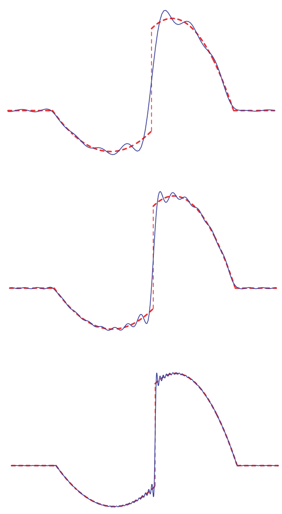
高知工科大学

Kochi University of Technology

「数学 8」

（フーリエ解析）



2014年度版

内容

◎ フーリエ級数
◎ フーリエ変換
◎ ラプラス変換

井上 昌昭　著

第 1 章　フーリエ級数

< 区分的に連続な関数 >

$\{t\ :\ a \leqq t \leqq b\}$ を $[a\ ,\ b]$ と略記する。

[定義 1.1]　関数 $f(t)$ が次の条件①,②を満たすとき、区間 $[a\ ,\ b]$ で**区分的に連続**であるという。

①　$[a\ ,\ b]$ に属する有限個の点 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ を除いたところで $f(t)$ は連続である。

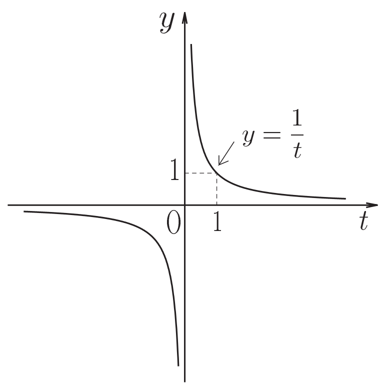
②　各不連続点 t_k $(1 \leqq k \leqq n)$ で $f(t)$ の左側極限と右側極限が存在し、有限の値である。
$a < t_k < b$ のとき

$$f(t_k - 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t_k - h) \quad , \quad f(t_k + 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t_k + h)$$

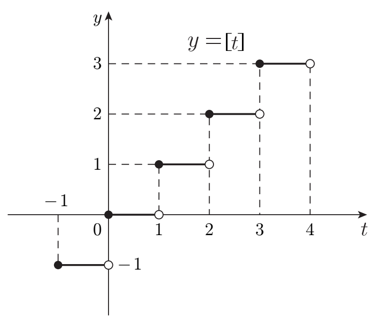
が存在し、有限の値である。$t_k = a$ のときは右側極限 $f(t_k + 0)$ が存在し、有限の値である。$t_k = b$ のときは左側極限 $f(t_k - 0)$ が存在し、有限の値である。

<ins>例 1</ins>　$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & : \quad t \neq 0 \\ 0 & : \quad t = 0 \end{cases}$　の場合

$f(0+0) = +\infty$ であるから
区間 $[0\ ,\ 1]$ で区分的に連続ではない。



<ins>例 2</ins>　$f(t) = [t] : t$ を超えない最大整数
の場合は不連続点は $t = k$（k は整数)
の場合だけである。$f(t)$ は任意有限区間
で区分的に連続である。$t = k$（整数）のときは
$f(k-0) = k - 1\ ,\ f(k+0) = k$ である。



[定義 1.2]　任意有限区間で区分的に連続な関数を，単に**区分的に連続**であるという。

区間 $[a\ ,\ b]$ で区分的に連続な関数は，$[a\ ,\ b]$ で積分可能である（証明は 79 ページ)。以後被積分関数はすべて区分的に連続であるとする。

< 周期関数 >

[定義 1.3]　関数 $f(t)$ が**周期関数**であるとは、ある正定数 p が存在してすべての実数 t に対し $f(t+p)=f(t)$ が成立するときをいう。このとき p を $f(t)$ の**周期**という。

<u>例</u>　自然数 n と実数定数 $c_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ に対し、関数

$f(t)=c_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)\}$ を**三角多項式**という。

この関数は $f(t+2\pi)=f(t)$ を満たすので、$f(t)$ は周期 2π の周期関数である。

補題 1.1

> p を正数とする。$f(t)$ が任意有限区間で積分可能であり，かつ周期 p の周期関数のとき、任意の実数 a に対し、
> $$\int_a^{a+p} f(t)dt=\int_0^p f(t)dt$$
> が成り立つ。

[証明] $np \leqq a < (n+1)p$　(n は整数）のとき $a=np+a'$　$(0 \leqq a' < p)$ とおく。

$$\int_a^{a+p} f(t)dt=\int_{np+a'}^{(n+1)p+a'} f(t)dt$$

$$=\int_{a'}^{p+a'} f(s+np)ds=\int_{a'}^{p+a'} f(s)ds$$

$$=\int_{a'}^{p} f(s)ds+\int_{p}^{p+a'} f(s)ds$$

$$=\int_{a'}^{p} f(s)ds+\int_{0}^{a'} f(\tau+p)d\tau=\int_{a'}^{p} f(\tau)d\tau+\int_{0}^{a'} f(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^p f(\tau)d\tau$$　（証明終）

系

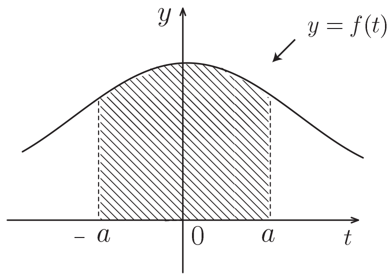
> 補題 1.1 と同じ仮定の下で, 任意の実数 a に対し、
> $$\int_a^{a+p} f(t)dt=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)dt$$
> が成り立つ。

（注）$f(t)$ が周期 2π の周期関数のとき、任意の実数 b に対し

$$\int_{-\pi+b}^{\pi+b} f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

が成り立つ。

＜偶関数と奇関数＞



[定義 1.4]　関数 $f(t)$ が $f(-t)=f(t)$ を満たすとき、**偶関数**という。

<u>例</u>　$f(t)=K$　(定数),　$f(t)=t^{2n}$　(n は整数),

$f(t)=\cos t$,　$f(t)=\sin^2 t$ などは偶関数である。

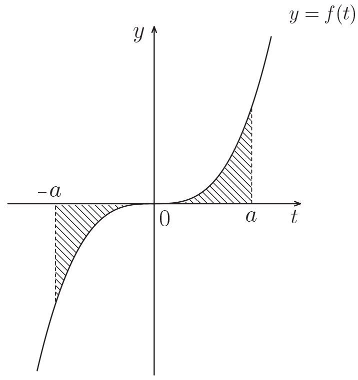
◎

> $f(t)$ が偶関数のとき、任意の正定数 a に対し、
> $$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$
> が成立する。

（証明）
$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-s)(-1)ds \qquad (t=-s)$$
$$= -\int_{a}^{0} f(s)ds = \int_{0}^{a} f(s)ds$$
よりわかる。　　（証明終）

[定義 1.5]　関数 $f(t)$ が $f(-t)=-f(t)$ を満たすとき、**奇関数**という。

<u>例</u>　$f(t)=t^{2n-1}$　(n は整数),　$f(t)=\sin t$　,　$f(t)=\tan t$,
などは奇関数である。



◎

> $f(t)$ が奇関数のとき、任意の正定数 a に対し、
> $$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$
> が成立する。

（証明）
$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-s)(-1)ds = -\int_{0}^{a} f(s)ds$$
よりわかる。　　（証明終）

次の性質がある。

① 偶関数 × 偶関数 = 偶関数　　② 奇関数 × 奇関数 = 偶関数

③ 偶関数 × 奇関数 = 奇関数　　④ 偶関数 + 偶関数 = 偶関数

⑤ 奇関数 + 奇関数 = 奇関数

（注 1）任意の関数 $f(t)$ にたいして、$f(t)=g(t)+h(t)$ を満たす偶関数 $g(t)$ と奇関数 $h(t)$ が存在する。

（注 2）偶関数でかつ奇関数である関数は $f(t)=0$（恒等的にゼロ）だけである。

< 区分的に連続な関数の積分 >

定数 a, b $(a < b)$ に対し、

$$\{t : t \in \mathbb{R}, a < t < b\} = (a,\, b)\ ,\quad \{t : t \in \mathbb{R}, a \leqq t \leqq b\} = [a,\, b]$$

と略記する。

補題 1.2

> $[a, b]$ で区分的に連続な関数 $f(t)$ と $g(t)$ が有限個の点 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ $(a \leqq s_i \leqq b)$ を除いて一致していれば
>
> $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$$
>
> である。

(証明)　$[a, b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ に対し, $f(t) - g(t)$ のリーマン和を

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) - g(\xi_k))(t_k - t_{k-1}) \qquad (t_{k-1} \leqq \xi_k \leqq t_k),$$

分割の最大幅を $\mid \Delta \mid = \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leqq k \leqq n\}$ とおくと,

$t = s_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ 以外では $f(t) - g(t) = 0$ だから

$$\mid S_\Delta \mid \leqq \sum_{i=1}^{m} \mid f(s_i) - g(s_i) \mid \cdot \mid \Delta \mid$$

より　$\displaystyle\int_a^b \{f(t) - g(t)\}dt = \lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = 0$

よって　$\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$　が成り立つ。(証明終)

系

> $[a, b]$ で定義された区分的に連続な関数 $f(t)$ と $g(t)$ が有限個の点を除いて一致していれば
>
> $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$$
>
> である。

< 準偶関数と準奇関数 >

補題 1.3　正定数 a に対し、区間 $[-a,a]$ で区分的に連続な関数 $f(t)$ が $\pm t_1, \pm t_2, \cdots, \pm t_n$ $(0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq a)$ 以外で連続であり、その範囲で $f(-t) = f(t)$ が成り立つとする。このとき

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt \ = \ 2\int_{0}^{a} f(t)dt \qquad \text{が成り立つ。}$$

[**定義 1.6**]　補題 1.3 の条件を満たす関数 $f(t)$ を $[-a,a]$ で**準偶関数**ということにする。

（証明）　$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\} & : \ -a < t < a \\ 0 & : \ t = \pm a \end{cases}$　とおくと

$t \neq \pm a, \ \pm t_k \ (1 \leqq k \leqq n)$ のとき $g(-t) = f(-t) = f(t) = g(t)$ であり

$$g(-t_k) = \frac{1}{2}\{f(-t_k-0)+f(-t_k+0)\} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{2}\{f(-t_k-h)+f(-t_k+h)\}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{2}\{f(t_k+h)+f(t_k-h)\} = \frac{1}{2}\{f(t_k+0)+f(t_k-0\} = g(t_k)$$

$g(-a) = 0 = g(a)$ より $g(-t) = g(t)$ が $-a \leqq t \leqq a$ で成り立つ。
$f(t)$ と $g(t)$ は $t = \pm a, \ \pm t_k (1 \leqq k \leqq n)$ 以外で一致しているから、

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{a} g(t)dt = 2\int_{0}^{a} g(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt \qquad \text{（証明終）}$$

補題 1.4　正定数 a に対し、区間 $[-a,a]$ で区分的に連続な関数 $f(t)$ が $\pm t_1, \pm t_2, \cdots, \pm t_n$ $(0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq a)$ 以外で連続であり、その範囲で $f(-t) = -f(t)$ が成り立つとする。このとき

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 \qquad \text{が成り立つ。}$$

[**定義 1.7**]　補題 1.4 の条件を満たす関数 $f(t)$ を $[-a,a]$ で**準奇関数**ということにする。なお準偶関数および準奇関数という名称は本書だけのものであり，一般に用いられている数学用語ではない。

（証明）$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\} & : \ -a < t < a \\ 0 & : \ t = \pm a \end{cases}$　とおくと

$g(-t) = -g(t)$ が $-a \leqq t \leqq a$ で成り立つ。$f(t)$ と $g(t)$ は有限個の点を除いて一致しているから

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{a} g(t)dt = 0 \qquad \text{（証明終）}$$

< 三角関数の積分 >

三角関数の積分は半角の公式や積和公式を使って $\sin(nt)$ や $\cos(nt)$ の形にしてから積分する。

① 半角の公式 $\boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$

② 積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right\}$$

例 1 (1) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(3t)dt = \int_0^\pi \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(6t)\right\}dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{1}{12}\sin(6t)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin(2t)\cos t dt = \int_{-\pi}^\pi \left\{\frac{1}{2}\sin(3t)+\frac{1}{2}\sin t\right\}dt = \left[-\frac{1}{6}\cos(3t)-\frac{1}{2}\cos t\right]_{-\pi}^\pi = 0$

例 2 自然数 $m,\ n(m \neq n)$ に対し, 次式が成立する。

① $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos^2(nt)dt = \pi$　② $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin^2(nt)dt = \pi$

③ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)\cos(mt)dt = 0$　④ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)\sin(nt)dt = 0$

⑤ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)\sin(mt)dt = 0$　⑥ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$

⑦ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)dt = 0$　⑧ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin(nt)dt = 0$

⑨ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi 1dt = 2\pi$

この①〜⑨は区間 $[-\pi,\ \pi]$ を定義域とする関数 $f(t)$ の集合を線形空間と考えたとき,

内積 $\displaystyle(f,\ g) = \int_{-\pi}^\pi f(t)g(t)dt$ に関し $\{1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos(2t),\ \sin(2t),\ \cdots,\ \cos(nt),\ \sin(nt),\ \cdots\}$

が互いに直交 ($f \neq g$ ならば $(f,\ g) = 0$) することを意味する。

< 三角多項式の係数 >

[定義 1.8]　自然数 n と定数 $c_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ に対し, 関数

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

を**三角多項式**という。

補題 1.5

三角多項式 $f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$ に対し、次式が成り立つ。

(1)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2\pi c_0$

(2)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \pi a_k$

(3)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \pi b_k$

<(2) の証明 >　$f(t) = c_0 + \sum_{l=1}^{n} \{a_l \cos(lt) + b_l \sin(lt)\}$ と書くと、前ページ例 2 より、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\cos(kt)dt = \begin{cases} \pi & : \quad l = k \\ 0 & : \quad l \neq k \end{cases} \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(lt)\cos(kt)dt = 0$$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)dt = 0$ だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ c_0 + \sum_{l=1}^{n} \Big(a_l \cos(lt) + b_l \sin(lt) \Big) \right\} \cos(kt)dt$$

$$= c_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)dt + \sum_{l=1}^{n} \left\{ a_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\cos(kt)dt + b_l \int_{-\pi}^{\pi} \sin(lt)\cos(kt)dt \right\}$$

$= 0 + a_k \times \pi + 0 = \pi a_k$　　(証明終)

問　(1), (3) を証明せよ。

この補題より三角多項式 $f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$ の係数は積分によって

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

と表される。

＜フーリエ級数１＞

三角多項式　$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$ は周期 2π の周期関数であり、

各係数は積分によって

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

と表される。今 $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$ とおくと、$a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

と書けるので、三角多項式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

の係数は

$$(*) \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt}$$

と表される。

フランスの数学者 J.B.J.Fourier(1768〜1830) は任意の周期 2π の周期関数が

三角多項式の極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

として表されることを信じた。

[定義 1.9]　周期 2π の周期関数 $f(t)$ に対し、$(*)$ 式で定義された係数 a_0, a_k, b_k

を用いた三角多項式の極限を

$$\boxed{f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}}$$

と書き、$f(t)$ の**フーリエ級数** (Fourier series) という。

また a_k, b_k を**フーリエ係数**という。

例　$f(t)$ が偶関数のとき、$f(t)\cos(kt)$ は偶関数であり、$f(t)\sin(kt)$ は奇関数だから

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = 0$$ となる。

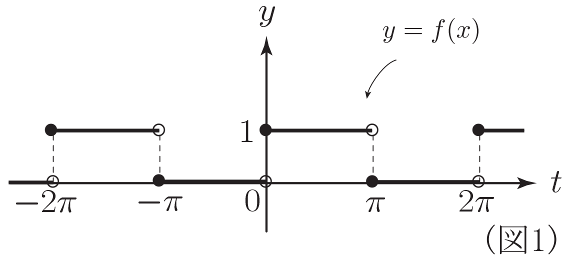
問　$f(t)$ が奇関数のとき、フーリエ係数を簡単にせよ。

＜ フーリエ級数 2 ＞

例　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ : \ 0 \leqq t < \pi \\ 0 \ : \ -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$$

であるとき (グラフは図 1), フーリエ級数を求めたい。$f(t)$ は区分的に連続だから



(図1)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(t)dt\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dt = \frac{1}{\pi}\left[t\right]_0^{\pi} = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^{\pi} = 0 \qquad (k \geqq 1)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi k}\{-\cos(k\pi) + \cos 0\} = \frac{1}{\pi k}\left\{1 - (-1)^k\right\}$$

である。フーリエ級数は

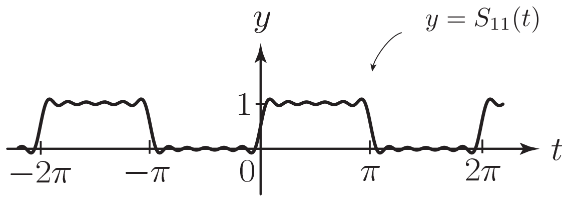
$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\} \quad \text{より}$$

$$\underline{f(t) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\pi k}\sin(kt)} \quad \left(= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin\bigl((2n-1)t\bigr)\right)$$

となる。右図 (図 2) はこのフーリエ級数の $k = 11$ $(n = 6)$ までの部分和

$$S_{11}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{11}\frac{1-(-1)^k}{\pi k}\sin(kt)$$

のグラフである。

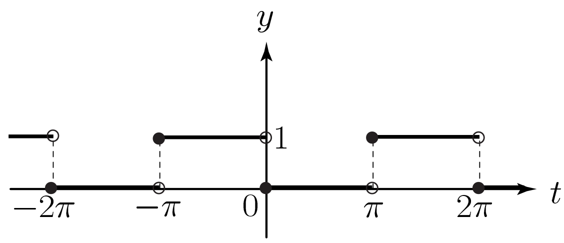


(図2)

問　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \begin{cases} 0 \ : \ 0 \leqq t < \pi \\ 1 \ : \ -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$$

のとき (グラフは図 3), $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。



(図3)

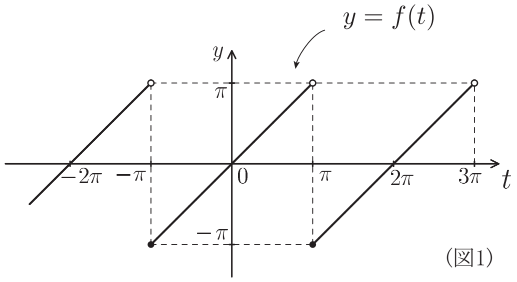
< フーリエ級数 3 >

例　$f(t)$ が周期 2π の周期関数で

$-\pi \leqq t < \pi$ のとき $f(t) = t$ の場合

(グラフは図 1), $f(t)$ は準奇関数 (P.5)

であるから, 奇関数と考えて積分してよい。



(図1)

よってフーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = 0 \ ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(kt)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[t \times \left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)dt\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \left[\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= -\frac{2}{k}\cos(k\pi) = \frac{2}{k} \times (-1)^{k+1}$$

となる。よって $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\} \quad \text{より}$$

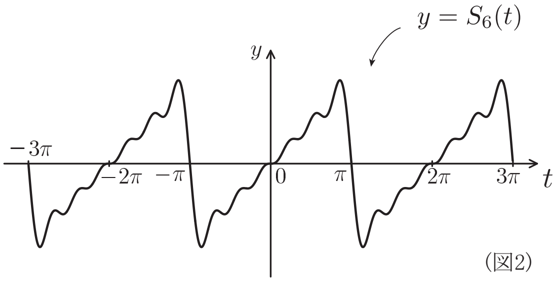
$$\underline{f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \times (-1)^{k+1}}{k}\sin(kt)}$$

となる。図 2 のグラフは、このフーリエ級数の

$k = 6$ までの部分和

$$S_6(t) = \sum_{k=1}^{6} \frac{2 \times (-1)^{k+1}}{k}\sin(kt)$$

のグラフである。



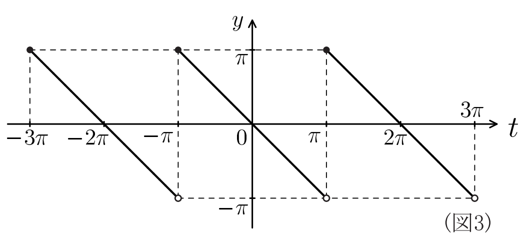
(図2)

問　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$-\pi \leqq t < \pi$ のとき $f(t) = -t$

であるとき (グラフは図 3),

$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。



(図3)

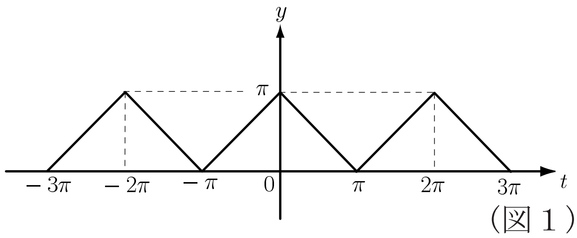
< フーリエ級数 4 >

例　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲で $f(t) = \pi - |t|$

のとき (グラフは図 1)，$f(t)$ は

偶関数である。フーリエ係数は



(図 1)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)dt = \frac{2}{\pi}\left[\pi t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(kt)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[(\pi - t)\cdot\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\cdot\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{0 - 0 + \left[-\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\cos(k\pi)}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left\{1 - (-1)^k\right\},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = 0 \qquad \Big(f(t)\cdot\sin(kt) \text{ は奇関数}\Big)$$

