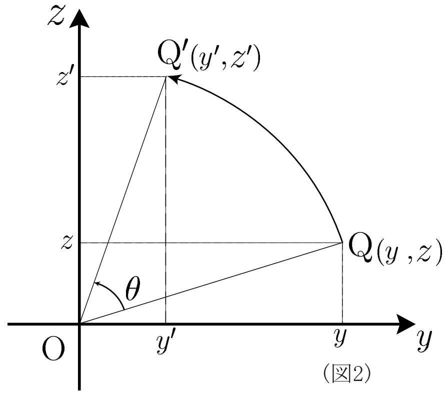
＜空間の回転２（x 軸回転）＞

座標空間内の任意の点を x 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は図１のように x 軸と同じ方向に右ねじを置き，右ねじが回転しながら進むときの回転の方向である。



(図1)

今空間の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ を x 軸を中心として上記の方向へ角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ だけ回転移動して，点 $\mathrm{P}'(x',\ y',\ z')$ に移ったとする。x 軸のまわりに回転するので，y 座標は変わらない。すなわち



(図2)

$$x' = x \quad \cdots \quad ①$$

である。点 P, P′ を yz 平面に射影した点を Q, Q′ とする。 Q, Q′ は図２のような位置関係にある。60 ページと同様に考えて

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta \quad \cdots \quad ②$$

$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta \quad \cdots \quad ③$$

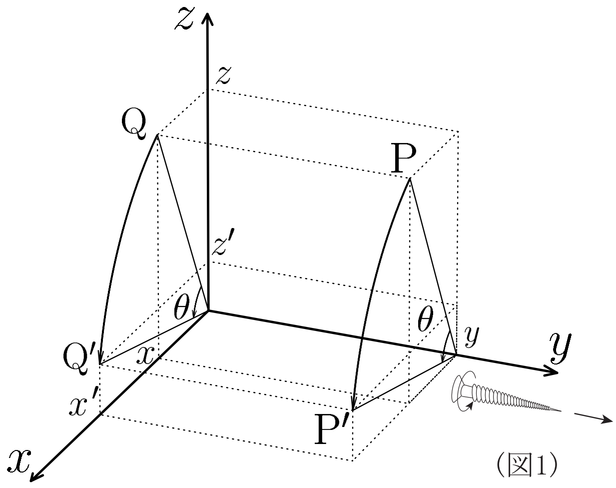
が成り立つ。①, ②, ③ より $(x,\ y,\ z)$ を $(x',\ y',\ z')$ に移す変換を行列で表すと

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

である。

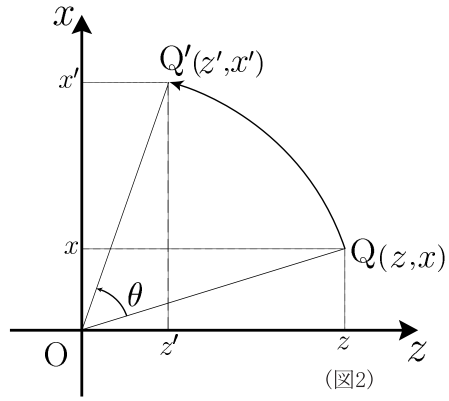
＜空間の回転３（y 軸回転）＞

座標空間内の任意の点を y 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は図１のようである。すなわち y 軸と同じ方向に右ねじを置き，右ねじが回転しながら進むときの回転の方向にまわす。



（図1）

今空間の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ を上記の方向に角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ だけ回転移動して，点 $\mathrm{P}'(x',\ y',\ z')$ に移ったとする。y 軸のまわりに回転するので，y 座標は変わらない。すなわち



（図2）

$$y' = y \quad \cdots \quad ①$$

である。点 P，P′ を zx 平面に射影した点を Q，Q′ とする。 Q，Q′ は図２のような位置関係にある。

60 ページの結果より

$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta \quad \cdots \quad ②$$

$$x' = z\sin\theta + x\cos\theta \quad \cdots \quad ③$$

が成り立つ。①，②，③ より $(x,\ y,\ z)$ を $(x',\ y',\ z')$ に移す変換を行列で表すと

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

である。

< 直交する単位ベクトル >

3 次の行ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$ に対し，

内積：$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ，　　　絶対値：$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$