となる。フーリエ級数は $f(t) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$ より

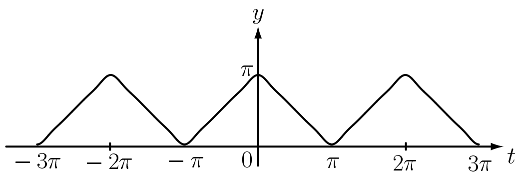
$$\underline{f(t) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\{1 - (-1)^k\}}{\pi k^2}\cos(kt)} \qquad \left(= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos\Big((2n-1)t\Big)\right)$$

となる。図 2 のグラフはこのフーリエ級数

の $k = 7$ $(n = 4)$ までの部分和

$$S_7(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{7}\frac{2\{1 - (-1)^k\}}{\pi k^2}\cos(kt)$$

のグラフである。



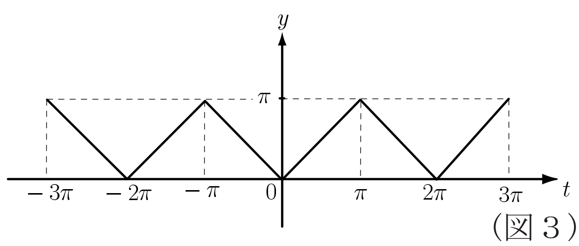
(図 2)

問　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$-\pi \leqq t < \pi$ の範囲で $f(t) = |t|$

のとき (グラフは図 3)，$f(t)$ の

フーリエ級数を求めよ。



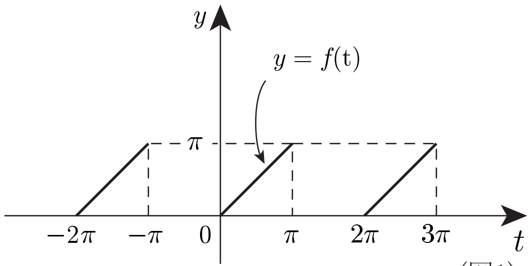
(図 3)

< フーリエ級数 5 >

例　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$-\pi \leqq t < \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} t: & 0 \leqq t < \pi \\ 0: & -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$$



(図1)

のとき、フーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left\{\Big[t\cdot\frac{\sin(kt)}{k}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{0 - 0 + \Big[\frac{\cos(kt)}{k^2}\Big]_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{\cos 0}{k^2}\right\} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left\{\Big[t\cdot\Big(-\frac{\cos(kt)}{k}\Big)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\Big(-\frac{\cos(kt)}{k}\Big)dt\right\}$$

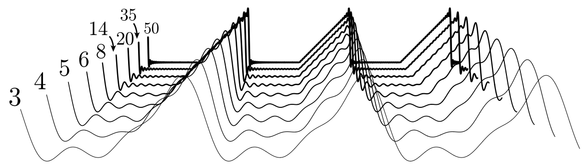
$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + \Big[\frac{\sin(kt)}{k^2}\Big]_0^{\pi}\right\} = -\frac{\cos(k\pi)}{k} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

となるのでフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\cos(kt) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt)\right\}$$

となる。



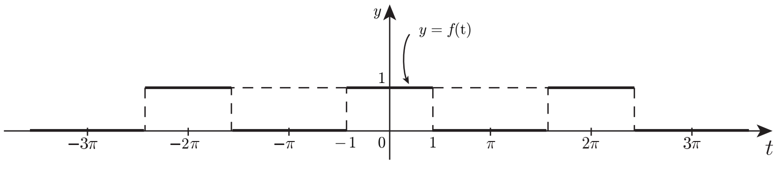
(図2)

図 2 では $n = 3, 4, 5, 6, 8, 14, 20, 35, 50$ のときの $S_n(t)$ のグラフを $-3\pi \leqq t \leqq 3\pi + 0.5$ までの範囲で手前から順に描いた図である。見やすくするために手前のグラフを拡大してある。

問　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} 0: & 1 < t \leqq \pi \\ 1: & -1 \leqq t \leqq 1 \\ 0: & -\pi \leqq t < -1 \end{cases}$$

のとき、$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ を求めよ。



(図3)

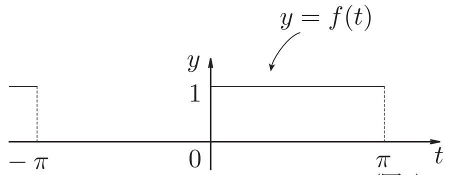
< フーリエ級数のグラフ >

例 1 $f(t)=\begin{cases} 1: & 0 \leqq t < \pi \\ 0: & -\pi < t < 0 \end{cases}$ のフーリエ級数 $f(t) \sim \dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\pi k}\sin(kt)$ の第 n 部分和

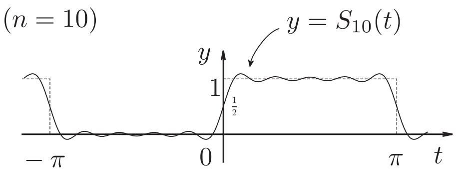
$$S_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(-1)^k}{\pi k}\sin(kt)$$

のグラフ (図 2 から図 5 の実線) と

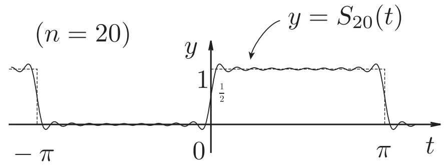
$y=f(t)$ のグラフ (図 1)



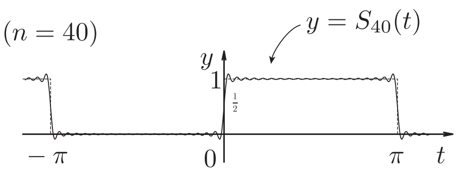
(図1)



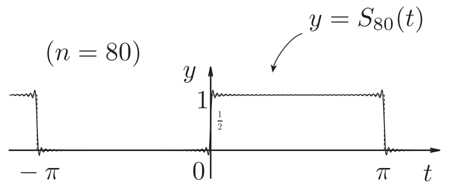
(図2)



(図3)



(図4)



(図5)

(注) $f(t)$ が不連続な点 $(0,\pm\pi$ 等) の近くでは $y=S_n(t)$ のグラフは激しく振動する。これを**ギブスの現象**という。

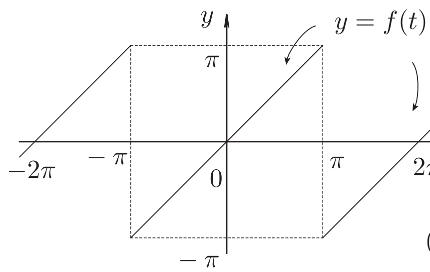
例 2 $f(t)=t(-\pi \leqq t < \pi)$ のフーリエ級数の

第 n 部分和

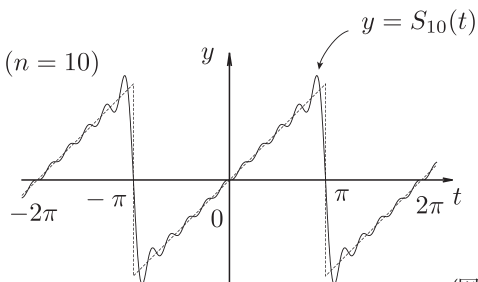
$$S_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\times(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt)$$

のグラフ (図 7 から図 10 の実線) と

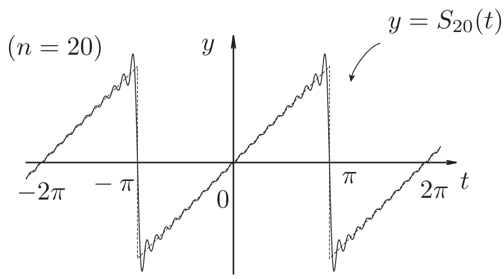
$y=f(t)$ のグラフ (図 6)



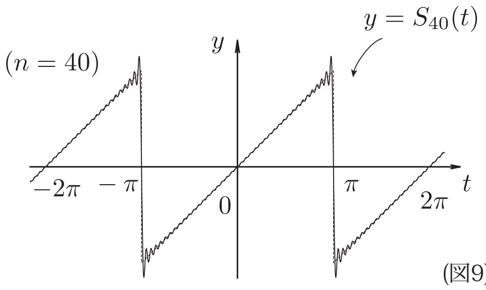
(図6)



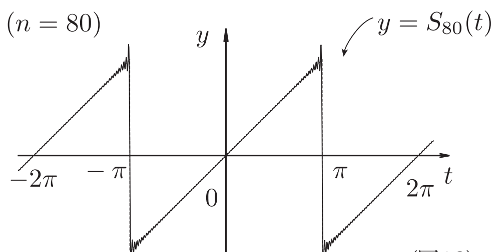
(図7)



(図8)



(図9)



(図10)

< 区分的になめらかな関数 1 >

[定義 1.20]　関数 $f(t)$ が次の条件①,②を満たすとき, 区間 $[a,b]$ で**区分的に滑らか**であるという。

①$[a,b]$ に属する有限個の点 $t_1, \cdots, t_n$ を除いたところで $f(t)$ は微分可能であり, その範囲で導関数 $f'(t)$ は連続である。

②点 t_k $(1 \leqq k \leqq n)$ で $f(t)$ および $f'(t)$ の左側極限と右側極限が存在して有限である。
$a < t_k < b$ のときは

$$f(t_k - 0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(t_k - h) \quad , \qquad f(t_k + 0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(t_k + h)$$
$$f'(t_k - 0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(t_k - h) \quad , \qquad f'(t_k + 0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(t_k + h)$$

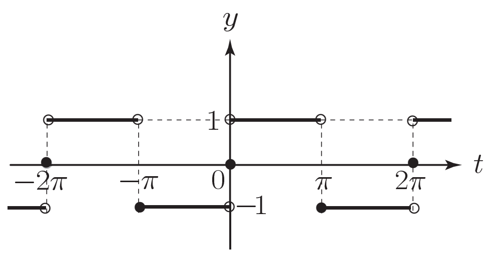
が存在して有限である。$t_k = a$ のときは右極限 $f(t_k + 0)$, $f'(t_k + 0)$ が
存在して有限である。$t_k = b$ のときは左側極限 $f(t_k - 0)$, $f(t_k - 0)$ が存在して有限である。

[定義 1.21]　$f(t)$ が任意有限区間で区分的に滑らかであるとき, $f(t)$ を単に**区分的に滑らか**であるという。

例 1　関数 $f(t)$ が周期 2π をもつ周期関数で, 微分可能であり, かつその導関数が連続であれば, 区分的に滑らかである。

例 2　$f(t)$ が周期 2π の周期関数で

$$f(t) = \begin{cases} -1 & : \quad -\pi \leqq t < 0 \\ 0 & : \quad t = 0 \\ 1 & : \quad 0 < t < \pi \end{cases}$$



のとき $f(t)$ は区分的に滑らかであり

$$f(0-0) = -1 \quad , \quad f(0+0) = 1 \quad , \quad f(-\pi - 0) = 1 \quad , \quad f(-\pi + 0) = -1$$
$$f'(0-0) = 0 \quad , \quad f'(0+0) = 0 \quad , \quad f'(-\pi - 0) = 0 \quad , \quad f'(-\pi + 0) = 0$$

である。

< 区分的になめらかな関数 2 >

補題 1.6　周期 p $(p>0)$ の周期関数 $f(t)$ が区分的に滑らかであれば
次式が成り立つ。

① $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t+h)-f(t+0)}{h} = f'(t+0)$

② $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t-h)-f(t-0)}{-h} = f'(t-0)$

[証明] ＜①の証明＞

t に対し, 正数 δ (>0) を十分小さくとり,

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & : \quad t < s \leqq t+\delta \\ f(t+0) & : \quad s = t \end{cases}$$

とおくと $\tilde{f}(s)$ は $[t, t+\delta]$ で連続であり, $(t, t+\delta)$ で微分可能である
ようにできる。$\delta > h > 0$ である h に対し, $\tilde{f}$ の区間 $[t, t+h]$ での
平均値の定理から

$$f(t+h)-f(t+0) = \tilde{f}(t+h)-\tilde{f}(t) = h\tilde{f}'(c) = hf'(c)$$

をみたす c $(t<c<t+h)$ が存在する。よって

$$\frac{f(t+h)-f(t+0)}{h} = f'(c) \qquad\qquad (t<c<t+h)$$

が成り立つ。f は区分的になめらかであるから $h\to 0$ 　$(h>0)$ とすると

$c \to t+0,\quad f'(c)\to f'(t+0)$ より

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t+h)-f(t+0)}{h} = f'(t+0)$$

が成り立つ。

②の証明も同様である。

< フーリエ級数の収束 >

$f(t)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

とおく。

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \ \ , \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \ \ , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

である。

定理 1.1

> $f(t)$ が区分的に滑らかであれば, 全ての実数 t に対して
>
> $$\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$
>
> が成立する。

証明は p26 参照。

(注)　$t = t_0$ で $f(t)$ が連続であれば $f(t_0-0) = f(t_0+0) = f(t_0)$ より　$\lim_{n\to\infty} S_n(t_0) = f(t_0)$ が成り立つ。

<u>例</u>　$f(t)$ が <u>P.9</u> の例の場合、$-\pi \leqq t < \pi$ では　$f(t) = \begin{cases} 1: & 0 \leqq t < \pi \\ 0: & -\pi < t < 0 \end{cases}$　である。

フーリエ級数の第 n 部分和は $S_n(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1-(-1)^k}{\pi k}\sin(kt)$ となるから,

フーリエ級数の収束定理より

$$(*) \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi k}\sin(kt) = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

が成り立つ。$t = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdots ①$$

となる。一方 $t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(t)$ は連続だから

$$(*) \text{ の右辺} = \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right\} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdots ②$$

となる。①=②より

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1$$

だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。この等式をライプニッツ (Leibniz) の公式という。

< 一般周期のフーリエ級数 >

正数 $L\ (>0)$ と自然数 $n\ (\geqq 1)$ および実数定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ に対し,

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\left(\frac{\pi k}{L} t\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} t\right) \right\}$$

とおくと, $S(t+2L) = S(t)$ が成り立つ。すなわち $S(t)$ は周期 $2L$ の周期関数である。

このとき

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(t)dt = a_0 \quad , \quad \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(t)\cos\left(\frac{\pi k}{L}t\right)dt = a_k \quad , \quad \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(t)\sin\left(\frac{\pi k}{L}t\right)dt = b_k$$

が成り立つ。この結果より, 周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{\pi k}{L} t\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} t\right) \right\}$$

$$\left(a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{\pi k}{L}t\right)dt \quad , \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{\pi k}{L}t\right)dt \right)$$

と表わされる。前ページの定理 1.1 と同様にして, 次の定理が成り立つ。

定理 1.2

周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ が区分的に滑らかであれば,

フーリエ級数は全ての実数 t に対して収束し,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\left(\frac{\pi k}{L} t\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} t\right) \right\} \right) = \frac{1}{2}\left\{ f(t-0) + f(t+0) \right\}$$

が成り立つ。

(証明は P.26)

(注)　$f(t)$ が $t = t_0$ で連続であれば, $f(t_0 - 0) = f(t_0 + 0) = f(t_0)$ より

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\left(\frac{\pi k}{L} t_0\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} t_0\right) \right\} \right) = f(t_0)$$

が成り立つ。

< 複素数値関数 >

まず複素数の計算を復習する。

複素数 $z=x+iy$ ($i=\sqrt{-1}$, x と y は実数) に対し $\overline{z}=x-iy$ を z の共役な複素数, $|\,z\,|=\sqrt{x^2+y^2}$ を z の絶対値という。次式が成り立つ。ただし K は実数とする。

① $z\overline{z}=|\,z\,|^2$　② $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$　③ $\overline{Kz}=K\overline{z}$　④ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(証明)①,②,③は明らか。④を示す。$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ (x_1,y_1,x_2,y_2 は実数)

とすると $\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}=\overline{x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)}=x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+y_1x_2)$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+y_1x_2)$ より等しい。 (証明終)

実数変数 t の複素数値関数 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$　($\varphi(t),\psi(t)$ は実数値関数) に対し

$$\frac{d}{dt}z(t)=\lim_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}=\frac{d}{dt}\varphi(t)+i\frac{d}{dt}\psi(t)$$

$$\frac{d}{dt}Z(t)=z(t) \text{ のとき } \int_a^b z(t)dt=[Z(t)]_a^b=Z(b)-Z(a)$$

と定めると

$$\int_a^b(\varphi(t)+i\psi(t))dt=\int_a^b\varphi(t)dt+i\int_a^b\psi(t)dt$$

より $\boxed{\overline{\int_a^b z(t)dt}=\int_a^b\overline{z(t)}dt}$ が成り立つ。また実数 x,y に対し

オイラーの公式 $\boxed{e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)}$ より次式が従う。

$$\boxed{⑤\quad \frac{d}{dt}e^{(x+iy)t}=(x+iy)e^{(x+iy)t}\quad,\quad ⑥\quad \int_a^b e^{(x+iy)t}dt=\left[\frac{1}{x+iy}e^{(x+iy)t}\right]_a^b\quad (x+iy\neq 0)}$$

(ただし x,y は実数である。)

(証明)⑤のみ証明する。

$$\frac{d}{dt}e^{(x+iy)t}=\frac{d}{dt}e^{xt}\cos(yt)+i\frac{d}{dt}e^{xt}\sin(yt)$$

$$=xe^{xt}\cos(yt)-ye^{xt}\sin(yt)+i\left\{xe^{xt}\sin(yt)+ye^{xt}\cos(yt)\right\}$$

$$=(x+iy)e^{xt}\cos(yt)+(-y+ix)e^{xt}\sin(yt)=e^{xt}\{(x+iy)\cos(yt)+i(x+iy)\sin(yt)\}$$

$$=(x+iy)e^{xt}\{\cos(yt)+i\sin(yt)\}=(x+iy)e^{xt}\cdot e^{iyt}=(x+iy)e^{(x+iy)t}$$ (証明終)

< フーリエ級数の複素数表示 1 >

周期 $2L\ (>0)$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\}$$

とおく。ここで $\omega = \dfrac{\pi}{L}$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(k\omega t)dt \quad , \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

である。オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (i=\sqrt{-1}\ \text{は虚数単位}\ ,\ \theta\ \text{は実数})$$

より $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{-i\theta}-e^{i\theta}\right)$$

と表される。この式を $S_n(t)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k \times \frac{1}{2}\left(e^{ik\omega t}+e^{-ik\omega t}\right) + b_k \times \frac{i}{2}\left(e^{-ik\omega t}-e^{ik\omega t}\right)\right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{a_k}{2}-\frac{b_k}{2}i\right)e^{ik\omega t} + \left(\frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2}i\right)e^{-ik\omega t}\right\} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad c_k = \frac{a_k}{2}-\frac{b_k}{2}i \quad , \quad c_{-k} = \frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2}i$$

とおくと

$$\begin{aligned} S_n(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{c_k e^{ik\omega t} + c_{-k}e^{-ik\omega t}\right\} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}e^{-ik\omega t} \\ &= c_0 e^0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ik\omega t} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{ik\omega t} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t} \end{aligned}$$

と表される。

< フーリエ級数の複素数表示 2 >

前ページの c_k ，c_{-k} ，c_0 は

$$c_k = \frac{1}{2}\{a_k - b_k i\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(k\omega t)dt - \frac{i}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(k\omega t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\{\cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t)\}dt = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt \ \cdots ①$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}\{a_k + b_k i\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(k\omega t)dt + \frac{i}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(k\omega t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\{\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)\}dt = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{ik\omega t}dt \ \cdots ②$$

$c_0 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)dt = \dfrac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{0}dt \ \cdots ③$ と表される。

①,②,③より　$S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}$ の係数 c_k は、いずれも

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-k\omega t}dt \qquad (-n \leqq k \leqq n)$$

と表される。ここで $n \to \infty$ の極限を考えると、$f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \sim \lim_{n\to\infty} S_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

となる。よって周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$\boxed{f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}}$$

と表される。ここで $\omega = \dfrac{\pi}{L}$ ，$c_k = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt,$

$a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)dt$　，　$a_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\cos(k\omega t)dt$　，　$b_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\sin(k\omega t)dt$

である。

[定義 1.22] $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ を $f(t)$ の**フーリエ級数の複素数表示**または**複素フーリエ級数**という。

(注)　c_k と $e^{ik\omega t}$ は共に複素数であるが,

$$c_k e^{ik\omega t} + c_{-k}e^{-ik\omega t} = a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)$$

は実数である。

< ディレクレ核 >

[定義 1.23]　正数 L に対し、$\omega = \dfrac{\pi}{L}$ とおく。自然数 n に対し

$$D_n(t) = \frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t}$$

を ディリクレ **(Dirichlet)** 核という。次が成り立つ。

補題 1.7

① $\displaystyle\int_{-L}^{L} D_n(t)dt = 1$　　② $D_n(-t) = D_n(t)$

③ $\displaystyle\int_{-L}^{0} D_n(t)dt = \int_{0}^{L} D_n(t)dt = \frac{1}{2}$　　④ $D_n(t+2L) = D_n(t)$

⑤ $$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega t\right)}{2L\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)} & : \ 0 < |t| \leqq L \ \text{ のとき} \\ \dfrac{2n+1}{2L} & : \ t = 0 \ \text{ のとき} \end{cases}$$

< 証明 >

① $k \neq 0$ のとき $\displaystyle\int_{-L}^{L} e^{ik\omega t}dt = \left[\frac{1}{ik\omega}e^{ik\omega t}\right]_{-L}^{L} = \frac{1}{ik\omega}\left\{e^{ik\omega L} - e^{-ik\omega L}\right\}$

$$= \frac{1}{ik\omega}\{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}\} = \frac{1}{ik\omega}\{\cos(k\pi) + i\sin(k\pi) - \cos(k\pi) + i\sin(k\pi)\} = 0 \ \text{ より}$$

$$\int_{-L}^{L} D_n(t)dt = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{ik\omega t}dt = \sum_{k=-n}^{-1}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{ik\omega t}dt + \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{0}dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{ik\omega t}dt$$

$$= 0 + \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dt + 0 = 1$$

② $\displaystyle D_n(-t) = \frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\omega t}dt = \frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t} = D_n(t)$