外積：$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$

と定める。次が成り立つ。

定理 1

> 3 次のベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ が
>
> $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{z}| = 1$，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} = 0$　かつ　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}$ であれば
>
> $\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$　かつ　$\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ が成り立つ。

(証明)

$$1 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{だから}$$

$$\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) = y_1 \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

また外積の性質より $\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{x}$ に垂直　…………………………………………… ②

$\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}$ の大きさは $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{x}$ の作る平行四辺形 (=1 辺の長さが 1 の正方形)

の面積だから

$$|\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}| = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

一方 $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{x}$ に垂直で，$|\boldsymbol{y}| = 1$ だから，②，③ より

$$\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x} = e\boldsymbol{y} \qquad (e = 1 \text{ または } -1)$$

とおける。① より

$$1 = \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \cdot (e\boldsymbol{y}) = e|\boldsymbol{y}|^2 = e$$

だから $e = 1$ よって　$\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$　である。

同様にして $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ も成り立つ。　　(証明終)

< 回転行列 1 >

例 1　3 ページで求めた z 軸まわりの θ 回転を表す行列を

$$X = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおくと，$|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{z}| = 1$，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ であり

$$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \sin\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

が成り立つ。定理 6.1 から　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$　となる。

例 2　4 ページで求めた x 軸まわりの θ 回転を表す行列を

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix},\ \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

とおくと，$|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{z}| = 1$，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ であり

$$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

同様に　$\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$　が成り立つ。

例 3　5 ページで求めた y 軸まわりの θ 回転を表す行列を

$$X = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

とおくと，$|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{z}| = 1$，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ であり

$$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

同様に　$\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$　が成り立つ。

定義　3 次の行ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ が $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{z}| = 1$，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} = 0$

$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$ をみたすとき，行列 $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$ を回転行列ということにする。

＜ 回転行列 2 ＞

定理 2

> 前ページで定義した回転行列 X と 3 次の列ベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ に対し，
> $X\,(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(X\boldsymbol{b})\times(X\boldsymbol{c})$ が成り立つ。

(証明)

$$X=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{z}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}z_1 & z_2 & z_3\end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{z}|=1,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x}=0,\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix},\ X\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'=\begin{bmatrix}b_1{}'\\b_2{}'\\b_3{}'\end{bmatrix},\ X\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}'=\begin{bmatrix}c_1{}'\\c_2{}'\\c_3{}'\end{bmatrix}\ \text{とおく。}$$

$$X(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b_3 & c_3\\b_1 & c_1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix}b_3 & c_3\\b_1 & c_1\end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}\\y_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}+y_2\begin{vmatrix}b_3 & c_3\\b_1 & c_1\end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}\\z_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}+z_2\begin{vmatrix}b_3 & c_3\\b_1 & c_1\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}x_1 & b_1 & c_1\\x_2 & b_2 & c_2\\x_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}y_1 & b_1 & c_1\\y_2 & b_2 & c_2\\y_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}z_1 & b_1 & c_1\\z_2 & b_2 & c_2\\z_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\end{bmatrix}\quad\cdots\ ①$$

$$\boldsymbol{b}'=X\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3\\y_1b_1+y_2b_2+y_3b_3\\z_1b_1+z_2b_2+z_3b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1{}'\\b_2{}'\\b_3{}'\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}'=X\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}x_1c_1+x_2c_2+x_3c_3\\y_1c_1+y_2c_2+y_3c_3\\z_1c_1+z_2c_2+z_3c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1{}'\\c_2{}'\\c_3{}'\end{bmatrix}$$

$$(X\boldsymbol{b})\times(X\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'=\begin{bmatrix}b_1{}'\\b_2{}'\\b_3{}'\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}c_1{}'\\c_2{}'\\c_3{}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}b_2{}' & c_2{}'\\b_3{}' & c_3{}'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b_3{}' & c_3{}'\\b_1{}' & c_1{}'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b_1{}' & c_1{}'\\b_2{}' & c_2{}'\end{vmatrix}\end{bmatrix}\quad\cdots\ ②$$