③ は ① と ② より明らか。

④ $\displaystyle D_n(t+2L) = \frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(t+2L)} = \frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t+2\pi i} = \frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t} = D_n(t)$

⑤ $t = 0$ のとき $\displaystyle D_n(0) = \frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^{n} e^{0} = \frac{2n+1}{2L}$ である。$0 < |t| \leqq L$ のとき $e^{i\omega t} \neq 1$ より

$$D_n(t) = \frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t} = \frac{1}{2L}(e^{i\omega t})^{-n}\sum_{k=0}^{2n}(e^{i\omega t})^{k}$$

$$= \frac{1}{2L}e^{-in\omega t} \times \frac{1-(e^{i\omega t})^{2n+1}}{1-e^{i\omega t}} = \frac{e^{-in\omega t} - e^{i(n+1)\omega t}}{2L(1-e^{i\omega t})}$$

$$= \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} - e^{i(n+\frac{1}{2})\omega t}}{2L(e^{-\frac{i}{2}\omega t} - e^{\frac{i}{2}\omega t})} = \frac{-2i\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega t\right)}{2L \times \{-2i\sin(\frac{\omega}{2}t)\}} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega t\right)}{2L\sin(\frac{\omega}{2}t)}$$

(証明終)

< ベッセルの不等式 >

正数 L に対し、周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分は

$$S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t} \quad , \quad \left(\omega=\frac{\pi}{L} \quad , \quad c_k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt\right)$$ と表される。

補題 1.8

> 次の不等式が成り立つ。
>
> $$(*) \quad \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leqq \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 dt$$

(証明)　前ページ ① の証明より、整数 $k,\ \ell$ に対し $\displaystyle\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{i(k-\ell)\omega t}dt=\begin{cases} 1 & : \quad k=\ell \\ 0 & : \quad k\neq\ell \end{cases}$ である。

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \mid S_n(t)\mid^2 dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} S_n(t)\cdot\overline{S_n(t)}dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}\right)\cdot\left(\overline{\sum_{\ell=-n}^{n} c_k e^{i\ell\omega t}}\right)dt$$

$$=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(c_k e^{ik\omega t}\right)\cdot\left(\overline{c_\ell}e^{-i\ell\omega t}\right)dt=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n} c_k\cdot\overline{c_\ell}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{i(k-\ell)\omega t}dt$$

$$=\sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot\overline{c_k}=\sum_{k=-n}^{n}\mid c_k\mid^2$$ である。また $c_k=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt$ に対して

$$\overline{c_k}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\overline{f(t)e^{-ik\omega t}}dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{ik\omega t}dt$$ 　($f(t)$ は実数) だから

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} S_n(t)f(t)dt=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} c_k e^{ik\omega t}f(t)dt=\sum_{k=-n}^{n} c_k\times\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{ik\omega t}dt$$

$$=\sum_{k=-n}^{n} c_k\times\overline{c_k}=\sum_{k=-n}^{n}\mid c_k\mid^2$$ である。この結果から

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\mid S_n(t)-f(t)\mid^2 dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\{\mid S_n(t)\mid^2 -2S_n(t)f(t)+\mid f(t)\mid^2\}dt$$

$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\mid S_n(t)\mid^2 dt-2\times\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} S_n(t)f(t)dt+\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\mid f(t)\mid^2 dt$$

$$=\sum_{k=-n}^{n}\mid c_k\mid^2 -2\times\sum_{k=-n}^{n}\mid c_k\mid^2+\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\mid f(t)\mid^2 dt$$

$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\mid f(t)\mid^2 dt-\sum_{k=-n}^{n}\mid c_k\mid^2$$ である。よって

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\mid f(t)\mid^2 dt-\sum_{k=-n}^{n}\mid c_k\mid^2=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\mid S_n(t)-f(t)\mid^2 dt\geqq 0$$ 　より

不等式 $(*)$ が得られる。　(証明終)

(注)　不等式 $(*)$ を **ベッセル (Bessel)** の不等式という。

< パーセバルの等式 >

周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ係数は、 $c_k = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt \quad \left(\omega = \dfrac{\pi}{L}\right)$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt,\ a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(k\omega t)dt,\ b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

であった。ここで $c_0 = \dfrac{a_0}{2},\ c_k = \dfrac{1}{2}(a_k - b_k i),\ c_{-k} = \dfrac{1}{2}(a_k + b_k i)$ の関係から

$|\ c_0\ |^2 = \dfrac{|\ a_0\ |^2}{4},\ |\ c_k\ |^2 = \dfrac{1}{4}\left(|\ a_k\ |^2 + |\ b_k\ |^2\right) \quad (k = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm n)$ である。

前ページのベッセルの不等式から

$$\sum_{k=-n}^{n} |\ c_k\ |^2 = \frac{|\ a_0\ |^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|\ a_k\ |^2 + |\ b_k\ |^2\right) \leqq \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |\ f(t)\ |^2\ dt \quad (n \geqq 1)$$

となる。ここで $n \to \infty$ の極限をとると、左辺は単調増大列で収束するので次式が得られる。

補題 1.9 次式が成り立つ。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\ c_k\ |^2 = \frac{1}{4}|\ a_0\ |^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\ a_k\ |^2 + |\ b_k\ |^2\right) \leqq \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |\ f(t)\ |^2\ dt$$

この不等式も**ベッセルの不等式**という。また次の定理が成り立つ。

定理 1.3 $f(t)$ が $[-L,\ L]$ で連続であれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L} |\ S_n(t) - f(t)\ |^2\ dt = 0$

(注) この定理の収束を ($S_n(t)$ が $f(t)$ への) **二乗平均収束**という。この定理の証明は p.90 を参照。

補題 1.10 $f(t)$ が $[-L,\ L]$ で連続であれば、次式が成り立つ。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\ c_k\ |^2 = \frac{|\ a_0\ |^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\ a_k\ |^2 + |\ b_k\ |^2\right) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |\ f(t)\ |^2\ dt$$

(注) この補題の等式を**パーセバル (Parseval) の等式**という。

(証明) 前ページの証明の等式 $\displaystyle\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |\ f(t)\ |^2\ dt - \sum_{k=-n}^{n} |\ c_k\ |^2 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |\ S_n(t) - f(t)\ |^2\ dt$

と定理 1.3，補題 1.9 より明らか。

例 $L = \pi,\ f(t) = \pi - |\ t\ | \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$ のとき p11 より $a_0 = \pi,\ a_k = \dfrac{2\{1-(-1)^k\}}{\pi k^2},\ b_k = 0$

である。 $f(t)$ は $[-\pi,\ \pi]$ で連続だからパーセバルの等式より

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2\{1-(-1)^k\}}{\pi k^2}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\ \pi - |\ t\ ||^2\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)^2 dt$$

$\dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^2}{(2n-1)^4} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(\pi-t)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$ だから等式 $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$

が得られる。

< リーマン・ルベーグの補題 >

周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ係数は $c_k = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt \quad \left(\omega = \dfrac{\pi}{L}\right)$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt,\quad a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(k\omega t)dt,\quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

である。

補題 1.11

次式が成り立つ。

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid = 0$　　② $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mid b_n \mid = 0$

[証明] ①を示す。ベッセルの不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid^2 \leqq \frac{\mid a_0 \mid^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mid a_k \mid^2 + \mid b_k \mid^2\right) \leqq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mid f(t) \mid^2 dt < \infty$$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^2$ は収束する。その和を S とし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^2 = S_n$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid^2 = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid = 0$ すなわち，①が成り立つ。②も同様である。 (証明終)

補題 1.12

次式が成り立つ。

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\omega t)dt = 0$　　② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(n\omega t)dt = 0$

ここで $\omega = \dfrac{\pi}{L}$ である。

(注) この補題を**リーマン・ルベーグの補題**という。

[証明]　補題 1.11 より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\omega t)dt = \lim_{n\to\infty} L \times \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\omega t)dt = \lim_{n\to\infty} L \times a_n = 0$$

より①が示された。②も同様である。(証明終)

< フーリエ級数の収束定理の証明 1 >

定理 1.4　周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ が区分的に滑らかであれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L} f(s)D_n(t-s)ds = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

がすべての実数 t に対して成立する。ここで $D_n(t)$ はディリクレ核 (p21) である。

< 証明 >　$D_n(t)$ は偶関数であり、 $f(u+t)D_n(u)$ は周期 2L の周期関数だから

$$\int_{-L}^{L} f(s)D_n(t-s)ds = \int_{-L}^{L} f(s)D_n(s-t)ds = \int_{-L+t}^{L+t} f(u+t)D_n(u)du$$

$$= \int_{-L}^{L} f(u+t)D_n(u)du$$　となる。ここで

$$I_n = \int_{-L}^{L} f(u+t)D_n(u)du - \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

$$II_n = \int_{-L}^{0} f(u+t)D_n(u)du - \frac{1}{2}f(t-0), \qquad III_n = \int_{0}^{L} f(u+t)D_n(u)du - \frac{1}{2}f(t+0)$$

とおく。ディリクレ核の性質 (補題 1.7) より

$$II_n = \int_{-L}^{0} f(u+t)D_n(u)du - f(t-0)\times\int_{-L}^{0} D_n(u)du = \int_{-L}^{0}\{f(u+t)-f(t-0)\}D_n(u)du$$

$$= \int_{0}^{L}\{f(t-s)-f(t-0)\}D_n(s)ds = \frac{1}{2L}\int_{0}^{L}\left\{\frac{f(t-s)-f(t-0)}{\sin(\frac{\omega}{2}s)}\right\}\cdot\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega s\right)ds$$

と表される。ここで

$$F(s) = \begin{cases} \dfrac{f(t-s)-f(t-0)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)} & : \ 0 < s \leqq L \\ 0 & : \ s = 0 \end{cases}$$

とおく。 $f(t)$ は区分的に滑らかであるから補題 1.6 より

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} F(s) = \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} \frac{f(t-s)-f(t-0)}{-s}\times\left\{-\frac{\frac{\omega}{2}s}{\sin(\frac{\omega}{2}s)}\right\}\times\frac{2}{\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega}f'(t-0)\times(-1)\times\frac{2}{\omega} = -\frac{2L}{\pi}f'(t-0)$$

となるから， $F(s)$ は $[0,\ L]$ で区分的に連続である。ここで

$$f_1(s) = \begin{cases} F(s)\cos(\frac{\omega}{2}s) & : \ 0 < s \leqq L \\ 0 & : \ -L \leqq s \leqq 0 \end{cases}, \qquad f_2(s) = \begin{cases} F(s)\sin(\frac{\omega}{2}s) & : \ 0 < s \leqq L \\ 0 & : \ -L \leqq s \leqq 0 \end{cases}$$

とおく。

< フーリエ級数の収束定理の証明 2 >

< 定理 1.4 の証明の続き >

$F(s)$ が区分的に連続だから、$f_1(s)$ と $f_2(s)$ も区分的に連続である。

$[-L,\ L]$ で区分的に連続であれば、有界で積分可能である。

従って $f_1(s)$ と $f_2(s)$ に対するリーマン・ルベーグの補題より

$$\lim_{n\to\infty} II_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2L}\int_0^L F(s)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega s\right)ds$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2L}\left\{\int_0^L F(s)\cos\left(\frac{\omega}{2}s\right)\cdot\sin(n\omega s)ds + \int_0^L F(s)\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)\cdot\cos(n\omega s)ds\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2L}\left\{\int_{-L}^L f_1(s)\cdot\sin(n\omega s)ds + \int_{-L}^L f_2(s)\cdot\cos(n\omega s)ds\right\} = 0$$

が成り立つ。同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} III_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^L f(u+t)D_n(u)du - \frac{1}{2}f(t+0)\right\} = 0$ も

示される。　よって

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{-L}^L f(s)D_n(t-s)ds - \frac{1}{2}\Big\{f(t-0)+f(t+0)\Big\}\right] = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}(II_n + III_n) = 0$$

(証明終)

< 定理 1.2 の証明 >

$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \Big\{a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\Big\} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{L}\right)$$

とおくと

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-n}^n \left\{\frac{1}{2L}\int_{-L}^L f(s)e^{-ik\omega s}ds\right\}e^{ik\omega t}$$

$$= \int_{-L}^L f(s)\left\{\frac{1}{2L}\sum_{k=-n}^n e^{ik\omega(t-s)}\right\}ds = \int_{-L}^L f(s)D_n(t-s)ds$$

と表される。よって定理 1.4 より

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \lim_{n\to\infty}\int_{-L}^L f(s)D_n(t-s)ds = \frac{1}{2}\Big\{f(t-0)+f(t+0)\Big\}$$

が成り立つ。　(証明終)

< フーリエ級数の練習 >

問 1　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が次の場合に、$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。

(1) $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : \ 0 \leqq t < \pi \\ 0 & : \ -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$　　　(2) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ \frac{\pi}{2} \leqq t < \pi \\ \frac{\pi}{2} & : \ 0 \leqq t < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & : \ -\frac{\pi}{2} \leqq t < 0 \\ 0 & : \ -\pi \leqq t < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

(3) $f(t) = |t| - \pi \quad (-\pi \leqq t < \pi)$　　　(4) $f(t) = \dfrac{1}{2}t^2 \quad (-\pi \leqq t < \pi)$

問 2 問 1(3) のフーリエ級数の収束の結果を利用して、 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ の値を求めよ。

問 3 問 1(2) のフーリエ級数の収束の結果を利用して、 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ の値を求めよ。

問 4 問 1(4) のフーリエ級数の収束の結果を利用して、次の和を求めよ。

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$　　　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

問 5 問 1(4) のフーリエ級数にパーセバルの等式を適用することによって、 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ の値を求めよ。

問 6 自然数 n と定数 t $(\neq 2m\pi,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ に対し、次式が成り立つことを証明せよ。

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\Bigl((n+\frac{1}{2})t\Bigr)}{\sin\frac{t}{2}}$$

第 2 章　フーリエ変換

< 極限 >

$x \to +\infty,\ x \to -\infty$ のときの極限を復習する。

① $0 < r < 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r^x = 0$　,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} r^x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^y = +\infty$

② $r > 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r^x = +\infty$　,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} r^x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^y = 0$

例 1　$\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-2b} = 0$　,　$\displaystyle\lim_{a\to-\infty} e^{-2a} = +\infty$

例 2　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0$　(ロピタルの定理 (P91) より)

例 3　$\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{(-2+3i)b}$　を考える。　ここで

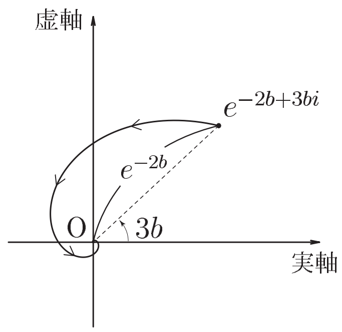
$$e^{(-2+3i)b} = e^{-2b} \times e^{3ib}$$

$$|e^{3ib}| = |\cos(3b) + i\sin(3b)|$$

$$= \sqrt{\cos^2(3b) + \sin^2(3b)} = \sqrt{1} = 1 \qquad \text{だから}$$

$$\left|e^{(-2+3i)b}\right| = \left|e^{-2b}\right| \cdot \left|e^{3ib}\right| = e^{-2b} \quad\longrightarrow\quad 0 \ \ (b \to \infty)$$

より　$\displaystyle\lim_{b\to\infty} e^{(-2+3i)b} = 0$



(注)　例 3 の収束は複素数平面上の点 $e^{(-2+3i)b} = e^{-2b}\cos(3b) + ie^{-2b}\sin(3b)$ が原点 O に近づくことを意味する。

問　次の極限値を求めよ。ただし $\alpha,\ \beta > 0,\ t \neq 0$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{b\to\infty} e^{-\alpha b}$

(2) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} e^{\beta a}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{n}{4}t^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{b\to\infty} e^{-(2+3i)b}$

(6) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)a}$

＜ 広義積分 1 ＞

[定義 2.1] 任意の有限区間で積分可能な関数 $f(t)$ に対して、極限

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt \ , \qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)dt \ , \qquad \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt$$

がそれぞれ存在する場合は、その値を

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt = \int_a^\infty f(t)dt \ , \qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)dt = \int_{-\infty}^b f(t)dt$$

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt = \int_{-\infty}^\infty f(t)dt$$

と書き、**広義の定積分** または**広義積分**という。

(注 1)　$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b f(t)dt$ が存在しても $\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt$　が存在しない場合がある。

<u>例 1</u>　$f(t)=\mathrm{sgn(t)}=\begin{cases} 1 & : \ t>0 \text{ のとき} \\ 0 & : \ t=0 \text{ のとき} \\ -1 & : \ t<0 \text{ のとき}\end{cases}$　(符号関数) の場合 $\displaystyle\int_{-b}^b f(t)dt=0$　より

$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b f(t)dt$ は存在するが $\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt$　は存在しない。

(注 2)　極限 $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b f(t)dt$ が存在する場合、$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b f(t)dt$ を $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$ の**主値**という。

<u>例 2</u>　$$\int_{-\infty}^\infty e^{-2|t|+3it}dt = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b e^{-2|t|+3it}dt = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\left\{\int_a^0 e^{2t+3it}dt + \int_0^b e^{-2t+3it}dt\right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\left\{\left[\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}\right]_a^0 + \left[\frac{1}{-2+3i}e^{(-2+3i)t}\right]_0^b\right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\left\{\frac{1}{2+3i} - \frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)a} + \frac{1}{-2+3i}e^{(-2+3i)b} - \frac{1}{-2+3i}\right\}$$

ここで $\left|e^{(2+3i)a}\right| = e^{2a} \to 0 \ \ (a\to-\infty), \quad \left|e^{(-2+3i)b}\right| = e^{-2b}\to 0 \ \ (b\to\infty)$ より

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-2|t|+3it}dt = \frac{1}{2+3i} - \frac{1}{-2+3i} = \frac{2-3i+2+3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{4}{13}$$

<u>問</u>　次の値を求めよ。ただし、 $\alpha, \ \beta, \ r \ (\alpha>0, \ \beta>0, \ r>1)$ は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$　　　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{\beta t}dt$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^r}dt$　　　　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha|t|+\beta it}dt$

< 広義積分 2 >

定理 2.1　定数 α, β に対し、次式が成り立つ。ただし $\alpha > 0$

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\ \frac{\sin(\beta t)}{t}dt = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

< **証明の概略** >

(1) $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt$ とおくと部分積分法より

$$I = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\beta\sin(\beta t)dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin(\beta t)dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\left\{\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\beta}\beta\cos(\beta t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt = \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 I$$

であるから

$$I = \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

(2) $f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\ \frac{\sin(xt)}{t}dt$ とおいて x で微分すると

$$\frac{d}{dx}f_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\frac{d}{dx}\sin(xt)}{t}dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(xt)dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$$

よって $f_\alpha(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) + C$ (C は定数)。　ここで $x=0$ のとき

$f_\alpha(0) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{0}{t}dt = 0$　より　$C = 0$　よって　$f_\alpha(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$

従って $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin(\beta t)}{t}dt = f_\alpha(\beta) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$

(注) 上記定理 (2),(3) の厳密な証明は P99,100 を参照されたい。

< 広義積分 3 >

定理 2.2　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

＜証明＞

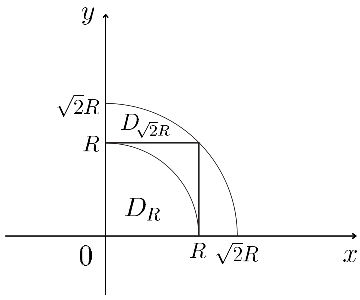
$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy\right)$$

$$D_R = \{(x,\ y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq R^2\}$$

とおくと

$$D_R \subset \{(x,\ y)\ :\ 0 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq R\} \subset D_{\sqrt{2}R}$$

より



（※）$\displaystyle\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqq \int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy \leqq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}dxdy$

である。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変数変換すると $\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = r$ より

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{2}\times\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

である。（※）より

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leqq \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \leqq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

ここで $R\to\infty$ とすると

$$\frac{\pi}{4} \leqq \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 \leqq \frac{\pi}{4}$$

より $\displaystyle\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ となる。（証明終）

(注 1)　$f(x) = e^{-x^2}$ は急減少関数 (P.38) であるから

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^2}dx$ は収束する。

(注 2)　多項式（整式）, 分数関数, べき関数, 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数, 双曲線関数,

逆双曲線関数およびそれらの関数を組み合わせて得られる関数を **初等関数** という。

不定積分 $\displaystyle\int e^{-x^2}dx, \int\frac{\sin x}{x}dx, \int\frac{1}{\log x}dx, \int\frac{1}{xe^x}dx, \int\frac{\cos x}{x}dx, \int\sin(x^2)dx$ 等は初等関数では

表されないことがわかっている。

しかし不定積分がわからなくても，定積分が求まることがある。

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}\ ,\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

はその代表的な例であり，フーリエ解析に重要な役割を果す。

< フーリエ変換の導出 >

周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

であった。ここで

$$\omega = \frac{\pi}{L} \quad , \quad c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt$$

である。

$f(t)$ が周期関数でないときは、$f(t)$ をフーリエ級数で表現できない。

そのときは周期 $2L$ が無限大 $(=\infty)$ の関数と考えて、 $L \to \infty$ の極限を考える。

$$F_L(x) = \int_{-L}^{L} f(t)e^{-ixt}dt, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

とおくと $\omega = \dfrac{\pi}{L}$ より

$$c_k = \frac{1}{2L}F_L(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}F_L(k\omega)$$

である。ここで $\omega = \Delta x$ とおくと、$L \to \infty$ のとき $\Delta x \to 0$ であり、$F_L(x) \to F(x)$ より

$k\Delta x \to x$ と考えて、

$$f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi}F_L(k\omega)e^{ik\omega t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F_L(k\Delta x)e^{ik\Delta xt}\Delta x \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F(x)e^{ixt}dx$$

と考えられる。つまり

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \quad , \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

が得られる。 $F(x)$ を $f(t)$ のフーリエ変換という。

(注)　このページの推論は厳密な証明ではない。

この収束を保証するには、 $f(t)$ にかなりの制限が必要である。(p107 参照)

< フーリエ変換の定義 >

[定義 2.2] 前ページの結果より

$$(*)\qquad \boxed{\; f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \ , \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt \;}$$

が得られた。$F(x)$ を $f(t)$ の**フーリエ変換**という。また $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$ を $F(x)$ の**フーリエ逆変換**という。

フーリエ変換にはいろいろな定義があるが，このワークブックでは $(*)$ 式を用いることにする。

(注 1) 信号処理や通信理論の本では $(*)$ 式の変数 x を ω で表す場合が多い。即ち $(*)$ 式のかわりに

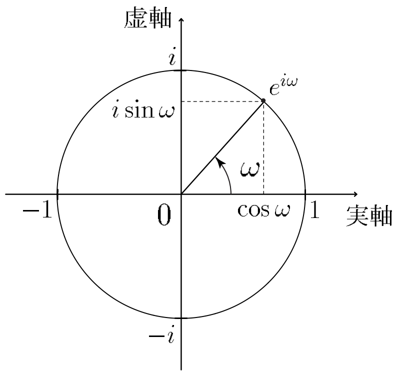
$$(*)'\qquad \boxed{\; f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \ , \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \;}$$

を用いる。t が時刻を表す変数の場合に，ω を**角周波数**という。

t の単位が秒であれば，関数

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

は複素平面上の単位円を 1 秒間に角度 ω だけ回転する。



(注 2) フーリエ変換の別の定義式を紹介しておく。$(*)'$ 式において

$$\ell = \frac{\omega}{2\pi} \ , \qquad \mathcal{F}(\ell) = F(2\pi\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt$$

とおくと $\omega = 2\pi\ell$，$d\omega = 2\pi d\ell$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi\ell)e^{i2\pi\ell t}2\pi d\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell$$

となるので，$(*)'$ は

$$(**)\qquad \boxed{\; f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell \ , \qquad \mathcal{F}(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt \;}$$

と書きなおせる。$(**)$ もフーリエ変換の定義式としてよく使われる。t が時刻を表す変数のとき，ℓ を**周波数**という。関数

$$e^{i2\pi\ell t} = \cos(2\pi\ell t) + i\sin(2\pi\ell t)$$

の実部 $\cos(2\pi\ell t)$ と虚部 $\sin(2\pi\ell t)$ は基本周期が $\dfrac{1}{\ell}$ である。t の単位が秒であれば，1 秒間に基本波形が ℓ 回現れる。

< フーリエ変換 1 >

[定義 2.3] $f(t)$ のフーリエ変換 $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ を

$$\boxed{\mathscr{F}\,[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt} \qquad : \ f(t) \text{ のフーリエ変換}$$

と表すことにする。

[定義 2.4] 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意有限区間で積分可能であり、 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$

であるとき、$f(t)$ を**絶対可積分**であるという。このとき $\displaystyle\lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(t)dt$

は収束する (p97)。また $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-ixt}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ より

$\displaystyle\lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(t)e^{-ixt}dt$ は収束する (p97)。従ってこのとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(t)dt, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(t)e^{-ixt}dt$$

が成り立つ。フーリエ変換を考えるとき、常に $f(t)$ は絶対可積分とする。

<u>例</u>　オイラーの公式より絶対可積分関数 $f(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}\,[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(t)\{\cos(xt) - i\sin(xt)\}dt$$

となる。今、 $f(t)$ が偶関数であれば $f(t)\cos(xt)$ は偶関数、 $f(t)\sin(xt)$ は奇関数だから

$$\mathscr{F}\,[f(t)] = \lim_{b\to\infty}\left\{\int_{-b}^{b} f(t)\cos(xt)dt - i\int_{-b}^{b} f(t)\sin(xt)\right\}dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{2\int_{0}^{b} f(t)\cos(xt)dt - i\times 0\right\} = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt$$

<u>問 1</u>　絶対可積分関数 $f(t)$ が奇関数のとき、フーリエ変換 $\mathscr{F}\,[f(t)]$ を例のように簡単にせよ。

<u>問 2</u>　正定数 T に対し、

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ |\,t\,| \leqq T \text{ のとき} \\ 0 & : \ |\,t\,| > T \text{ のとき} \end{cases}$$

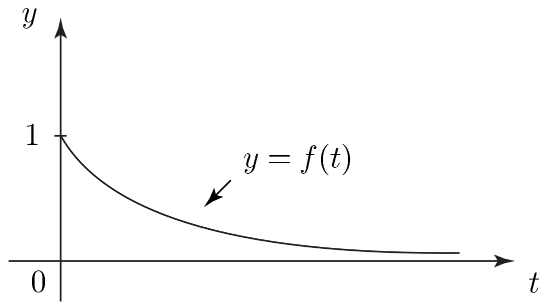
とする。このとき $\mathscr{F}\,[f(t)]$ を求めよ。

< フーリエ変換 2 >

問 1 正定数 $T(>0)$ に対し

$$f(t)=\begin{cases}1 & : \ 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & : \text{その他}\end{cases}$$

とする。このとき $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。



例　正定数 $\alpha(>0)$ に対し

$$f(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0\end{cases}$$

のとき、$f(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-ixt}dt$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-(\alpha+ix)t}dt=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{-(\alpha+ix)}e^{-(\alpha+ix)t}\right]_0^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{1}{\alpha+ix}e^{-(\alpha+ix)b}+\frac{1}{\alpha+ix}\right\}$$

ここで $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-(\alpha+ix)b}=\lim_{b\to+\infty} e^{-\alpha b}\times e^{-ixb}$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\alpha b}}(\cos(xb)-i\sin(xb))=0$$

より $\displaystyle\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{\alpha+ix}$

問 2　正定数 $\alpha>0$ に対し $f(t)=\begin{cases}0 & : \ t>0 \\ e^{\alpha t} & : \ t\leqq 0\end{cases}$ のときフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。

< フーリエ変換 3 >

問 1　$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & : |t| \leqq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases}$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。

例　$\mathscr{F}[e^{-|t|}] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-ixt} dt = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b e^{-|t|} e^{-ixt} dt$

$$= \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \left\{ \int_a^0 e^t e^{-ixt} dt + \int_0^b e^{-t} e^{-ixt} dt \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \left\{ \left[\frac{1}{1-ix} e^{(1-ix)t} \right]_{t=a}^{t=0} + \left[\frac{1}{-(1+ix)} e^{-(1+ix)t} \right]_{t=0}^{t=b} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \left\{ \frac{1}{1-ix} - \frac{1}{1-ix} e^{(1-ix)a} - \frac{1}{1+ix} e^{-(1+ix)b} + \frac{1}{1+ix} \right\}$$

ここで

$$\lim_{b \to +\infty} e^{-(1+ix)b} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{e^b} \left(\cos(xb) - i \sin(xb) \right) = 0$$

$$\lim_{a \to -\infty} e^{(1-ix)a} = \lim_{a \to -\infty} e^a \left(\cos(xa) - i \sin(xa) \right) = 0$$

より

$$\mathscr{F}\left[e^{-|t|} \right] = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}$$

問 2　正定数 $\alpha > 0$ に対して $\mathscr{F}\left[e^{-\alpha|t|} \right]$ を求めよ。

< 絶対可積分関数 >

$f(t)$ を絶対可積分であるとは，任意有限区間で積分可能であり，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ をみたすときである。

定理 2.3

$f(t)$ が絶対可積分であれば次式が成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{T\to\infty}\int_{T}^{\infty}|f(t)|dt=0$　　$\displaystyle\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{-T}|f(t)|dt=0$

(2) $\displaystyle\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt=F(x)$ は有界で一様連続

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos{(xt)}dt=0$　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin{(xt)}dt=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos{(xt)}dt=0$　　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin{(xt)}dt=0$

(注)　(3) 式も**リーマン・ルベーグの補題**という。

［(3) の証明の概略］

(1) より任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し、十分大きい $T>0$ をとると

$$\int_{T}^{\infty}|f(t)|dt+\int_{-\infty}^{-T}|f(t)|dt<\varepsilon$$

となる。p.23 のリーマン・ルベーグの補題

から十分大きい x をとると

$$\left|\int_{-T}^{T}f(t)\cos{(xt)}dt\right|<\varepsilon,\qquad \left|\int_{-T}^{T}f(t)\sin{(xt)}dt\right|<\varepsilon$$

となるので　$\displaystyle\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos{(xt)}dt\right|\leqq\int_{-\infty}^{-T}|f(t)|dt+\left|\int_{-T}^{T}f(t)\cos{(xt)}dt\right|+\int_{T}^{\infty}|f(t)|dt<2\varepsilon$

より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos{(xt)}dt=0$ が得られる。同様にして $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(xt)dt=0$

が得られる。$\cos{(-xt)}=\cos{(xt)}$　$\sin{(-xt)}=-\sin{(xt)}$ より

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos{(xt)}dt=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin{(xt)}dt=0\qquad\text{(証明終)}$$

(注)　詳しい証明は p.101、p.102 を参照せよ。

< 急減少関数 1 >

[定義 2.5] 実数全体 ($\mathbb{R}$) で定義された複素数値関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が何回でも微分可能であり，任意の非負整数 $m, n\ (\geqq 0)$ に対し，

$$\lim_{t\to\pm\infty}|t|^m\times|f^{(n)}(t)|=0 \qquad \left(f^{(n)}(t)=\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right)$$

が成立するとき，$f=f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の **急減少関数** という。$\mathbb{R}$ 上の急減少関数の全体を $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ で表し，

Schwartz 空間 という。

例　$f(t)=e^{-t^2}$ は急減少関数である。

なぜなら，任意の非負整数 m に対し，ロピタルの定理から

$$\lim_{|t|\to\infty}|t|^m e^{-t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^m}{e^{t^2}}=0$$

がわかるので $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|t|^m e^{-t^2}<\infty$ がわかる。また

$$f^{(n)}(t)=\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}=(t\text{ の }n\text{ 次式})\times e^{-t^2}$$

より　$t^m f^{(n)}(t)=(t\text{ の }n+m\text{ 次式})\times e^{-t^2}$　だから有界であることがわかる。

次の補題が成り立つ。

補題 2.1　$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ とすると，全ての自然数 r に対し

$$t^r f(t)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}), \qquad f^{(r)}(t)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$$

補題 2.2　$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ならば f は絶対可積分 $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty\right)$ である。

補題 2.3　$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ のとき，任意の自然数 m に対して，

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\mathscr{F}\left[f(t)\right](x)\right)=(-i)^m\mathscr{F}\left[t^m f(t)\right](x)\ \text{ が成り立つ。}$$

(略証)　$m=1$ のとき

$$\frac{d}{dx}\mathscr{F}[f(t)](x)=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-ixt}\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(-it)e^{-ixt}dt$$

$$=-i\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)e^{-ixt}dt=-i\mathscr{F}[tf(t)](x)$$

2 以上の m についてはこれをくり返す。

(注)　厳密な証明は P.103〜105 を参照。

< 急減少関数 2 >

補題 2.4 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ と自然数 m に対し，次式が成り立つ。

$$\mathscr{F}\left[\frac{d^m}{dt^m}f(t)\right](x) = (ix)^m \mathscr{F}[f(t)](x)$$

（証明）$m = 1$ のとき，

$$\mathscr{F}[f'(t)](x) = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f'(t)e^{-ixt}dt = \lim_{b\to\infty}\left\{\left[f(t)e^{-ixt}\right]_{-b}^{b} - \int_{-b}^{b} f(t)\frac{\partial}{\partial t}e^{-ixt}dt\right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{f(b)e^{-ixb} - f(-b)e^{ixb} - (-ix)\int_{-b}^{b} f(t)e^{-ixt}dt\right\}$$

ここで $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より　$\lim_{b\to\infty} f(b)e^{-ixb} = \lim_{b\to\infty} f(-b)e^{-ixb} = 0$ だから

$$\mathscr{F}[f'(t)](x) = ix\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = ix\mathscr{F}[f(t)](x)$$

2 以上の m に対しては，これをくり返せば良い。

定理 2.4 $\boxed{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \text{ ならば } \mathscr{F}[f(t)] \in \mathscr{S}(\mathbb{R})}$

（証明）任意の非負整数 m,n に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^m \left|\frac{d^n}{dx^n}\mathscr{F}[f(t)](x)\right| < \infty$$

を示す。補題 2.3，2.4 より

$$(ix)^m \left(\frac{d^n}{dx^n}\mathscr{F}[f(t)](x)\right) = (ix)^m \times (-i)^n \mathscr{F}[t^n f(t)](x)$$

$$= (-i)^n \mathscr{F}\left[\frac{d^m}{dt^m}\{t^n f(t)\}\right](x) = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{d^m}{dt^m}t^n f(t)\right\}e^{-ixt}dt$$

$$= (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \left(\frac{d^k}{dt^k}t^n\right) \times f^{(m-k)}(t)\right\}e^{-ixt}dt$$

$$= (-i)^n \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \cdot A_n(k)\int_{-\infty}^{\infty} t^{n-k} \times f^{(m-k)}(t)e^{-ixt}dt$$

ここで $A_n(k) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1) & : \ k \leqq n \\ 0 & : \ k > n \end{cases}$ である。

補題 2.1 , 2.2 より，$t^{n-k}f^{(m-k)}(t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ で $t^{n-k}f^{(m-k)}(t)$ は絶対可積分だから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^m \left|\frac{d^n}{dx^n}\mathscr{F}[f(t)](x)\right| \leqq \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \ A_n(k)\int_{-\infty}^{\infty} |t^{n-k}f^{(m-k)}(t)|dt < \infty$$　(証明終)

< フーリエ変換 4 >

例題 $\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]$ を求めよ。

(解) $\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cdot e^{-ixt}dt = F(x)$ とおく。$e^{-t^2}\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ より、$F(x)$ は微分可能 (P.93) であるから

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F(x) &= \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cdot e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}e^{-ixt}\Big)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}(-it)e^{-ixt}dt = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(-2t)e^{-t^2}\cdot e^{-ixt}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{i}{2}\int_{-b}^{b}\Big(\frac{\partial}{\partial t}e^{-t^2}\Big)\cdot e^{-ixt} = \lim_{b\to\infty}\frac{i}{2}\left\{\Big[e^{-t^2}\cdot e^{-ixt}\Big]_{-b}^{b} - \int_{-b}^{b} e^{-t^2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}e^{-ixt}\Big)dt\right\} \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{i}{2}\left\{e^{-b^2-ixb} - e^{-b^2+ixb} - \int_{-b}^{b} e^{-t^2}(-ix)e^{-ixt}dt\right\}
\end{aligned}$$

ここで $|e^{-b^2-ixb}| = |e^{-b^2+ixb}| = e^{-b^2}\to 0 \quad (b\to\infty)$ より

$\displaystyle\frac{d}{dx}F(x) = \frac{i}{2}\left\{0-0-(-ix)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cdot e^{-ixt}dt\right\} = -\frac{x}{2}\cdot F(x)$ が成り立つ。

微分方程式 $\displaystyle\frac{d}{dx}F(x) = -\frac{x}{2}F(x)$ の解は $F(x) = Ce^{\int -\frac{x}{2}dx} = Ce^{-\frac{x^2}{4}}$ (C は定数)

である。$F(0) = Ce^0 = C$ となる。一方 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (P.31) より

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cdot e^0 dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = 2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

だから $C=\sqrt{\pi}$ である。従って $\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right] = F(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$ である。

問 正定数 $\alpha > 0$ に対して $\mathscr{F}\left[e^{-\alpha t^2}\right]$ を求めよ。

＜ 合成積 ＞

[定義 2.6]　$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$ の任意の有界閉区間で積分可能であり,

各 t に対し $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)|dx$ が収束するとき, 関数

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$$

を f と g との **畳み込み** または **合成積** という。

補題 2.5　$\boxed{(f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t)}$

[証明]　$(f_1 * f_2)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du$　　ここで $t-u=s$ とおくと

$$= \int_{\infty}^{-\infty} f_1(s)f_2(t-s)(-1)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-s)f_1(s)ds = (f_2 * f_1)(t)$$

定理 2.5

f_1, f_2 が有界で連続かつ絶対可積分であれば $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(x)$, $\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(x)$ のとき $\mathscr{F}[(f_1 * f_2)(t)] = F_1(x)F_2(x)$

[証明] の概略

$$\mathscr{F}[(f_1 * f_2)(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(t)e^{-ixt}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du \right\} e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)e^{-ixt}dt \right\} f_2(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)e^{-ix(t-u)}dt \right\} f_2(u)e^{-ixu}du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)e^{-ixs}ds \right\} f_2(u)e^{-ixu}du = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)f_2(u)e^{-ixu}du$$

$$= F_1(x)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-ixu}du = F_1(x)F_2(x)$$

(証明終)

(注)　詳しい証明は P.116～P.119 を参照せよ。

[問]　$\mathscr{F}\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-u|-u^2}du\right]$ を求めよ。

＜ フーリエ変換の対応表 ＞

$f(t)$　(元の関数)	$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$　(フーリエ変換)
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x)$
$f(\alpha t)$　$(\alpha \neq 0)$	$\dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$
$f(t-\alpha)$　(α は定数)	$e^{-i\alpha x} F(x)$
$e^{i\alpha t} f(t)$　(α は定数)	$F(x-\alpha)$
$f'(t)$　(f の導関数)	$ixF(x)$
$f^{(n)}(t)$　(f の n 階導関数)	$(ix)^n F(x)$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(u)du$	$\dfrac{1}{ix} F(x)$
$(-it)^n f(t)$	$F^{(n)}(x)$　($F(x)$ の n 階導関数)
$(f_1 * f_2)(t)$　(合成積)	$F_1(x)F_2(x)$　(積)
$f_1(t)f_2(t)$　(積)	$\dfrac{1}{2\pi}(F_1 * F_2)(x)$　$\left(\dfrac{1}{2\pi}\text{合成積}\right)$
$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ \lvert t\rvert \leqq T \\ 0 & : \ \lvert t\rvert > T \end{cases}$　$(T > 0)$	$\dfrac{2\sin(Tx)}{x}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}$　$(\alpha > 0)$	$\dfrac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$
$e^{-\alpha t^2}$　$(\alpha > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$
$\dfrac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}$　$(\alpha > 0)$	$2\pi e^{-\alpha\lvert x\rvert}$
$2\alpha\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(t-u)^2+\alpha^2}du$　$(\alpha > 0)$ (コーシー・ポアソン積分)	$2\pi e^{-\alpha\lvert x\rvert} F(x)$
$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-u)^2}{4\alpha}} f(u)du$　$(\alpha > 0)$ (ガウス・ワイエルシュトラス積分)	$e^{-\alpha x^2} F(x)$

(注)　コーシー・ポアソン積分は $f(t)$ と $\dfrac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}$ との合成積である。

ガウス・ワイエルシュトラス積分は $f(t)$ と $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ との合成積である。

< デルタ近似関数列 1 >

補題 2.6

> 正数 n に対し，$\rho_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{ixt}dx$ とおくと
>
> $$\rho_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(nt)}{\pi t} & : \ t \neq 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{n}{\pi} & : \ t = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$
>
> となり，$\rho_n(t)$ は連続である。

(証明)　$t \neq 0$ のとき　$\rho_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{ixt}dx = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{it}e^{ixt}\right]_{-n}^{n}$

$$= \frac{1}{2\pi it}\left\{e^{int} - e^{-int}\right\} = \frac{1}{2\pi it}\left\{\cos(nt) + i\sin(nt) - \cos(nt) + i\sin(nt)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi it} \times 2i\sin(nt) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}$$

$t = 0$ のとき　$\rho_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{0}dx = \dfrac{1}{2\pi}\left[1\right]_{-n}^{n} = \dfrac{2n}{2\pi} = \dfrac{n}{\pi}$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\rho_n(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(nt)}{\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(nt)}{nt} \times \frac{n}{\pi} = 1 \times \frac{n}{\pi} = \frac{n}{\pi} = \rho_n(0)$ より

$\rho_n(t)$ は連続である。（証明終）

定理 2.6

> 補題 2.6 で定めた $\rho_n(t)$ は次の性質をもつ。
>
> (1) $\rho_n(-t) = \rho_n(t)$　，　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t)dt = 1$
>
> (3) 有界で絶対可積分であり，任意有界区間で区分的に滑らかな
>
> 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し
>
> $$\lim_{n\to\infty}(f * \rho_n)(t) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\cdot\rho_n(s)ds = \frac{1}{2}\left\{f(t-0) + f(t+0)\right\}$$
>
> が全ての実数 t に対して成立する。

(注)　定理の (1),(2),(3) を満たす関数列 $\{\rho_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ を**デルタ近似関数列**と呼ぶことにする。

(証明) (1) $t \neq 0$ に対し　$\rho_n(-t) = \dfrac{\sin(-nt)}{\pi \times (-t)} = \dfrac{-\sin(nt)}{-\pi t} = \dfrac{\sin(nt)}{\pi t} = \rho_n(t)$

(2)　(1) より $\rho_n(t)$ は偶関数だから

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t)dt = 2\int_{0}^{\infty}\rho_n(t)dt = 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{\pi t}dt$　　($nt = u$ とおくと P.30 の結果より)

$$= 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(u)}{\pi \times \frac{u}{n}} \times \frac{1}{n}du = \frac{2}{\pi} \times \int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$$