② の第 1 成分

$$=\begin{vmatrix}b_2{}' & c_2{}'\\b_3{}' & c_3{}'\end{vmatrix}=b_2{}'c_3{}'-b_3{}'c_2{}'$$

$$=(y_1b_1+y_2b_2+y_3b_3)(z_1c_1+z_2c_2+z_3c_3)-(z_1b_1+z_2b_2+z_3b_3)(y_1c_1+y_2c_2+y_3c_3)$$

$$=y_1b_1z_1c_1+y_1b_1z_2c_2+y_1b_1z_3c_3+y_2b_2z_1c_1+y_2b_2z_2c_2+y_2b_2z_3c_3+y_3b_3z_1c_1+y_3b_3z_2c_2+y_3b_3z_3c_3$$
$$-z_1b_1y_1c_1-z_1b_1y_2c_2-z_1b_1y_3c_3-z_2b_2y_1c_1-z_2b_2y_2c_2-z_2b_2y_3c_3-z_3b_3y_1c_1-z_3b_3y_2c_2-z_3b_3y_3c_3$$

< 回転行列 3 >

(定理 2 の証明の続き)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} {b_2}' & {c_2}' \\ {b_3}' & {c_3}' \end{vmatrix} &= y_1z_2(b_1c_2-b_2c_1)+y_1z_3(b_1c_3-b_3c_1)+y_2z_1(b_2c_1-b_1c_2) \\
&\quad +y_2z_3(b_2c_3-b_3c_2)+y_3z_1(b_3c_1-b_1c_3)+y_3z_2(b_3c_2-b_2c_3) \\
&= (y_1z_2-y_2z_1)(b_1c_2-b_2c_1)+(y_1z_3-y_3z_1)(b_1c_3-b_3c_1)+(y_2z_3-y_3z_2)(b_2c_3-b_3c_2) \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = {}^t(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = {}^t\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\
&= x_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots \quad ③
\end{aligned}$$

同様にして

② の第 2 成分 $= \begin{vmatrix} {b_3}' & {c_3}' \\ {b_1}' & {c_1}' \end{vmatrix} = {b_3}'{c_1}'-{b_1}'{c_3}'$

$$= (z_1b_1+z_2b_2+z_3b_3)(x_1c_1+x_2c_2+x_3c_3)-(x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3)(z_1c_1+z_2c_2+z_3c_3)$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = {}^t(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = {}^t\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} y_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots \quad ④$$

② の第 3 成分 $= \begin{vmatrix} {b_1}' & {c_1}' \\ {b_2}' & {c_2}' \end{vmatrix} = {b_1}'{c_2}'-{b_2}'{c_1}'$

$$= (x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3)(y_1c_1+y_2c_2+y_3c_3)-(y_1b_1+y_2b_2+y_3b_3)(x_1c_1+x_2c_2+x_3c_3)$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = {}^t(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = {}^t\boldsymbol{z}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} z_1 & b_1 & c_1 \\ z_2 & b_2 & c_2 \\ z_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots \quad ⑤$$

① と ② ③ ④ ⑤ より　$X\,(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (X\boldsymbol{b})\times(X\boldsymbol{c})$　が得られる。　(証明終)

< 外積の向き 1 >

定理 3 $\boxed{\text{3 次の列ベクトル } \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{c}\ (\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{c} \neq k\boldsymbol{b}\quad (k \text{ は定数})) \text{ に対し } \{\boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\} \text{ は右手系である。}}$

(証明) 任意の正定数 k_1 , k_2 に対し，$\{k_1\boldsymbol{b}\,,\ k_2\boldsymbol{c}\,,\ (k_1\boldsymbol{b})\times(k_2\boldsymbol{c})\}$

が右手系であることと $\{\boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\}$ が右手系であることは

同値である。従って $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$ として証明する。

$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ とおく。

[1] $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき，$\{\boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\}$ が右手系である

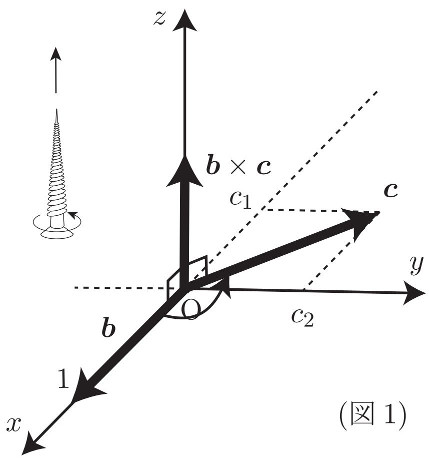
ことを示す。

(1) $c_2 > 0$ のとき

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & c_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & c_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

より $\{\boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\}$ は図 1 のような

位置関係だから，右手系である。



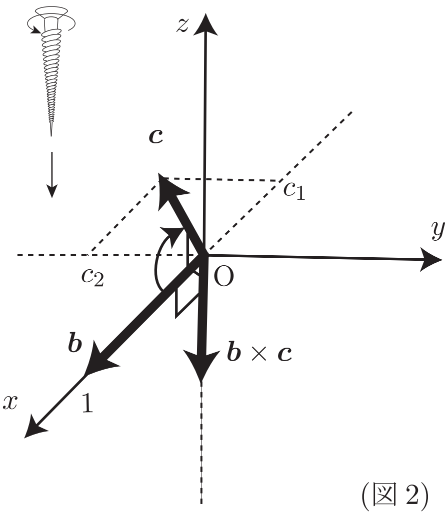
(図 1)

(2) $c_2 < 0$ のとき

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$\{\boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\}$ は図 2 のような

位置関係だから，右手系である。



(図 2)

(3) $c_2 = 0$ のとき

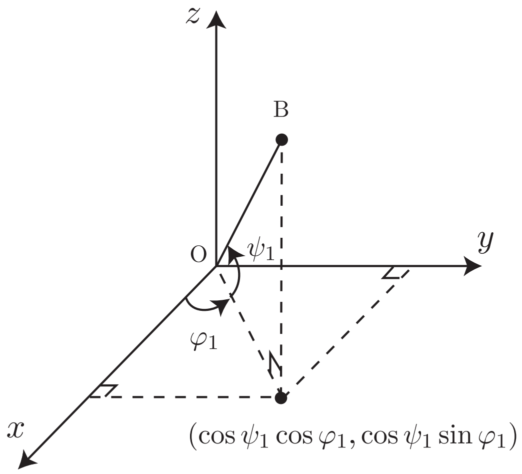
このとき $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{b}$ となり

仮定 $(\boldsymbol{c} \neq k\boldsymbol{b})$ に反する

(1) , (2) , (3) より，このとき $\{\boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\}$ は右手系である。

< 外積の向き 3 >

(定理 3 の証明の続き)



[2] $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$ より原点 O を中心とした

半径 1 の球面上の点 B，C が存在し，

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad , \ \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となるようにできる。このとき，ある ψ_1，ψ_2，

φ_1，φ_2 が存在し，B，C の座標が

$$\mathrm{B}(\cos\psi_1\cos\varphi_1\ ,\ \cos\psi_1\sin\varphi_1\ ,\ \sin\psi_1)$$

$$\mathrm{C}(\cos\psi_2\cos\varphi_2\ ,\ \cos\psi_2\sin\varphi_2\ ,\ \sin\psi_2)$$

と表される。この φ_1，φ_2，ψ_1，ψ_2 に対し， $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$

$$b_1 = \cos\psi_1\cos\varphi_1\ ,\ b_2 = \cos\psi_1\sin\varphi_1\ ,\ b_3 = \sin\psi_1$$

$$c_1 = \cos\psi_2\cos\varphi_2\ ,\ c_2 = \cos\psi_2\sin\varphi_2\ ,\ c_3 = \sin\psi_2$$