< デルタ近似関数列 2 >

< 定理 2.6 の証明の続き >

(3) の証明

$$(f*\rho_n)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)\cdot\rho_n(s)ds=\int_{-\infty}^{0}f(t-s)\rho_n(s)ds+\int_{0}^{\infty}f(t-s)\rho_n(s)ds$$

ここで ρ_n は偶関数だから $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}f(t-s)\rho_n(s)ds=\int_{+\infty}^{0}f(t+n)\rho_n(-u)(-1)du=\int_{0}^{\infty}f(t+u)\rho_n(u)du$

より $\displaystyle(f*\rho_n)(t)=\int_{0}^{\infty}f(t+s)\rho_n(s)ds+\int_{0}^{\infty}f(t-s)\rho_n(s)ds=\int_{0}^{\infty}\left\{f(t+s)+f(t-s)\right\}\rho_n(s)ds$

一方 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(s)ds=2\int_{0}^{\infty}\rho_n(s)ds=1$ より $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\rho_n(s)ds=\frac{1}{2}$ だから

$$(f*\rho_n)(t)-\frac{1}{2}\left\{f(t-0)+f(t+0)\right\}=(f*\rho_n)(t)-\left\{f(t-0)+f(t+0)\right\}\int_{0}^{\infty}\rho_n(s)ds$$

$\displaystyle=\int_{0}^{\infty}\left\{f(t-s)+f(t+s)-f(t-0)-f(t+0)\right\}\rho_n(s)ds=\mathrm{I}_n+\mathtt{I\backslash hspace\{-.1em\}I}_n$ ここで

$$\mathrm{I}_n=\int_{0}^{\infty}\left\{f(t-s)-f(t-0)\right\}\rho_n(s)ds\quad,\quad\mathtt{I\backslash hspace\{-.1em\}I}_n=\int_{0}^{\infty}\left\{f(t+s)-f(t+0)\right\}\rho_n(s)ds$$

とおく。

今 $s>0$ に対し $\displaystyle F(s)=\frac{f(t+s)-f(t+0)}{\pi s}$ とおくと補題 1.6 より $\displaystyle\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}}F(s)=\frac{1}{\pi}f'(t+0)$

だから $F(s)$ は区間 $[0,1]$ で区分的に連続かつ有界である。また，

$$\tilde{F}(s)=\begin{cases}F(s) & : \ 0<s\leqq 1\\ 0 & : \ \text{その他}\end{cases}\quad,\quad G(s)=\begin{cases}\dfrac{f(t+s)}{\pi s} & : \ s\geqq 1\\ 0 & : \ s<1\end{cases}$$

とおくと $\tilde{F}$ と G は有界かつ絶対可積分だから，定理 2.1(3) より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}(s)\sin(ns)ds=0\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(s)\sin(ns)ds=0$$

である。従って

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\frac{f(t+s)-f(t+0)}{\pi s}\sin(ns)ds=0\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{\infty}\frac{f(t+s)}{\pi s}\sin(ns)ds=0$$

が成り立つ。一方

$$\int_{1}^{\infty}\frac{f(t+0)}{\pi s}\sin(ns)ds=\frac{f(t+0)}{\pi}\int_{n}^{\infty}\frac{\sin(u)}{\frac{u}{n}}\times\frac{1}{n}du=\frac{f(t+0)}{\pi}\int_{n}^{\infty}\frac{\sin(u)}{u}du\to 0\ (n\to\infty)$$

だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathtt{I\backslash hspace\{-.1em\}I}_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{0}^{1}\frac{f(t+s)-f(t+0)}{\pi s}\cdot\sin(ns)ds+\int_{1}^{\infty}\frac{f(t+s)}{\pi s}\sin(ns)ds-\int_{1}^{\infty}\frac{f(t+0)}{\pi s}\sin(ns)ds\right\}=$
0

同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}_n=0$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[(f*\rho_n)(t)-\frac{1}{2}\left\{f(t-0)+f(t+0)\right\}\right]=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{I}_n+\mathtt{I\backslash hspace\{-.1em\}}_n)=0$

(証明終)

＜ デルタ関数の近似関数列 3 ＞

定理 2.6 の性質 (1),(2),(3) をみたす関数列 $\{\rho_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ をデルタ近似関数列ということにした。このような関数列は $\{\rho_n(t)\}$ 以外にも存在する。

例　$h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & : \ |t| \leqq \dfrac{1}{n} \\ 0 & : \ |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$,　$g_n(t) = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n}{4}t^2}$　のとき

関数列 $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ は共にデルタ近似関数列である。(証明は P.121～P.123)

$f(t)$ が図 1 のような関数の場合に，定理 2.6 の性質 (3)

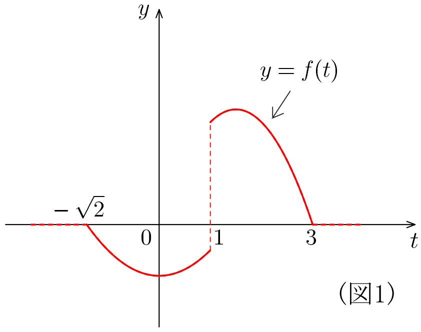
$$\lim_{n\to\infty}(f*\rho_n)(t) = \lim_{n\to\infty}(f*h_n)(t) = \lim_{n\to\infty}(f*g_n)(t) = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

の収束する様子を見てほしい。

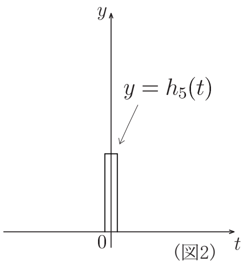
$h_n(t)$ のグラフ (図 2, 図 4) と $(f*h_n)(t)$ のグラフ (図 3, 図 4)

$g_n(t)$ のグラフ (図 6, 図 8) と $(f*g_n)(t)$ のグラフ (図 7, 図 8),

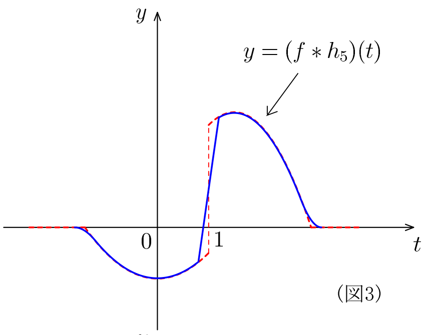
$\rho_n(t)$ のグラフ (図 10, 図 11) と $(f*\rho_n)(t)$ のグラフ (図 11, 図 13)



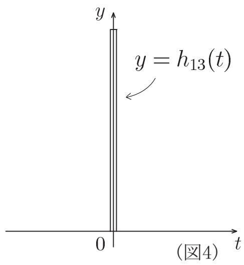
(図1)



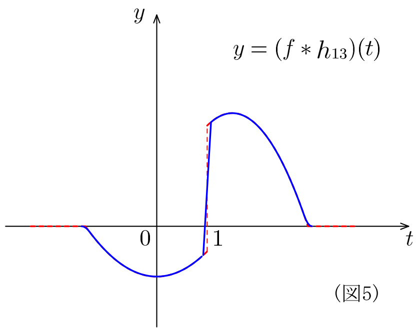
(図2)



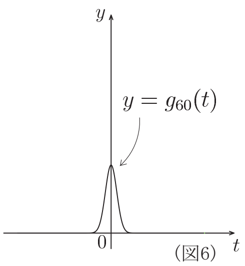
(図3)



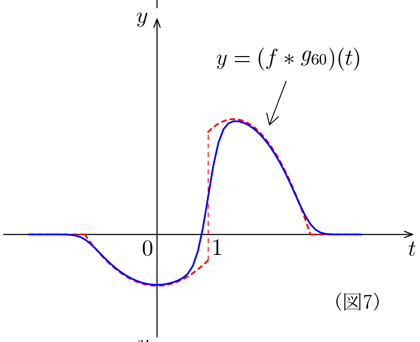
(図4)



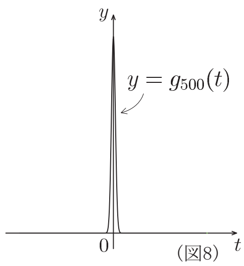
(図5)



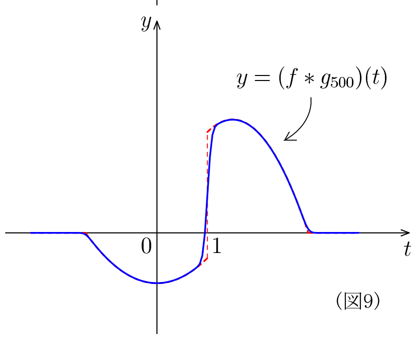
(図6)



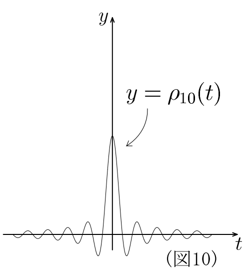
(図7)



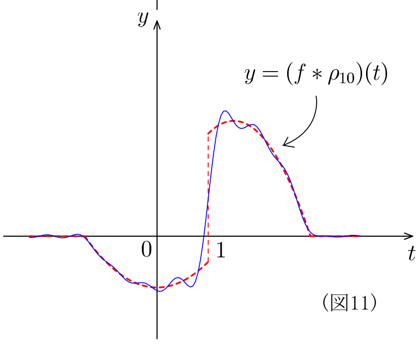
(図8)



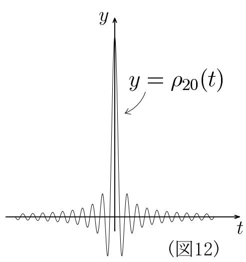
(図9)



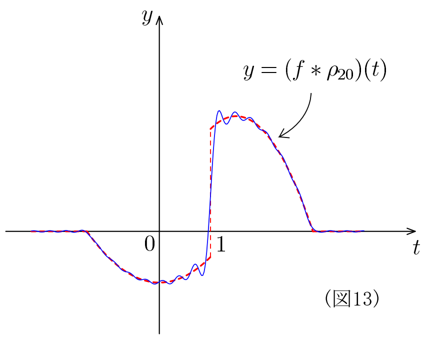
(図10)



(図11)



(図12)



(図13)

< フーリエ逆変換 >

フーリエ変換の導出（P.32）で f のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dx = F(x)$ に対し，
$f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$ であるので，$F(x)$ のフーリエ逆変換を $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$
と定義したいが，広義積分が収束しない場合がある。

例　$f(t) = \begin{cases} 1 & : |t| \leqq 1 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$　のとき $\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dx = \frac{2\sin x}{x} = F(x)$

であるが，広義積分 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{2\sin x}{x}e^{ixt}dx$ は

収束しない。（その証明は P.124 を参照）しかし

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} \frac{2\sin x}{x}e^{ixt}dx$$

は収束し，その極限は $\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \begin{cases} 1 & : & |t| < 1 \\ \frac{1}{2} & : & t = \pm 1 \\ 0 & : & \text{その他} \end{cases}$ となる

そこで f のフーリエ変換 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dx = F(x)$ に対し，フーリエ逆変換を

$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx} \quad \text{（フーリエ逆変換）}$$

と定義する。

（注）$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx$ は広義積分 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$ の主値である。

定理 2.7

> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が有界かつ絶対可積分で，任意有界区間で区分的に滑らかであれば，
>
> $\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = F(x)$ のとき
>
> $\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$
>
> が成り立つ。

この定理を**反転公式**という。

補題 2.7

> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が有界かつ絶対可積分で，任意有界区間で区分的に連続であれば，
>
> $\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = F(x)$ のとき $\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dt = (f * \rho_n)(t)$
>
> である。ここで $\rho_n(t)$ は補題 2.5 で定められた関数である。

< 反転公式の証明 >

< 補題 2.7 の証明 >

正数 R に対し，　$F_R(x) = \int_{-R}^{R} f(u)e^{-ixu}du$　，　$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu}du$　とおくと

f は絶対可積分より

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - F_R(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{|u|>R} f(u)e^{-ixu}du \right| \leqq \max_{x\in\mathbb{R}} \int_{|u|>R} |f(u)e^{-ixu}|du$$

$$= \int_{|u|>R} |f(u)|du \ \to\ 0 \qquad (R \to \infty)$$

だから，任意の正数 n と実数 t に対し，

$$\left| \int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx - \int_{-n}^{n} F_R(x)e^{ixt}dx \right| \leqq \int_{-n}^{n} |F(x) - F_R(x)|dx \ \to\ 0 \qquad (R \to \infty)$$

である。よって

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F_R(x)e^{ixt}dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} \left\{ \int_{-R}^{R} f(u)e^{-ixu}du \right\} e^{ixt}dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} \left\{ \int_{-R}^{R} f(u)e^{ix(t-u)}du \right\} dx$$

となる。ここで $f(u)e^{ix(t-u)}$ は x に関して連続，u に関して区分的に連続

だから，$(u, x) \in [-R, R] \times [-n, n]$ の範囲で積分順序が交換できる。(P.109)

従って

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \left\{ \int_{-n}^{n} f(u)e^{ix(t-u)}dx \right\} du$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ix(t-u)}dx \right\} f(u)du = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \rho_n(t-u)f(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\rho_n(t-u)du = (f * \rho_n)(t)$$

(証明終)

< 定理 2.7 の証明 >

補題 2.7 と定理 2.6 より

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \lim_{n\to\infty} (f * \rho_n)(t) = \frac{1}{2}\left\{ f(t-0) + f(t+0) \right\}$$

(証明終)

< フーリエ逆変換の練習 >

$f(t)$ を絶体可積分で有界かつ任意有界区間で区分的になめらかな関数とする。
フーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ に対して、反転公式から

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

である。ここで $f(t)$ が連続関数のときは $f(t+0) = f(t-0) = f(t)$ であるから

反転公式は

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = f(t) \qquad (f(t) \text{ が連続のとき})$$

となる。

例 1　$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & : \ t > 0 \\ 0 & : \ t \leqq 0 \end{cases}$ は $t = 0$ のとき不連続，　$t > 0$ または $t < 0$ の範囲では連続である。

$$\mathscr{F}[f(t)] = \frac{1}{1+ix}, \qquad \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+ix}\right] = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \begin{cases} e^{-t} & : \ t > 0 \\ \frac{1}{2} & : \ t = 0 \\ 0 & : \ t < 0 \end{cases}$$

問 1　次のフーリエ逆変換を求めよ。(ただし $\alpha > 0$)

(1) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\right]$

(2) $\mathscr{F}^{-1}\left[\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\right]$

(3) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\sin(4x)}{x}\right]$

例 2　$\mathscr{F}^{-1}[F_1(x)] = f_1(t)$, $\mathscr{F}^{-1}[F_2(x)] = f_2(t)$ のとき $\mathscr{F}^{-1}[a_1F_1(x) + a_2F_2(x)] = a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$　より

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+1}\right] &= \frac{1}{6}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{6}{x^2+9}\right] + \frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{6}e^{-3|t|} + \frac{1}{2}e^{-|t|} \end{aligned}$$

問 2　次のフーリエ逆変換を求めよ。

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{3}{x^2+1} + e^{-x^2}\right]$$

< デルタ関数 >

1929 年にイギリスの物理学者 P.Dirac は，量子力学を記述するには

次のような疑似関数 $\delta(t)$

$$t \neq 0 \text{ のとき } \delta(t) = 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

が必要であると唱えた。そして Dirac は $\delta(t)$ の導関数 $\delta'(t)$ 等のさまざまな形式的な計算を行って，量子力学の研究を進めていった。

1950 年にフランスの数学者 L.Schwartz は Dirac の $\delta(t)$ およびそれに関連する計算の数学的定義づけに成功した。その定義の前に，アイデアを紹介する。

自然数 n に対し， $g_n(t) = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n}{4}t^2}$ は次の性質をもつ。 (P28,122,123 参照)

(1) $g_n(-t) = g_n(t)$, (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = 1$, (3) $t \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(t) = 0$

(4) 有界であり，任意有界区間で区分的に連続な関数 $f(t)$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (f * g_n)(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$

この性質 (2),(3) より $\{g_n(t)\}$ は $\delta(t)$ を近似していると考えられる。つまり，

$\delta(t) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(t),\ \delta'(t) = \lim_{n\to\infty} g_n'(t)$ と考えて，形式的な計算をしてみる。急減少関数 $\varphi(\in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ に対し，性質 (4) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty} (\varphi * g_n)(0) = \frac{\varphi(0-0) + \varphi(0+0)}{2} = \varphi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n'(t)\varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} g_n'(t)\varphi(t)dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \left\{ [g_n(t)\varphi(t)]_{-b}^{b} - \int_{-b}^{b} g_n(t)\varphi'(t)dt \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ -\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\varphi'(t)dt \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -(\varphi' * g_n)(0) = -\frac{\varphi'(0-0) + \varphi'(0+0)}{2} = -\varphi'(0)$$

となる。このような形式的な計算を考慮に入れることによって，δ を関数としてではなく，

むしろ δ , δ' を

$$\delta \ : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \ \mapsto \ \varphi(0)$$

$$\delta' \ : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \ \mapsto \ -\varphi'(0)$$

をみたす写像 (すなわち $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$) とみなしたのである。そこで $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ の元 φ から $\mathbb{C}$ (複素数全体) への写像としてデルタ関数等の超関数を定義した。

< 超関数 >

[定義 2.7]　急減少関数 $\varphi(\in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ に複素数の値を対応させる関数 T

$$T\colon\ \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

が次の性質 (1),(2) をもつとき，T を**超関数**という。

(1) (線形性) 任意の $\varphi,\ \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ に対し

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

(2) (連続性) 関数列 $\{\varphi_n\}$ $(\varphi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ が，任意の非負整数 m に対し

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l+k \leqq m} \max_{t\in\mathbb{R}} |t|^k \cdot \left| \frac{d^l}{dt^l}\varphi_n(t) \right| = 0 \quad (l, k \text{ は非負整数})$$

をみたせば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = 0$ をみたす。

(注 1)　実際に本書で扱われる超関数の例はすべて上の条件 (1),(2) をみたしている。

(注 2)　超関数 T を普通の関数と区別するために $T(\varphi)$ を $< T,\ \varphi >$ と表すことが多い。そこで T が超関数であることを明記するために，超関数 T の像を

$$T(\varphi) =< T,\ \varphi >$$

と書くことにする。

例 1　$f(t)$ は任意有限区間で積分可能であり，ある正定数 $C(>0)$ と自然数 n が存在して

$$|f(t)| \leqq C(1+|t|)^n \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立っているとする。このとき

$$T_f(\varphi) =< T_f,\ \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

と定めると，T_f は超関数となる。この超関数 T_f を普通の関数 f と同一視することにより，超関数を普通の関数の一般化と考えることができる。

例 2　実数 α に対し

$$\delta_\alpha(\varphi) =< \delta_\alpha,\ \varphi >= \varphi(\alpha) \qquad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$$

とおくと δ_α は超関数である。この δ_α を「点 α に台をもつディラックのデルタ（δ）関数」または簡単に「点 α におけるデルタ関数」という。なお $\alpha = 0$ のとき δ_0 を単に「デルタ関数」という。

問　正数 $\varepsilon(>0)$ と実数 $\alpha(\in \mathbb{R})$ に対し，$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & : |t-\alpha| < \varepsilon \\ 0 & : |t-\alpha| \geqq \varepsilon \end{cases}$ とおく。

任意の $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し，$\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} T_{f_\varepsilon}(\varphi) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} < T_{f_\varepsilon}, \varphi >= \delta_\alpha(\varphi)$ であることを証明せよ。

< 超関数のフーリエ変換 1 >

補題 2.8　任意の $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し、$\mathscr{F}[\tilde{F}] = \varphi$ を満たす $\tilde{F} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ が存在する。

（証明）　$\mathscr{F}[\varphi] = F$ とすると $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt = F(x)$ である。反転公式より

$\mathscr{F}^{-1}[F] = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx = \varphi(t)$ である。この式で $x \to -s$ と置き換えると

$\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} F(-s) e^{-ist}(-1) ds = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-s) e^{-ist} ds$ である。

さらに $t \to x$ と置き換えると $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{2\pi} F(-s) e^{-isx} ds$ である。よって

$\tilde{F}(t) = \dfrac{1}{2\pi} F(-t)$ とおくと $\mathscr{F}[\tilde{F}] = \varphi$ となる。　　　　（証明終）

補題 2.8 の φ と $\tilde{F}$ に対し、$\mathscr{F}[\tilde{F}]$=$\varphi \Leftrightarrow \mathscr{F}^{-1}[\varphi]$=$\tilde{F}$ （反転公式）より、任意の $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し、

$\mathscr{F}^{-1}[\varphi](\in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ が存在することがわかる。

急減少関数 f,$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し、$\mathscr{F}[f](x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$ に対応する超関数 $T_{\mathscr{F}[f]}$ は

$$< T_{\mathscr{F}[f]}\ , \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[f](x) \cdot \varphi(x) dx = \int_{\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt \right\} \varphi(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ixt} dx \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \mathscr{F}[\varphi](t) dt = < T_f\ , \mathscr{F}[\varphi] > \text{となる。}$$

そこで任意の超関数 T のフーリエ変換と逆変換を次で定める。

[定義 2.8]　　任意の超関数 T に対し

$< \mathscr{F}[T], \varphi > = < T\ , \mathscr{F}[\varphi] >$　　:　T のフーリエ変換

$< \mathscr{F}^{-1}[T], \varphi > = < T\ , \mathscr{F}^{-1}[\varphi] >$　　:　T のフーリエ逆変換

と定める。ここで φ は任意の急減少関数である。

補題 2.9　①$\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}[T]\right] = T$,　　⊠ $\mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}[T]\right] = T$

（証明）①$\mathscr{F}^{-1}[\varphi] = \tilde{F}$ とすると、$\mathscr{F}[\tilde{F}] = \varphi$ より