$$b'_1 = \cos\psi_1\ ,\ b'_2 = 0\ ,\ b'_3 = \sin\psi_1$$

$$c'_1 = \cos\psi_2\cos\alpha\ ,\ c'_2 = \cos\psi_2\sin\alpha\ ,\ c'_3 = \sin\psi_2$$

$$b''_1 = 1\ ,\ b''_2 = 0\ ,\ b''_3 = 0,$$

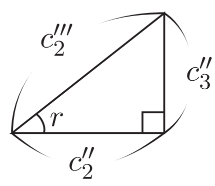
$$c''_1 = \cos\psi_2\cos\alpha\cos\psi_1 + \sin\psi_2\sin\psi_1\ ,\ c''_2 = \cos\psi_2\sin\alpha\ ,$$

$$c''_3 = -\cos\psi_2\cos\alpha\sin\psi_1 + \sin\psi_2\cos\psi_1\ ,$$

$$c'''_1 = c''_1\ ,\ c'''_2 = \sqrt{(c''_2)^2 + (c''_3)^2}\ ,\ c'''_3 = 0$$

$$\mathrm{B}'(b'_1,\ b'_2,\ b'_3)\ ,\ \mathrm{C}'(c'_1,\ c'_2\ ,c'_3)\ ,\ \mathrm{B}''(b''_1,\ b''_2,\ b''_3)$$

$$\mathrm{C}''(c''_1,\ c''_2\ ,c''_3)\ ,\ \mathrm{C}'''(c'''_1,\ c'''_2\ ,c'''_3)\ ,$$



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = \boldsymbol{b}'\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OC}'} = \boldsymbol{c}'\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}''} = \boldsymbol{b}''\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OC}''} = \boldsymbol{c}''\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OC}'''} = \boldsymbol{c}''',$$

$$r = \tan^{-1}\left(\frac{c''_3}{c''_2}\right)\left(i.e.\ \cos r = \frac{c''_3}{c'''_2}\ ,\ \sin r = \frac{c''_3}{c'''_2}\right)$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos r & -\sin r \\ 0 & \sin r & \cos r \end{bmatrix}\ ,\ X_2 = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 & 0 & -\sin\psi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi_1 & 0 & \cos\psi_1 \end{bmatrix}$$

< 外積の向き 3 >

(定理 3 の証明の続き)

$X_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}''' = \overrightarrow{\mathrm{OB}''} = \boldsymbol{b}''$ とおく。

(1)

$\boldsymbol{b}''' = \overrightarrow{\mathrm{OB}'''} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}''' = \overrightarrow{\mathrm{OC}'''} = \begin{bmatrix} {c_1}''' \\ {c_2}''' \\ 0 \end{bmatrix}$ より，[1] の結果から

$\{\boldsymbol{b}''',\ \boldsymbol{c}''',\ \boldsymbol{b}''' \times \boldsymbol{c}'''\}$ は右手系である。

(2)

$$X_1\boldsymbol{c}''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos r & -\sin r \\ 0 & \sin r & \cos r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {c_1}''' \\ {c_2}''' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {c_1}''' \\ {c_2}'''\cos r \\ {c_2}'''\sin r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {c_1}'' \\ {c_2}'' \\ {c_3}'' \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}''$$

$$X_1\boldsymbol{b}''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos r & -\sin r \\ 0 & \sin r & \cos r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}''$$

定理 6.2 より　$X_1\left(\boldsymbol{b}''' \times \boldsymbol{c}'''\right) = \left(X_1\boldsymbol{b}'''\right) \times \left(X_1\boldsymbol{c}'''\right) = \boldsymbol{b}'' \times \boldsymbol{c}''$

X_1 は x 軸を中心軸として角 r だけ回転する変換である。

$\{\boldsymbol{b}''',\ \boldsymbol{c}''',\ \boldsymbol{b}''' \times \boldsymbol{c}'''\}$ が右手系なので $\{X_1\boldsymbol{b}''',\ X_1\boldsymbol{c}''',\ X_1\left(\boldsymbol{b}''' \times \boldsymbol{c}'''\right)\}$

も右手系だから，$\{\boldsymbol{b}'',\ \boldsymbol{c}'',\ \boldsymbol{b}'' \times \boldsymbol{c}''\}$ も右手系である。

(3)

$$\begin{aligned} X_2\boldsymbol{c}'' &= \begin{bmatrix} \cos\psi_1 & 0 & -\sin\psi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi_1 & 0 & \cos\psi_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {c_1}'' \\ {c_2}'' \\ {c_3}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {c_1}''\cos\psi_1 - {c_3}''\sin\psi_1 \\ {c_2}'' \\ {c_1}''\sin\psi_1 + {c_3}''\cos\psi_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\cos\psi_2\cos\alpha\cos\psi_1 + \sin\psi_2\sin\psi_1)\cos\psi_1 - (-\cos\psi_2\cos\alpha\sin\psi_1 + \sin\psi_2\cos\psi_1)\sin\psi_1 \\ \cos\psi_2\sin\alpha \\ (\cos\psi_2\cos\alpha\cos\psi_1 + \sin\psi_2\sin\psi_1)\sin\psi_1 + (-\cos\psi_2\cos\alpha\sin\psi_1 + \sin\psi_2\cos\psi_1)\cos\psi_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi_2\cos\alpha\left(\cos^2\psi_1 + \sin^2\psi_1\right) \\ \cos\psi_2\sin\alpha \\ \sin\psi_2\left(\sin^2\psi_1 + \cos^2\psi_1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi_2\cos\alpha \\ \cos\psi_2\sin\alpha \\ \sin\psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {c_1}' \\ {c_2}' \\ {c_3}' \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}' \end{aligned}$$

$$X_2\boldsymbol{b}'' = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 & 0 & -\sin\psi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi_1 & 0 & \cos\psi_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 \\ 0 \\ \sin\psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {b_1}' \\ {b_2}' \\ {b_3}' \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}'$$

< 外積の向き 4 >

(定理 3 の証明の続き)

定理 2 より　$X_2\left(\boldsymbol{b}''\times\boldsymbol{c}''\right)=\left(X_2\boldsymbol{b}''\right)\times\left(X_2\boldsymbol{c}''\right)=\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'$

X_2 は y 軸を中心軸として角 ψ_1 だけ回転する変換である。

(2) より $\left\{\boldsymbol{b}'',\ \boldsymbol{c}'',\ \boldsymbol{b}''\times\boldsymbol{c}''\right\}$ は右手系だから，$\left\{X_2\boldsymbol{b}'',\ X_2\boldsymbol{c}'',\ X_2\left(\boldsymbol{b}''\times\boldsymbol{c}''\right)\right\}$

も右手系である。よって，$\left\{\boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{c}',\ \boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'\right\}$ は右手系である。

(4)

$$
\begin{aligned}
X_3\boldsymbol{c}' &= \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi_2\cos\alpha\\ \cos\psi_2\sin\alpha\\ \sin\psi_2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\cos\psi_2\cos\alpha\cos\varphi_1-\cos\psi_2\sin\alpha\cos\varphi_1\\ \cos\psi_2\cos\alpha\sin\varphi_1+\cos\psi_2\sin\alpha\cos\varphi_1\\ \sin\psi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi_2\cos(\varphi_1+\alpha)\\ \cos\psi_2\sin(\varphi_1+\alpha)\\ \sin\psi_2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\cos\psi_2\cos\varphi_2\\ \cos\psi_2\sin\varphi_2\\ \sin\psi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

$$
X_3\boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi_1\\ 0\\ \sin\psi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi_1\cos\varphi_1\\ \cos\psi_1\sin\varphi_1\\ \sin\psi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}
$$

定理 2 より　$X_3\left(\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'\right)=\left(X_3\boldsymbol{b}'\right)\times\left(X_3\boldsymbol{c}'\right)=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

X_3 は z 軸を中心軸として角 φ_1 だけ回転する変換である。

(3) より $\left\{\boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{c}',\ \boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'\right\}$ は右手系だから，$\left\{X_3\boldsymbol{b}',\ X_3\boldsymbol{c}',\ X_3\left(\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'\right)\right\}$

も右手系である。よって，$\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\}$ は右手系である。　　(証明終)