$< \mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}[T]\right],\ \varphi > = < \mathscr{F}[T],\ \mathscr{F}^{-1}[\varphi] > = < T,\ \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}[\varphi]\right] >$

$= < T,\ \mathscr{F}[\tilde{F}] > = < T,\ \varphi >$より①が成り立つ。

②$\mathscr{F}[\varphi] = F$ とすると、$\mathscr{F}^{-1}[F] = \varphi$ より

$< \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}[T]\right],\ \varphi > = < \mathscr{F}^{-1}[T],\ \mathscr{F}[\varphi] > = < T,\ \mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}[\varphi]\right] >$

$= < T,\ \mathscr{F}^{-1}[F] > = < T,\ \varphi >$より②が成り立つ。　　　（証明終）

< 超関数のフーリエ変換 2 >

例 1　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を有界で絶対可積分かつ任意有界区間で区分的に滑らかな関数とする。

$\tilde{f}(t)=\dfrac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$ とすると反転公式より $\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}(f)]=\tilde{f}$ となる。

一方 f に対応する超関数 T_f については，補題 2.8 より $\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[T_f]]=T_f$

となる。ここで f は任意有界区間で不連続点が有限個だから，

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-\tilde{f}(t)|dt=0$ より $\displaystyle<T_f,\varphi>=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)\varphi(t)dt=<T_{\tilde{f}},\varphi>$

が成り立つ。すなわち $T_f=T_{\tilde{f}}$ であるから反転公式と補題 2.8 は矛盾しない。

例 2　$T=\delta_\alpha$ （α におけるデルタ関数） の場合，$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し，次式が成り立つ。

$$<\mathscr{F}[\delta_\alpha],\varphi>=<\delta_\alpha,\mathscr{F}[\varphi]>=\mathscr{F}[\varphi](\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-i\alpha t}dt=<T_{e^{-i\alpha\cdot}},\varphi>$$

ここで関数 $e^{-i\alpha\cdot}$ は t に対して $e^{-i\alpha t}$ を対応させる関数である。この結果

$\mathscr{F}[\delta_\alpha]=T_{e^{-i\alpha\cdot}}$ を略して $\mathscr{F}[\delta_\alpha](x)=e^{-i\alpha x}$ と書くこともある。

例 3　実数 α に対し，関数 $e^{i\alpha\cdot}:t\mapsto e^{i\alpha t}$ に対応する超関数 $T_{e^{i\alpha\cdot}}$ のフーリエ変換

を求める。$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し，補題 2.6 の証明 (P.47) と同様に考えて

$$<\mathscr{F}[T_{e^{i\alpha\cdot}}]\ ,\ \varphi>=<T_{e^{i\alpha\cdot}}\ ,\ \mathscr{F}[\varphi]>=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\mathscr{F}[\varphi](x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}e^{i\alpha x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-ixt}dt\right\}dx=\lim_{n\to\infty}\lim_{R\to\infty}\int_{-n}^{n}\left\{\int_{-R}^{R}\varphi(t)e^{i(\alpha-t)x}dt\right\}dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\left\{\int_{-n}^{n}\varphi(t)e^{i(\alpha-t)x}dx\right\}dt=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left\{\int_{-n}^{n}e^{i(\alpha-t)x}dx\right\}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)2\pi\rho_n(\alpha-t)dt=\lim_{n\to\infty}2\pi(\varphi*\rho_n)(\alpha)=2\pi\times\frac{\varphi(\alpha-0)+\varphi(\alpha+0)}{2}$$

$$=2\pi\varphi(\alpha)=<2\pi\delta_\alpha,\varphi>$$

より $\mathscr{F}[T_{e^{i\alpha\cdot}}]=2\pi\delta_\alpha$ となる。これを略して $\mathscr{F}[e^{i\alpha t}]=2\pi\delta_\alpha$ と書くこともある。

$\alpha=0$ のとき $\mathscr{F}[T_1]=2\pi\delta_0$ となる。これを略して $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta_0$ と書くこともある。

例 4　実数 α に対し，関数 $\cos(\alpha\cdot):t\mapsto\cos(\alpha t)$ に対応する超関数 $T_{\cos(\alpha\cdot)}$ のフーリエ変換

を求める。

$$<\mathscr{F}[T_{\cos(\alpha\cdot)}]\ ,\ \varphi>=<T_{\cos(\alpha\cdot)}\ ,\ \mathscr{F}[\varphi]>=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\alpha x)\mathscr{F}[\varphi](x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}\mathscr{F}[\varphi](x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\mathscr{F}[\varphi](x)dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\mathscr{F}[\varphi](x)dx=\frac{1}{2}\times2\pi\varphi(\alpha)+\frac{1}{2}\times2\pi\varphi(-\alpha)=<\pi(\delta_\alpha+\delta_{-\alpha}),\varphi>$$

より $\mathscr{F}[T_{\cos(\alpha\cdot)}]=\pi(\delta_\alpha+\delta_{-\alpha})$ となる。これを略して $\mathscr{F}[\cos(\alpha t)]=\pi(\delta_\alpha+\delta_{-\alpha})$ と書くこともある。

問　実数 α に対し，関数 $\sin(\alpha\cdot):t\mapsto\sin(\alpha t)$ に対応する超関数 $T_{\sin(\alpha\cdot)}$ のフーリエ変換

を求めよ。

< フーリエ変換の練習 >

<u>問 1</u>　関数 $f(t)$ が次の各場合に、 $f(t)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。
ただし K, n は正の定数とする。

(1) $f(t) = \begin{cases} K & : |t| \leqq n \\ 0 & : |t| > n \end{cases}$　　(2) $f(t) = \begin{cases} t & : |t| \leqq n \\ 0 & : |t| > n \end{cases}$

(3) $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & : t \geqq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$　　(4) $f(t) = e^{-3|t|}$

<u>問 2</u>　$\mathscr{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt = F(x)$ とおく。

(1) $\dfrac{d}{dx}F(x)$ を $F(x)$ を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて $F(x)$ を求めよ。

<u>問 3</u>　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ とする。 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-3|t-u|} du$ のフーリエ変換を求めよ。

<u>問 4</u>　次のフーリエ逆変換を求めよ。

(1) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{2+ix}\right]$　　(2) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{3}{x^2+1}\right]$

(3) $\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-\frac{x^2}{4}}\right]$　　(4) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\sin(3x)}{x}\right]$

<u>問 5</u>　次の超関数のフーリエ変換を求めよ。

(1) $\mathscr{F}[\delta_0]$　　(2) $\mathscr{F}[T_f]$

ただし $f(x) = c_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$　（c_0, a_k, b_k は実数定数である。）

<u>問 6</u>　次の超関数のフーリエ変換を求めよ。

(1) $\mathscr{F}[\delta_\alpha]$　　(2) $\mathscr{F}[T_{e^{i\alpha\cdot}}]$

ここで α は実数の定数、$T_{e^{i\alpha\cdot}}$ は関数 $e^{i\alpha\cdot} : t \longmapsto e^{i\alpha t}$ に対応する超関数である。

< フーリエ級数の収束とフーリエ逆変換の収束 >

$f(t)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right\} e^{ikt}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)} \right\} ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-s) ds$$

と表される。ここで $D_n(t)$ は

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \begin{cases} \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\pi \sin(\frac{t}{2})} & : \ 0 < |t| < \pi \quad \text{のとき} \\ \dfrac{2n+1}{2\pi} & : \ t = 0 \quad \text{のとき} \end{cases}$$

となる。この $D_n(t)$ をディリクレ核 (Diriclet kernel) という。ここで

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-s) ds$ を区間 $[-\pi, \pi]$ における f と D_n との合成積と考えて

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-s) ds = (f * D_n)(t)$ と書くことにすると，定理 1.4 の証明から

フーリエ級数の収束は

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \lim_{n\to\infty} (f * D_n)(t) = \frac{1}{2} \{ f(t-0) + f(t+0) \}}$$

と書ける。これは絶対可積分関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = F(x)$

に対するフーリエ逆変換の収束

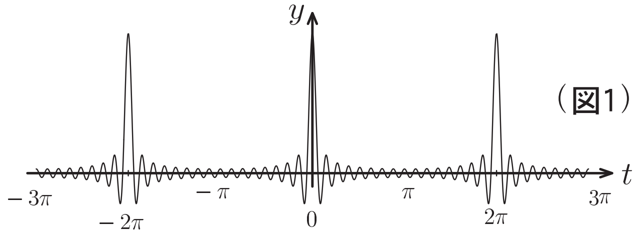
$$\boxed{\mathscr{F}[F(x)] = \lim_{n\to\infty} (f * \rho_n)(t) = \frac{1}{2} \{ f(t-0) + f(t+0) \}}$$

に似ている。実際 $-\pi < t < \pi$ の範囲では $D_n(t)$ と $\rho_n(t)$ はほとんど同じ

であるが，$D_n(t)$ は周期 2π の周期関数であるところが $\rho_n(t)$ と異なる。

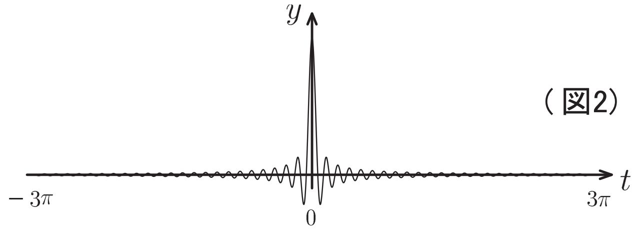
図 1 と図 2 は $n = 16$ のときの $y = D_n(t)$ と $y = \rho_n(t)$ のグラフである。

<ディリクレ核 $D_n(t)$>



（図1）

<デルタ近似関数列 $\rho_n(t)$ >



（図2）

第 3 章　ラプラス変換

< ラプラス変換の導出 >

正定数 $\sigma(>0)$ と関数 $f(t)$ に対して，

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : \quad t \geqq 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases}$$

とおき，$f_\sigma(t)$ のフーリエ変換を $F_\sigma(x)$ とおくと

$$F_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t)e^{-ixt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+ix)t}dt$$

となる。$F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とおくと $F_\sigma(x) = F(\sigma+ix)$ となる。

$F_\sigma(x)$ のフーリエ逆変換は

$$f_\sigma(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{ixt}dx$$

となるので $t>0$ のとき $f_\sigma(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ より

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{ixt}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{(\sigma+ix)t}dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(\sigma+ix)e^{(\sigma+ix)t}dx \qquad\qquad (s=\sigma+ix \text{ とおく}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds \end{aligned}$$

となる。そこで $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ を**ラプラス変換**といい，

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \Big(= F(s)\Big) \qquad \cdots(\text{ラプラス変換})$$

と書くことにすると，その逆変換は

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds \qquad \cdots(\text{ラプラス逆変換})$$

となる。

< ラプラス変換 1 >

関数 $f(t)$ のラプラス変換は

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

である。ここで s は一般には複素数 $\sigma + ix$ で，その実数部分 σ が正の数である。(これを $\mathrm{Re}(s) > 0$ と書く) ただし，ラプラス変換を求めるときには，複素数であることを意識しなくても良い。s を正の定数と考えて，計算しても良い。

例 1　$\mathscr{L}[t] = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left\{\left[t \times \frac{1}{-s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \frac{1}{s}e^{-st}dt\right\}$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{b}{s}e^{-sb} + \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=b}\right\} = \lim_{b\to\infty}\left\{\frac{b}{-se^{sb}} - \frac{1}{s^2}e^{-sb} + \frac{1}{s^2}\right\} = \frac{1}{s^2}$$

(注) ここで $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{sb}} = 0$ であり，ロピタルの定理より

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{sb}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{d}{db}(b)}{\frac{d}{db}(e^{sb})} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{se^{sb}} = 0$$

となる。

例 2　実数定数 α に対し、$\mathscr{L}[e^{\alpha t}]$ を求める。

$\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt$

この積分は $s > \alpha$ のときのみ存在する。そこで $s > \alpha$ になる s に対して、ラプラス変換を求めると、

$\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(\alpha-s)t}dt = \frac{1}{s-\alpha}$

となる。

問　次のラプラス変換を求めよ

(1) $\mathscr{L}[1]$

(2) $\mathscr{L}[e^{-t}]$

(3) $\mathscr{L}[e^{it}]$

< ラプラス変換 2 >

ラプラス変換の性質をいくつか示す。

$\boxed{1}$　$\mathscr{L}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1\mathscr{L}[f_1(t)]+a_2\mathscr{L}[f_2(t)]$

$\boxed{2}$　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f(\alpha t)]=\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$　　$(\alpha>0)$

$\boxed{3}$　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ のとき $\mathscr{L}[e^{\alpha t}f(t)]=F(s-\alpha)$

(証明)

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t}f(t)]=\int_0^\infty e^{\alpha t}f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-\alpha)t}dt=F(s-\alpha)$$

$\boxed{4}$　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f_\alpha(t)]=e^{-\alpha s}F(s)$　　$(\alpha>0)$

$$\text{ここで } f_\alpha(t)=\begin{cases} f(t-\alpha) & : \ t \geqq \alpha \\ 0 & : \ t<\alpha \end{cases}$$

(証明)

$$\mathscr{L}[f_\alpha(t)]=\int_\alpha^\infty f(t-\alpha)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau \qquad (t-\alpha=\tau)$$

$$=e^{-\alpha s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{-\alpha s}F(s)$$

例 1　$\mathscr{L}[e^{ikt}]=\displaystyle\int_0^\infty e^{(ik-s)t}dt=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{ik-s}e^{(ik-s)t}\right]_{t=0}^{t=b}=\frac{1}{s-ik}$　　$(\mathrm{Re}(s)>0)$

例 2　$\mathscr{L}[\cos(kt)]=\mathscr{L}\left[\dfrac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}\right]=\dfrac{1}{2}\left\{\mathscr{L}[e^{ikt}]+\mathscr{L}[e^{-ikt}]\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-ik}+\frac{1}{s+ik}\right\}=\frac{s}{s^2+k^2}$$

問　次のラプラス変換を求めよ。ただし α, k は実数の定数とする。(2)〜(4) のラプラス変換の変数 s は $s>\alpha$ とする。

(1)　$\mathscr{L}[\sin(kt)]$

(2)　$\mathscr{L}[e^{(\alpha+ki)t}]$

(3)　$\mathscr{L}[e^{\alpha t}\cos(kt)]$

(4)　$\mathscr{L}[e^{\alpha t}\sin(kt)]$

< ラプラス変換 3 >

$\boxed{5}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[tf(t)] = -F'(s)$

(証明) $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ を s で微分すると

$$F'(s) = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st}dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = -\mathscr{L}[tf(t)]$$

$\boxed{6}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$

問 次のラプラス変換を求めよ。ただし α と k は実数の定数とする。(4),(5) のラプラス変換の変数 s は $s > \alpha$ と考える。

(1) $\mathscr{L}[t^2]$

(2) $\mathscr{L}[t^3]$

(3) $\mathscr{L}[t^n]$

(4) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}]$

(5) $\mathscr{L}[te^{\alpha t}]$

(6) $\mathscr{L}[t\cos(kt)]$

(7) $\mathscr{L}[t\sin(kt)]$

(8) $\mathscr{L}[\sinh(kt)] = \mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt})\right]$

(9) $\mathscr{L}[\cosh(kt)] = \mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt})\right]$

< ラプラス変換 4 >

$\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n |f(t)|dt$ が有限の値に収束するとき，関数 $f(t)$ は絶対可積分という。

$\boxed{7}$　$f(t)e^{-st}$ および $f'(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であるとき，

$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ であれば $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

(証明)　　絶対可積分より $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left\{\Big[f(t)e^{-st}\Big]_0^b + \int_0^b f(t)se^{-st}dt\right\}$$

$$= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= sF(s) - f(0)$$

(証明終)

$\boxed{8}$　$f(t)e^{-st}$，$f'(t)e^{-st}$，$f''(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であり，

$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ であれば $\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

(証明)　　$\boxed{7}$より　$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$

よって

$$\mathscr{L}[f''(t)] = \mathscr{L}[(f'(t))'] = s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0)$$

$$= s\{s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)\} - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

問　$f(t)e^{-st}$，$f'(t)e^{-st}$，$f''(t)e^{-st}$，$f'''(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であり，$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f'''(t)]$ を求めよ。

< ラプラス変換 5 >

$t \geqq 0$ で定義されている 2 つの関数 $f(t)$，$g(t)$ に対し，$t<0$ では常に $f(t)=0$，$g(t)=0$ と定めると，$f(t)$ と $g(t)$ の合成積は

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du=\int_0^t f(t-u)g(u)du$$

となる。これは定義域が $[0,\ \infty)$ である関数の合成積である。ラプラス変換を考えるときは常に $t \geqq 0$ の範囲で考えるので，合成積は $(f*g)(t)=\displaystyle\int_0^t f(t-u)g(u)du \left(=\int_0^t f(u)g(t-u)du\right)$ とする。

$\boxed{9}$

$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathscr{L}[g(t)]=G(s)$ のとき

$$\mathscr{L}\big[(f*g)(t)\big]=F(s)G(s)$$

(証明)　正定数の σ に対し

$$f_\sigma(t)=\begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases} \quad , \quad g_\sigma(t)=\begin{cases} g(t)e^{-\sigma t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases}$$

の合成積は

(i) $t \geqq 0$ のとき $(f_\sigma * g_\sigma)(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t-u)g_\sigma(u)du=\int_0^t f_\sigma(t-u)g_\sigma(u)du$

$$=\int_0^t f(t-u)e^{-\sigma(t-u)}g(u)e^{-\sigma u}du=e^{-\sigma t}\int_0^t f(t-u)g(u)du=e^{-\sigma t}(f*g)(t)$$

(ii) $t<0$ のとき $(f_\sigma * g_\sigma)(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_\sigma(t-u)}_{=0}g_\sigma(u)du=0$

一方フーリエ変換の性質より

$$\mathscr{F}\big[(f_\sigma * g_\sigma)(t)\big]=\mathscr{F}\big[f_\sigma(t)\big]\times\mathscr{F}\big[g_\sigma(t)\big] \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ 左辺 $=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(f_\sigma * g_\sigma)(t)e^{-ixt}dt=\int_0^{\infty}(f*g)(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt=\mathscr{L}\big[(f*g)(t)\big](\sigma+ix)$

$(*)$ 右辺 $=\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt\times\int_0^{\infty} g(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt=F(\sigma+ix)\times G(\sigma+ix)$

$\sigma+ix=s$ とおくと

$$\mathscr{L}[(f*g)(t)](s)=F(s)\times G(s)$$

(証明終)

< ラプラス変換 6 >

$\boxed{10}$ 正定数 $b(>0)$ に対し $I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(証明)　$\lambda=\dfrac{b}{\tau}$ とおくと

$$①I=\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\int_\infty^0 e^{-(\frac{b}{\lambda}-\lambda)^2}\left(-\frac{b}{\lambda^2}\right)d\lambda=\int_0^\infty \frac{b}{\lambda^2}e^{-(\lambda-\frac{\lambda}{b})^2}d\lambda$$

τ と λ をおきかえると

$$②I=\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\int_0^\infty e^{-(\lambda-\frac{b}{\lambda})^2}d\lambda$$

①+②より

$$2I=\int_0^\infty (1+\frac{b}{\lambda^2})e^{-(\lambda-\frac{b}{\lambda})^2}d\lambda$$

ここで $x=\lambda-\dfrac{b}{\lambda}$ とおくと $\dfrac{dx}{d\lambda}=1+\dfrac{b}{\lambda^2}$ より

$$2I=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

よって $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　　　(証明終)

$\boxed{11}$

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=e^{-\alpha\sqrt{s}}}$$

(証明)　$\tau=\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}$ とおくと $\dfrac{d\tau}{dt}=-\dfrac{\alpha}{4}t^{-\frac{3}{2}}$ より

$$\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=\int_0^\infty \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^0 e^{-\tau^2}e^{-s(\frac{\alpha}{2\tau})^2}d\tau$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\tau^2-\left(\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\left(\tau-\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}d\tau$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha\sqrt{s}}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=e^{-\alpha\sqrt{s}}$$　　　　(証明終)

$<$ ラプラス変換 7 $>$

ラプラス変換の性質を表にまとめる。ここで a，a_1，a_2 は実数定数，α は正定数，n は自然数とする。

原関数 $f(t)$	像関数 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
$f(\alpha t)$　　$(\alpha > 0)$	$\dfrac{1}{\alpha} F(\dfrac{s}{\alpha})$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-\alpha)$　　$(t \geqq \alpha)$ (ただし $t < \alpha$ のとき $f(t-\alpha) = 0$ とする)	$e^{-\alpha s} F(s)$　　$(\alpha > 0)$
$t f(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$f'''(t)$	$s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\dfrac{1}{s} F(s)$
$\dfrac{1}{t} f(t)$	$\displaystyle\int_s^\infty F(u) du$
$(f_1 * f_2)(t) = \displaystyle\int_0^t f_1(t-u) f_2(u) du$	$F_1(s) F_2(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\alpha)$	$e^{-s\alpha}$

< ラプラス変換 8 >

ラプラス変換の対応表 (a，ω，k は実定数，n は自然数)

原関数 $f(t)$	像関数 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$　$(s>a)$
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$　$(s>a)$
t^2e^{at}	$\dfrac{2}{(s-a)^3}$　$(s>a)$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$　$(s>a)$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$　$(s>a)$
$t\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sinh(kt) = \dfrac{1}{2}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right)$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh(kt) = \dfrac{1}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$u(t-a) = \begin{cases} 1 & : \ t \geqq a \\ 0 & : \ t < a \end{cases}$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{se^{sa}}$
$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}$

< ラプラス逆変換 1 >

ラプラス変換はフーリエ変換の一種であるから，フーリエ変換と同様に反転公式が成り立つ。

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s) \text{ のとき}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2}\left\{f(t-0)+f(t+0)\right\}$$

特に $f(t)$ が連続であるときは $f(t-0)=f(t+0)=f(t)$ より $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$ となる。

このワークブックでは連続の場合だけを扱うことにする。次の対応関係がある。

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$
$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$	$f(\alpha t)$
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$e^{-\alpha s}F(s)$ $(\alpha>0)$	$f(t-\alpha)$ $(t \geqq \alpha)$
$sF(s)-f(0)$	$f'(t)$
$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$f''(t)$
$s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$	$f'''(t)$
$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(\tau)d\tau$
$F'(s)$	$-tf(t)$
$\frac{d^n}{ds^n}F(s)$	$(-t)^nf(t)$
$F_1(s)F_2(s)$	$(f_1*f_2)(t)=\int_0^t f_1(t-u)f_2(u)du$

ここで a_1，a_2，a は実数定数，α は正定数，n は自然数とする。

< ラプラス逆変換 2 >

問　次の対応表を完成させよ。ただし，a,ω は実数の定数，α は正定数，n は自然数とする。

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$\dfrac{1}{s}$	
$\dfrac{1}{s^2}$	
$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	
$\dfrac{1}{s-a}\qquad (s>a)$	
$\dfrac{1}{(s-a)^2}\qquad (s>a)$	
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	
$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\qquad (s>a)$	
$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\qquad (s>a)$	
$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	
$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	
$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	
$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	
$\dfrac{e^{-\alpha s}}{s}$	
$e^{-\alpha\sqrt{s}}$	

< ラプラス逆変換 3 >

例 1 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}\right]$ を求めたい。$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}=\dfrac{A}{s-a}+\dfrac{B}{s-b}$ とおき右辺を

通分すると $\dfrac{(A+B)s-Ab-aB}{(s-a)(s-b)}$ となり分子が 1 となるため

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-aB=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{a-b} \quad , \quad B=-\frac{1}{a-b}$$

であるから

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right\}=\frac{1}{a-b}\left\{e^{at}-e^{bt}\right\}$$

例 2 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}e^{at}\sin(bt)$

問 次のラプラス逆変換を求めよ。

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-s-2}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4}\right]$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4s+5}\right]$

< ラプラス逆変換 4 >

例 1　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-a)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{a}{(s-a)^2}\right]=e^{at}+ate^{at}$

例 2　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-a)^2+b^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}+\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]$

$$=e^{at}\cos(bt)+\frac{a}{b}e^{at}\sin(bt)$$

問　次のラプラス逆変換を求めよ。

(1)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{s^2-8s+16}\right]$

(2)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2-6s+9}\right]$

(3)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s^2-2s+5}\right]$

(4)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{s^2-4s+5}\right]$

＜ラプラス逆変換 5＞

問 1　部分分数分解により次のラプラス逆変換を求めよ。

(1)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s+1)(s-2)}\right]$

(2)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s-1)(s-2)}\right]$

例　$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$ より

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s-a}\right] = (e^{at} * f)(t) = \int_0^t e^{a(t-u)} f(u)du$$

問 2　$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき，次のラプラス逆変換を求めよ。(ただし $a \neq b$)

(1)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2}\right]$

(2)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)(s-b)}\right]$

(3)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2+b^2}\right]$

< ラプラス逆変換 6 >

問　次のラプラス逆変換を求めよ。ただし a，b，c は定数。

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s^3}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a+bs}{s^2+1}\right]$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]$

(4) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-1}\right]$

(5) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-2)^2}\right]$

(6) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{(s-2)(s+4)}\right]$

(7) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(s-2)^3}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{(s-2)^2}\right)\right]$

(8) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{16}{s^4-16}\right]$

< 常微分方程式への応用 1 >

例題 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + x = e^t \quad (t > 0)$ を初期条件 $x(0) = 1$ の下で解け。

(解) 解を $x(t)$ とおき，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$

である。微分方程式の両辺のラプラス変換をとると

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt} + x\right] = \mathscr{L}[e^t]$$

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\Downarrow$$

$$X(s) = \frac{1 + \frac{1}{s-1}}{s+1} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

よって解 $x(t)$ は

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s-1)}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right\}\right] = \underline{\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t}$$

問 次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1) $\dfrac{dx}{dt} = kx\,, \quad x(0) = a$

(2) $\dfrac{dx}{dt} + x = e^{-t}\,, \quad x(0) = 1$

< 常微分方程式への応用 2 >

例題　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = e^t$ ，　$x(0) = 0$ ，　$x'(0) = 0$

(解)　解 $x(t)$ のラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)\ ,\quad \mathscr{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s)$$

$\mathscr{L}[e^t] = \dfrac{1}{s-1}$ より，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+3s+2)(s-1)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$ より答えは

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{s+2} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{s-1}\right)\right] = \underline{-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t}$$

問　次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 6x = e^t$ ，　$x(0) = 0$ ，　$x'(0) = 0$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0$ ，　$x(0) = 1$ ，　$x'(0) = 1$

< 常微分方程式への応用 3 >

問　次の常微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$,　$x(0) = 0$,　$x'(0) = 1$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin t$,　$x(0) = 1$,　$x'(0) = 1$

< 常微分方程式への応用 4 >

例題　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+5\dfrac{dx}{dt}+6x=f(t)$,　$x(0)=x'(0)=0$

(解)　$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$,　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ とおき，両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+5sX(s)+6X(s)=F(s)$$

$$X(s)=\frac{F(s)}{s^2+5s+6}$$

ここで $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+5s+6}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+3}\right]=e^{-2t}-e^{-3t}$ より

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2+5s+6}\right]=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)*f(t)$$

$$=\int_0^t\left\{e^{-2(t-u)}-e^{-3(t-u)}\right\}f(u)du$$

(注) この $x(t)$ が例題の解であることを確かめる計算方法については P125 を参照せよ。

問　ラプラス変換を用いて，次の常微分方程式の初期値問題を解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+2x=f(t)$,　$x(0)=x'(0)=0$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+10x=f(t)$,　$x(0)=x'(0)=0$

＜常微分方程式への応用 5＞

例題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y \\ x(0) = 0\ ,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(解)　$\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$，　$\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)\ ,\quad \mathscr{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

であるから，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} sX(s) = 2X(s) + Y(s) \\ sY(s) - 1 = -X(s) + 4Y(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 0 & \cdots ① \\ X(s) + (s-4)Y(s) = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

①×$(s-4)$+②より　$(s-2)(s-4)X(s) - (s-4)Y(s) = 0$

$$\begin{array}{lr} +) & X(s) + (s-4)Y(s) = 1 \\ \hline (s^2 - 6s + 9)X(s) & = 1 \end{array}$$

よって

$$X(s) = \frac{1}{(s-3)^2}\ ,\quad Y(s) = (s-2)X(s) = \frac{(s-2)}{(s-3)^2} = \frac{s-3+1}{(s-3)^2} = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}$$

であるから

(答)　$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] = te^{3t}$

$$\underline{y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}\right] = e^{3t} + te^{3t}}$$

問　次の連立微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \\ x(0) = 0\ ,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

第 4 章　熱方程式への応用

< 熱伝導方程式への応用 1 >

フーリエは 2 階偏微分方程式である熱伝導方程式を解くために関数を三角級数に展開する方法を考えた。

フーリエ級数，フーリエ変換，ラプラス変換の応用として熱伝導方程式の解法を説明する。

1 次元熱伝導方程式とは長さが有限 $(0 \leqq x \leqq L)$，半無限 $(0 \leqq x < \infty)$，あるいは無限 $(-\infty < x < \infty)$ の棒において，熱が伝導するときの温度分布 u の方程式である。$u(t\,,\,x)$ を時刻 t，位置 x における棒の温度とすると，$u = u(t\,,\,x)$ は式

$$\boxed{*} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad \text{(1 次元熱伝導方程式)}$$

を満たす。ここで k は正の定数である。これを **1 次元熱伝導方程式**という。

この方程式を棒の長さによって 3 通りの場合に分ける。

A　棒の長さが有限 $(0 \leqq x \leqq L)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(0 \leqq x \leqq L)$ の範囲であるとする。この式を

[初期条件]　　$u(0\,,\,x) = f(x)$　　　　　　　　$(A-1)$

[境界条件]　　$u(t\,,\,0) = 0\ ,\qquad u(t\,,\,L) = 0$　　　$(A-2)$

のもとに解きたい。

< 解法 >　$u(t\,,\,x)$ が 時間の関数 $T(t)$ と 位置の関数 $X(x)$ の積として表されているとすれば，$u(t\,,\,x) = T(t)X(x)$ であり，式 $\boxed{*}$ より

$T'(t)X(x) = k^2 T(t)X''(x) \;\Rightarrow\; \dfrac{T'(t)}{T(t)} = k^2 \dfrac{X''(x)}{X(x)} = K$ (定数) とおくと

$T'(t) = KT(t)$ より $T(t) = Ae^{Kt}$ (A は定数) となる。

$X''(x) = \dfrac{K}{k^2} X(x)$

(1)　$K > 0$ のとき　$X(x) = Be^{\frac{\sqrt{K}}{k}x} + Ce^{-\frac{\sqrt{K}}{k}x}$ ($B\,,\,C$ は定数) となるが，境界条件より $X(0) = X(L) = 0$ より $B = C = 0$ となり
$X(x) = 0 \;\Rightarrow\; u(t\,,\,x) = 0$ となりだめ。

(2)　$K = 0$ のとき　$X(x) = Bx + C$ ($B\,,\,C$ は定数) となるが，やはり境界条件より $X(x) = 0$ となってだめ。

< 熱伝導方程式への応用 2 >

〈 **A** (棒有限) の解法の続き 〉

(3)　$K < 0$ のとき　$K = -q^2$　とおくと，

$$X(x) = B\cos\left(\frac{q}{k}x\right) + C\sin\left(\frac{q}{k}x\right) \qquad (B\ ,\ C\ \text{は定数})$$

となる。境界条件　$X(0) = 0$　より　　$B = 0 \ \Rightarrow\ X(x) = C\sin\left(\frac{q}{k}x\right)$

$X(L) = 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{q}{k} = \dfrac{n\pi}{L}$　$(n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots)$　であるから，

$$X_n(x) = C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad T_n(t) = A_n e^{-q^2 t} = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}$$

とおくと，$u(t\ ,\ x) = T_n(t)X_n(x)$　は $\boxed{*}$ の解であり，その和

$$u(t\ ,\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t\ ,\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

も $\boxed{*}$ の解である。初期条件より

$$u(0\ ,\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

である。これは $f(x)$ のフーリエ級数の形をしている。x は $(0 \leqq x \leqq L)$ の範囲であるが，$f(-x) = -f(x)$ と定めると，$f(x)$ は $(-L \leqq x \leqq L)$ で定義された奇関数である。周期 $2L$ の奇関数のフーリエ係数は

$$A_n C_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

となる。よって求める解は

$$u(t\ ,\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$= \underline{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

となる。これが 熱伝導方程式 $\boxed{*}$ を 初期条件 $(A-1)$，境界条件 $(A-2)$ のもとで解いた解である。このように x の範囲が有限の場合はフーリエ級数によって $\boxed{*}$ は解くことができる。

< 熱伝導方程式への応用 3 >

B　棒の長さが無限 $(-\infty < x < \infty)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(-\infty < x < \infty)$ の範囲であるとする。この式を

[初期条件]　$u(0\,,\,x) = f(x)$　　$(B-1)$

[境界条件]　$u(t\,,\,-\infty) = \lim_{x\to-\infty} u(t\,,\,x) = 0$　　$(B-2)$

$u(t\,,\,+\infty) = \lim_{x\to+\infty} u(t\,,\,x) = 0$　　$(B-3)$

のもとで解く。

< 解法 >　未知関数 $u = u(t\,,\,x)$ は t をパラメータとし，x の関数と考えて，x に関するフーリエ変換を

$$\mathscr{F}[u(t\,,\,x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t\,,\,x)e^{-i\omega x}dx = U(t\,,\,\omega)$$

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)$$

とおく。$\mathscr{F}\left[\dfrac{d^2u}{dx^2}\right] = (i\omega)^2\,U(t\,,\,\omega) = -\omega^2\,U(t\,,\,\omega)$　より，$\boxed{*}$ のフーリエ変換をすると

$$\frac{d}{dt}U(t\,,\,\omega) = -k^2\omega^2\,U(t\,,\,\omega)$$

よって

$$U(t\,,\,\omega) = Ae^{-k^2\omega^2 t}$$

ここで A は変数 t に関しては定数であるが，ω の値によっては変わるかもしれないので $A = A(\omega)$ とおく。$t = 0$ とおくと初期条件より

$$u(0\,,\,x) = f(x) \quad \overset{\text{フーリエ変換}}{\longrightarrow} \quad U(0\,,\,\omega) = F(\omega) = A(\omega)$$

よって　$U(t\,,\,\omega) = F(\omega)e^{-k^2\omega^2 t}$

一方　$\mathscr{F}^{-1}[e^{-k^2t\omega^2}] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t\omega^2}e^{i\omega x}d\omega = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}}e^{-\frac{x^2}{4k^2t}} = g(x)$

よって　$u(t\,,\,x) = \mathscr{F}^{-1}[U(t\,,\,\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)e^{-k^2\omega^2 t}] = (f * g)(x)$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4k^2t}}d\tau}$$

これが $\boxed{*}$ の $(B-1)$，$(B-2)$，$(B-3)$ をみたす解である。このような無限区間 $(-\infty < x < \infty)$ ではフーリエ変換を用いる。

＜熱伝導方程式への応用 4＞

C　棒の長さが半無限 $(0 \leqq x < \infty)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(0 \leqq x < \infty)$ の範囲であるとする。この式を

［初期条件］　$u(0\,,\,x) = 0$　　$(C-1)$

［境界条件］　$u(t\,,\,0) = g(t)$ ，　$u(t\,,\,+\infty) = \lim_{x \to +\infty} u(t\,,\,x) = 0$　　$(C-2)$

のもとで解く。

＜解法＞　x をパラメータとみなし，$u(t\,,\,x)$ の t に関するラプラス変換を

$$\mathscr{L}[u(t\,,\,x)] = \int_0^\infty u(t\,,\,x)e^{-st}dt = U(s\,,\,x)$$

とおく。この両辺を x で 2 回微分すると，$\mathscr{L}[u_{xx}] = U_{xx}(s\,,\,x)$ である。

また $\mathscr{L}\left[\dfrac{du}{dt}\right] = sU(s\,,\,x) - u(0\,,\,x) = sU(s\,,\,x)$ である。よって $\boxed{*}$ の

ラプラス変換は $sU(s\,,\,x) = k^2U_{xx}(s\,,\,x)$ より $\dfrac{d^2U}{dx^2} = \dfrac{s}{k^2}U$

だから　$U(s\,,\,x) = Ae^{\frac{\sqrt{s}}{k}x} + Be^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

境界条件より　$U(s\,,\,+\infty) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ ，　$U(s\,,\,x) = Be^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

$U(s\,,\,0) = \mathscr{L}[u(t\,,\,0)] = \mathscr{L}[g(t)] = G(s)$　より　$B = G(s)$

よって　$U(s\,,\,x) = G(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

一方　$\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}] = \dfrac{\frac{x}{k}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{4t}} = \dfrac{x}{2k\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4tk^2}} = \gamma(t)$

とおくと　$u(t\,,\,x) = \mathscr{L}^{-1}[U(s\,,\,x)] = \mathscr{L}^{-1}[G(s)e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}]$

$$= (g*\gamma)(t) = \underline{\int_0^t \frac{x}{2k\sqrt{\pi}}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)k^2}}g(\tau)d\tau}$$

これが $\boxed{*}$ の $(C-1)$，$(C-2)$ をみたす解である。このような半無限区間 $(0 \leqq x < \infty)$ ではラプラス変換を用いる。

<u>研究課題</u>　$f(x)$ は絶対可積分な連続関数とする。この $f(x)$ に対して

$$u(t\,,\,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4t}}d\tau$$

とおく。

(1)　$u(t\,,\,x)$ は熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t > 0, -\infty < x < \infty)$$

を満たすことを示せ。

(2)　初期条件

$$\lim_{t \to +0} u(t\,,\,x) = f(x)$$

を満たすことを示せ。

第 5 章　付録（証明他）

< 可積分性 1 >

定理 5.1　区間 $[a,\ b]$ で区分的に連続な関数 $f(t)$ は (リーマン) 積分可能である。

(証明)　$f(t)$ の不連続点を $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_l$ $(t_0 = a \leqq t_1 < t_2 < \cdots t_l < b = t_{l+1})$

とする。

$$F_i(t) = \begin{cases} f(t_{i+1} - 0) : t = t_{i+1} \\ f(t) \qquad\quad : t_i < t < t_{i+1} \quad (0 \leqq i \leqq l) \\ f(t_i + 0) \quad : t = t_i \end{cases}$$

とおくと, $F_i(t)$ は部分区間 $[t_i,\ t_{i+1}]$ で連続だから, $[t_i,\ t_{i+1}]$

で有界かつ一様連続である。従って $f(t)$ は $[t_i,\ t_{i+1}]$ で有界である。

よって $f(t)$ は区間 $[a,\ b]$ で有界であり $M = \sup\{f(t) : a \leqq t \leqq b\}$,

$m = \inf\{f(t) : a \leqq t \leqq b\}$ とおくと $m \leqq f(t) \leqq M$ $(a \leqq t \leqq b)$ である。

また $F_i(t)$ が $(t_i,\ t_{i+1})$ で一様連続だから $f(t)$ も $(t_i,\ t_{i+1})$ で一様連続より

$$\varphi_i(\delta) = \sup\{|f(t) - f(t')| : |t - t'| < \delta, \quad t, t' \in (t_i, t_{i+1})\}$$

とおくと $\lim\limits_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \varphi_i(\delta) = 0$ $(1 \leqq i \leqq l)$ が成り立つ。

従って $\lim\limits_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \max\limits_{1 \leqq i \leqq l} \varphi_i(\delta) = 0$ が成り立つ。

$[a,\ b]$ の分割 $\Delta : a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ に対し,

$K = \{k : 1 \leqq k \leqq n,$ ある i $(0 \leqq i \leqq l)$ が存在し, $[s_{k-1},\ s_k] \subset (t_i,\ t_{i+1})\}$

$J = \{k : 1 \leqq k \leqq n,\ k \notin K\}$, $|\Delta| = \max\limits_{1 \leqq k \leqq n} |s_k - s_{k-1}|$

とおくと J の要素は高々l 個である。ここで分割 Δ に対し

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{k=1}^{n} m_k(s_k - s_{k-1}) \quad , \quad \bar{S}_\Delta = \sum_{k=1}^{n} M_k(s_k - s_{k-1})$$

$m_k = \inf\{f(t) : s_{k-1} \leqq t \leqq s_k\}$, $M_k = \sup\{f(t) : s_{k-1} \leqq t \leqq s_k\}$

とするとき

$$\begin{aligned} \bar{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k \in K} (M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) + \sum_{k \in J} (M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) \\ &\leqq (b - a) \max_{1 \leqq i \leqq l} \varphi_i(|\Delta|) + (M - m) l |\Delta| \ \to\ 0 \ (|\Delta| \to 0) \end{aligned}$$

すなわち $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} (\bar{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta) = 0$ より $f(t)$ は $[a,\ b]$ で (リーマン) 積分可能である。(証明終了)

< 可積分性 2 >

定理 5.2　区間 $[a,b]$ で積分可能な関数 $f(t)$ に対し

$$f_+(t) = \max\{f(t), 0\} \quad , \quad f_-(t) = \min\{f(t), 0\}$$

とおくと，$f_+(t)$ と $f_-(t)$ および $|f(t)|$ は積分可能である。

$f(t)$ が積分可能かつ有界であれば $|f(t)|^2$ も積分可能である。

(証明)　区間 $[a,b]$ の任意の分割を $\Delta \ : \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$

分割 Δ の最大幅を $|\Delta| = \max\{t_k - t_{k-1} \ : \ 1 \leqq k \leqq n\}$

$$M_k = \sup\{f(t) \ : \ t_{k-1} \leqq t \leqq t_k\} \ , \ m_k = \inf\{f(t) \ : \ t_{k-1} \leqq t \leqq t_k\}$$

$$M_k^+ = \sup\{f_+(t) \ : \ t_{k-1} \leqq t \leqq t_k\} \ , \ m_k^+ = \inf\{f_+(t) \ : \ t_{k-1} \leqq t \leqq t_k\}$$

$$M_k^- = \sup\{f_-(t) \ : \ t_{k-1} \leqq t \leqq t_k\} \ , \ m_k^- = \inf\{f_-(t) \ : \ t_{k-1} \leqq t \leqq t_k\}$$

とおく。$f(t)$ は積分可能であるから

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) = 0 \quad \cdots \ ①$$

となる。一方 $M_k^+ - m_k^+ \leqq M_k - m_k \quad , \quad M_k^- - m_k^- \leqq M_k - m_k$ だから

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (M_k^+ - m_k^+)(t_k - t_{k-1}) = 0 \quad \cdots \ ②$$

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (M_k^- - m_k^-)(t_k - t_{k-1}) = 0 \quad \cdots \ ③$$

が成り立つ。 ②,③より $f_+(t)$ と $f_-(t)$ が積分可能であることが示された。

$|f(t)| = f_+(t) - f_-(t)$ より $|f(t)|$ も積分可能である。

任意の分割 $\Delta \ : \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ に対し

$$A_k = \sup\{|f(t)| : t_{k-1} \leqq t \leqq t_k\} \ , \ a_k = \inf\{|f(t)| \ : \ t_{k-1} \leqq t \leqq t_k\}$$

とおくと $|f(t)|$ の可積分性から

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (A_k - a_k)(t_k - t_{k-1}) = 0$$

となる。従って

$$0 \leqq \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (A_k^2 - a_k^2)(t_k - t_{k-1}) \leqq \lim_{n \to \infty} 2 \sup_{a \leqq t \leqq b} |f(t)| \times \sum_{k=1}^{n} (A_k - a_k)(t_k - t_{k-1}) = 0$$

より $|f(t)|^2$ も積分可能である。　(証明終)

$<$ 可積分性 3 $>$

定理 5.3　ある定数 $p(>1)$ に対し $|f(t)|^p$ が $[a,b]$ で積分可能であれば

$|f(t)|$ も積分可能である。

(証明)　$[a,b]$ の分割 Δ ： $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ に対し

$$M_k=\sup\{|f(t)|\ :\ t_{k-1}\leqq t\leqq t_k\}\ ,$$

$$m_k=\inf\{|f(t)|\ :\ t_{k-1}\leqq t\leqq t_k\}\ ,$$

$|\Delta|=\max|t_k-t_{k-1}|\ :\ 1\leqq k\leqq n$ とおくと，

$$M_k^p=\sup\{|f(t)|^p\ :\ t_{k-1}\leqq t\leqq t_k\}\ ,$$

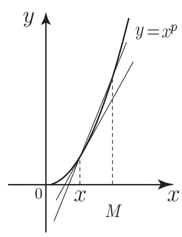
$$m_k^p=\inf\{|f(t)|^p\ :\ t_{k-1}\leqq t\leqq t_k\}$$

であり，$|f(t)|^p$ が $[a,b]$ で積分可能だから

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(M_k^p-m_k^p)(t_k-t_{k-1})=0$$

である。従って，任意の正数 ε に対し，ある正数 δ が存在して，$|\Delta|<\delta$ である任意の分割 Δ に対し

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k^p-m_k^p)(t_k-t_{k-1})<\varepsilon^p\quad\cdots\ ①$$



が成り立つ。この分割 Δ に対し

$$I=\{k\ :\ M_k\geqq\varepsilon\ ,\ 1\leqq k\leqq n\}\ ,\ J=\{k\ :\ M_k<\varepsilon\ ,\ 1\leqq k\leqq n\}$$

とおく。正数 M に対し $p>1$ より $0\leqq x\leqq M$ に対して $M^p-x^p-(M-x)px^{p-1}\geqq 0$

である。そこで $g(x)=\dfrac{M-x}{M^p-x^p}\ (0\leqq x<M)$, $g(M)=\dfrac{1}{pM^{p-1}}$ とおくと

$$g'(x)=-\frac{M^p-x^p-(M-x)px^{p-1}}{(M^p-x^p)^2}\leqq 0 \text{ より } g(x)=\frac{M-x}{M^p-x^p}\leqq g(0)=\frac{1}{M^{p-1}} \text{ となる。}$$

よって①より

$$\sum_{k\in I}(M_k-m_k)(t_k-t_{k-1})=\sum_{k\in I}\frac{M_k-m_k}{M_k^p-m_k^p}\cdot(M_k^p-m_k^p)(t_k-t_{k-1})$$

$$\leqq\sum_{k\in I}\frac{1}{M^{p-1}}\cdot(M_k^p-m_k^p)(t_k-t_{k-1})\leqq\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\sum_{k\in I}(M_k^p-m_k^p)(t_k-t_{k-1})\leqq\frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^{p-1}}=\varepsilon\quad\cdots\ ②$$

一方 $\displaystyle\sum_{k\in J}(M_k-m_k)(t_k-t_{k-1})\leqq\sum_{k\in J}M_k(t_k-t_{k-1})\leqq\varepsilon\sum_{k\in J}(t_k-t_{k-1})\leqq\varepsilon(b-a)\quad\cdots\ ③$

② , ③ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(t_k-t_{k-1})\leqq\varepsilon+\varepsilon(b-a)=\varepsilon(1+b-a)$　　　(証明終)

< 関数列の収束 >

$I=[a,b]$ を閉区間とする。I で定義された関数 $f_n,\ f_\infty : I \to \mathbb{R}\ (n=1,2,\cdots)$ がある。

[定義 5.1]　(1)　任意の $t \in I$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f_\infty(t)$ であるとき、
関数列 $\{f_n\}$ は f_∞ に I で**各点収束**するという。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(t)-f_\infty(t)|^2\,dt = 0$ であるとき、
関数列 $\{f_n\}$ は f_∞ に I で**平均２乗収束**するという。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup_{a \leqq t \leqq b}|f_n(t)-f_\infty(t)| = 0$ であるとき、
関数列 $\{f_n\}$ は f_∞ に I で**一様収束**するという。

(注)　1　一様収束であれば、各点収束かつ平均２乗収束である。
2　各点収束であっても一様収束するとは限らない。

(例) $I=[0,\ 1],\ f_n(t) = \dfrac{1}{1+nt}$ のとき各点収束極限の関数は

$$f_\infty(t) = \begin{cases} 1 & : \quad t=0 \\ 0 & : \quad 0 < t \leqq 1 \end{cases}$$

であるが

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1}|f_n(t)-f_\infty(t)| \ \geqq \ \sup_{0<t \leqq \frac{1}{n}}|f_n(t)-0| \ \geqq \ \frac{1}{2}$$

より一様収束しない。

定理 5.4　$f_n\ :\ I \to \mathbb{R}$ が連続で $\{f_n\}$ が f_∞ に I で一様収束すれば、
$f_\infty\ :\ I \to \mathbb{R}$ は連続である。

（証明）　$\{f_n\}$ が f_∞ に一様収束するから、任意の正数 ε に対し、
ある自然数 m があって $n \geqq m$ であれば $\displaystyle\sup_{a \leqq t \leqq b}|f_n(t)-f_\infty(t)| < \varepsilon/3$
となる。
$t_0 \in I$ に対し、$f_m(t)$ は $t=t_0$ で連続だから、上記の ε に対し、
十分小さい δ をとれば $|t-t_0|<\delta\ (t \in I)$ である限り $|f_m(t)-f_m(t_0)| < \varepsilon/3$
となる。よってこのとき
$|f_\infty(t)-f_\infty(t_0)| \leqq |f_\infty(t)-f_m(t)| + |f_m(t)-f_m(t_0)| + |f_m(t_0)-f_\infty(t_0)| < \varepsilon$
より f_∞ は $t=t_0$ で連続である。　　　（証明終）

< フェイエルの定理 1 >

周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t} \qquad \left(c_k = \frac{1}{2L}\int_{L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt,\ \omega = \frac{\pi}{L} \right)$$

に対し、0 から n までの平均を

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j(t)$$

とおく。このとき次が成り立つ。

定理 5.5

$$\boxed{f(t) \text{ が連続ならば} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{-L \leqq t \leqq L} |\sigma_n(t) - f(t)| = 0}$$

この定理をフェイエル（$Fejér$) の定理という。$L = \pi$ のとき証明する。

＜証明の準備＞

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=-j}^{j} c_k e^{ikt}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left\{c_{-j}e^{-ijt} + \cdots + c_0 + \cdots + c_j e^{ijt}\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1)c_0 + n\{c_{-1}e^{-it} + c_1 e^{it}\} + (n-1)\{c_{-2}e^{-i2t} + c_2 e^{i2t}\} + \cdots + 1\left\{c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{r=-n}^{n}(n+1-|r|)c_r e^{irt}$$

ここで　$K_n(s) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{r=-n}^{n}(n+1-|r|)e^{irs}$　とおくと

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{r=-n}^{n}(n+1-|r|)e^{irt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-irs}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{r=-n}^{n}(n+1-|r|)e^{ir(t-s)}\right\}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)K_n(t-s)ds$$　と書ける。

< フェイエルの定理２ >

補題 5.1　(1)　$K_n(-s) = K_n(s),\ K_n(s+2\pi) = K_n(s)$

(2)　$$K_n(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}s)}{\sin(\frac{s}{2})}\right)^2 & :\ 0 < |s| < \pi \text{ のとき} \\ \\ n+1 & :\ s = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(3)　$0 < \delta < \pi$　のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ \sup_{\delta \leqq |s| \leqq \pi} |K_n(s)| = 0$

(4)　$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)ds = 1$

（証明）　(1) は明らか。(2) を示す。 $0 < |s| < \pi$ のとき

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} e^{i(k-\frac{n}{2})s}\right\}^2 = \left\{e^{-i\frac{n}{2}s} + e^{-i(\frac{n}{2}-1)s} + \cdots + e^{i(\frac{n}{2}-1)s} + e^{i\frac{n}{2}s}\right\}^2$$

この右辺を展開した各項を平面に並べると

	$e^{-i\frac{n}{2}s}$	$+$	$e^{-i(\frac{n}{2}-1)s}$	$+$	$\cdots$	$+$	$e^{i(\frac{n}{2}-1)s}$	$+$	$e^{i\frac{n}{2}s}$
$e^{-i\frac{n}{2}s}$	e^{-ins}	$+$	$e^{-i(n-1)s}$	$+$	$\cdots$	$+$	e^{-is}	$+$	1
$+$									
$e^{-i(\frac{n}{2}-1)s}$	$+e^{-i(n-1)s}$	$+$	$e^{-i(n-2)s}$	$+$	$\cdots$	$+$	1	$+$	e^{is}
$+$									
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
$+$									
$e^{i(\frac{n}{2}-1)s}$	$+e^{-is}$	$+$	1	$+$	$\cdots$	$+$	$e^{i(n-2)s}$	$+$	$e^{i(n-1)s}$
$+$									
$e^{i\frac{n}{2}s}$	$+1$	$+$	e^{is}	$+$	$\cdots$	$+$	$e^{i(n-1)s}$	$+$	e^{ins}

となり、同じ値が対角線上に並んでいるから

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} e^{i(k-\frac{n}{2})s}\right\}^2 = (n+1) + n(e^{-is}+e^{is}) + (n-1)(e^{-i2s}+e^{i2s}) + \cdots$$
$$+2(e^{-i(n-1)s}+e^{i(n-1)s}) + 1(e^{-ins}+e^{ins})$$

$$= n+1+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(e^{-iks}+e^{iks}) = \sum_{r=-n}^{n}(n+1-|r|)e^{irs} = (n+1)K_n(s)$$

< フェイエルの定理３ >

[前ページ補題 5.1 の証明の続き]

$0 < |s| < \pi$ のとき $\left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{i(k-\frac{n}{2}s)}\right\}^2 = (n+1)K_n(s)$ より

$$K_n(s) = \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{k=0}^{n} e^{i(k-\frac{n}{2})s}\right\}^2 = \frac{1}{n+1}\left\{e^{-\frac{ins}{2}}\sum_{k=0}^{n} e^{iks}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{e^{-\frac{ins}{2}} \cdot \frac{1-e^{i(n+1)s}}{1-e^{is}}\right\}^2 = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{e^{-\frac{ins}{2}} - e^{i(\frac{n}{2}+1)s}}{1-e^{is}}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\frac{e^{-\frac{i(n+1)}{2}s} - e^{\frac{i(n+1)}{2}s}}{e^{-\frac{is}{2}} - e^{\frac{is}{2}}}\right\}^2 = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{-2i\sin(\frac{s}{2})}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\frac{\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{\sin(\frac{s}{2})}\right\}^2$$ である。また $s = 0$ のとき

$$K_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{r=-n}^{n}(n+1-|r|)e^0 = \frac{1}{n+1}\left\{n+1+2\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[n+1+2\left\{(n+1)n - \frac{n(n+1)}{2}\right\}\right] = \frac{1}{n+1}\left[(n+1)+(n+1)n\right] = n+1$$

(3) の証明

$|s| \geqq \delta$ のとき $\dfrac{\delta}{2} \leqq |\dfrac{s}{2}| \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\left|\sin\left(\dfrac{s}{2}\right)\right| \geqq \sin\left(\dfrac{\delta}{2}\right)$ だから

$|K_n(s)| = \dfrac{1}{n+1}\left\{\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{\sin(\frac{s}{2})}\right\}^2 \leqq \dfrac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{\delta}{2})}$ より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup_{\delta \leqq |s| \leqq \pi}|K_n|(s) = 0$　が従う

(4) の証明

p21 の①の証明より $L = \pi$ のとき $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{irs}ds = \begin{cases} 1 & : \ r = 0 \\ 0 & : \ r \neq 0 \end{cases}$

だから

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)ds = \frac{1}{n+1}\sum_{r=-n}^{n}(n+1-|r|)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{irs}ds$$

$$= \frac{1}{n+1} \times (n+1-0) \times 1 = 1$$　　（証明終）

< フェイエルの定理 4 >

[フェイエルの定理の証明]

$f(t)$ は $[-\pi,\pi]$ で連続だから一様連続である。従って任意の正数 ε に対し、
ある正数 δ が存在して,

$$|t-s|<\varepsilon \quad \big((t,s)\in[-\pi,\pi]\big) \text{ であれば } |f(t)-f(s)|<\varepsilon$$

となる。また $f(t)$ は $[-\pi,\pi]$ で有界だから $|f(t)|$ の最大値を

$M=\max\limits_{-\pi\leqq t\leqq\pi}|f(t)|$ とおく。補題 (1) より $f(t-u)K_n(u)$ は周期 2π だから

$$\sigma_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)K_n(t-s)ds=\frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi}f(t-u)K_n(u)(-1)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi}f(t-u)K_n(u)du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-u)K_n(u)du \quad \text{と表される。}$$

ここで補題 (3) より、ある自然数 N が存在し、$n\geqq N$ であれば

$\sup\limits_{\delta\leqq|u|\leqq\pi}|K_n(u)|\leqq\dfrac{\varepsilon}{2M}$ 　ととれる。よって

$$|\sigma_n(t)-f(t)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}f(t-u)K_n(u)du-f(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(u)du\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(t-u)-f(t)\}K_n(u)du\right|$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{|u|<\delta}|f(t-u)-f(t)|K_n(u)du+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqq|u|\leqq\pi}|f(t-u)-f(t)|K_n(u)du$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|u|<\delta}K_n(u)du+2M\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqq|u|\leqq\pi}K_n(u)du$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(u)du+\frac{M}{\pi}\cdot\int_{\delta\leqq|u|\leqq\pi}\frac{\varepsilon}{2M}du\leqq\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

t は $[-\pi,\pi]$ の任意の点だから、$n\geqq N$ のとき

$$\sup_{-\pi\leqq t\leqq\pi}|\sigma_n(t)-f(t)|\leqq 2\varepsilon$$

が成り立つ。すなわち $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-\pi\leqq t\leqq\pi}|\sigma_n(t)-f(t)|=0$ が成り立つ。（証明終了）

< 不等式 1 >

[定義 5.2]　$[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ に対し，任意の $x_1, x_2 \in [a,b]$, $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$f\bigl((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\bigr) \leqq (1-\lambda)f\bigl(x_1\bigr) + \lambda f\bigl(x_2\bigr)$$

が成り立つとき，$f(x)$ を**凸** (または**下に凸**) という。

$f(x)$ が $[a,b]$ で凸であれば，次の不等式が帰納法で証明される。

$$(*)_1 \quad \boxed{f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right) \leqq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}$$

ここで $\alpha_i \geqq 0$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n > 0$, $x_i \in [a,b]$ である。 $f(x) = x^p$ $(p > 1)$ は $[0, \infty)$ で凸であるから，$z_i \geqq 0$ に対し

$$\left(\frac{\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right)^p \leqq \frac{\alpha_1 z_1^p + \cdots + \alpha_n z_n^p}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n)^p \leqq (\alpha_1 z_1^p + \cdots + \alpha_n z_n^p) \times (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{p-1}$$

が成り立つ。そこで任意の正数 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ に対し $\alpha_i = y_i^{\frac{p}{p-1}}$, $z_i = x_i \cdot \alpha_i^{-\frac{1}{p}}$ とおくと $\alpha_i z_i^p = x_i^p$, $\alpha_i z_i = x_i y_i$ となる。また $q = \dfrac{p}{p-1}$ とおくと $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\alpha_i = y_i^{\frac{p}{p-1}} = y_i^q$ より $(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^p \leqq (x_1^p + \cdots + x_n^p) \times (y_1^q + \cdots + y_n^q)^{p-1}$ だから

$$(*)_2 \quad \boxed{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leqq (x_1^p + \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \times (y_1^q + \cdots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

が成り立つ。$(*)_2$ を **Hölder** の不等式という。

$$f(x) = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^p \ (p > 1) \text{ は } [0,1) \text{ で凸である} \quad \left(f'(x) = -\frac{\left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1}}{x^{\frac{p-1}{p}}} \text{ は単調増加}\right)$$

から $(*)_1$ を適用し両辺の p 乗根をとると

$$1 - \left(\frac{\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{\left\{\alpha_1 \left(1 - z_1^{\frac{1}{p}}\right)^p + \cdots + \alpha_n \left(1 - z_n^{\frac{1}{p}}\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}}{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\Downarrow$$

$$(*)_3 \quad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{\frac{1}{p}} \leqq (\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n)^{\frac{1}{p}} + \left\{\alpha_1 \left(1 - z_1^{\frac{1}{p}}\right)^p + \cdots + \alpha_n \left(1 - z_n^{\frac{1}{p}}\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

< 不等式 2 >

< 前ページの続き >

$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \geqq 0$ ， $x_i + y_i > 0$ となるように任意の数 x_i, y_i に対し，

$$z_i = \left(\frac{y_i}{x_i + y_i}\right)^p \quad , \quad \alpha_i = (x_i + y_i)^p$$

とおき，前ページの $(*)_3$ に代入すると，$\alpha_i z_i = y_i^p$ ，$\alpha_i \left(1 - z_i^{\frac{1}{p}}\right)^p = x_i^p$ より

$$(*)_4 \quad \boxed{\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}}$$

が成り立つ。$(*)_4$ を **Minkowski** の不等式という。

$(*)_2$ と $(*)_4$ を積分不等式にする。$f(x), g(x)$ は $[a, b]$ で有界かつ

積分可能であるとする。定理 5.2(およびその証明) より $|f(x)|$ ，$|g(x)|$ ，$|f(x)|^p$ ，$|g(x)|^q$ $\left(p > 1\ ,\ q > 1\ ,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$ も積分可能である。区間 $[a, b]$ を n 等分し，その分点を

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ， $h = \dfrac{b-a}{n}$ とおく。不等式 $(*)_2$ から

$$\begin{aligned} h\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\cdot|g(x_i)| \quad &\leqq \quad h\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\ &= \left(h\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(h\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

を得る。ここで $n \to \infty$ とすると，積分の定義から

$$(*)_5 \quad \boxed{\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \ \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

が成り立つ。$(*)_5$ も **Hölder** の不等式と呼ばれる。

同様にして $(*)_4$ 式から

$$(*)_6 \quad \boxed{\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \ \leqq \ \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad (p > 1)$$

が成り立つ。$(*)_6$ も **Minkowski** の不等式と呼ばれる。

< フーリエ級数の第 n 部分和 >

周期 $2L$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ik\omega t} \qquad \left(c_k(f) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}dt \,,\ \omega = \frac{\pi}{L} \right)$$

とおく。また $[\,-L\,,\ L]$ で定義された 2 乗可積分関数 $f(t)$ に対し,

$$||f|| = \left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく。このとき $||f + g|| \leqq ||f|| + ||g||$ (ミンコフスキーの不等式) が成り立つ。

補題 5.2　(1)　$[\,-L\,,\ L]$ で定義された関数 f , g と定数 α , β に対し, 次式が成り立つ。

$$S_n(\alpha f + \beta g) = \alpha S_n(f) + \beta S_n(g)$$

(2)　f が $[\,-L\,,\ L]$ で 2 乗可積分であれば　$||S_n(f)|| \leqq ||f||$ が成り立つ。

(3)　実数定数　a_0 , a_k , b_k　($1 \leqq k \leqq n$) に対し,

$$h(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\} \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{L} \right)$$

で定められた関数 h は $S_n(h)(t) = h(t)$ をみたす。

(証明) (1)　は　$c_k(\alpha f + \beta g) = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} \{\alpha f(t) + \beta g(t)\}\, e^{-ik\omega t}dt = \alpha c_k(f) + \beta c_k(g)$

から得られる。

(2)　は　P22　で得られた式より

$$||S_n(f)|| = \left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |S_n(f)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = ||f||$$　が得られる。

(3)　は　P17　で得られる式から

$$c_k(h) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(t)e^{-ik\omega t}dt = \frac{1}{2}(a_k - b_k i)$$

$c_{-k}(h) = \dfrac{1}{2}(a_k + b_k i)$, $c_0(h) = \dfrac{1}{2}a_0$　より

$$S_n(h)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(h)e^{-ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\} = h(t)$$

となる。 (証明終)

< フーリエ級数の平均 2 乗収束 >

定理 1.3　f が $[-L,\ L]$ で連続であれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}||S_n(f)-f||=0$

(証明)　f のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(f)$ に対し,

$\displaystyle\sigma_n(f)(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f)(t)$　とおく。フェイエルの定理から

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup_{-L\leqq t\leqq L}|\sigma_n(f)(t)-f(t)|=0$　だから

$$\lim_{n\to\infty}||\sigma_n(f)-f||=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|\sigma_n(f)(t)-f(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}=0$$

が成り立つ。一方 $\sigma_n(f)$ は三角多項式だから, 補題 5.2(3) より

$S_n(\sigma_n(f))=\sigma_n(f)$ である。また補題 5.2(2) より $||S_n\bigl(f-\sigma_n(f)\bigr)||\leqq||f-\sigma_n(f)||$

だから、ミンコフスキーの不等式と補題 5.2(1) より

$$||S_n(f)-f||\leqq||S_n(f)-S_n(\sigma_n(f))||+||S_n(\sigma_n(f))-\sigma_n(f)||+||\sigma_n(f)-f||$$

$$=||S_n\bigl(f-\sigma_n(f)\bigr)||+||\sigma_n(f)-f||\leqq 2||\sigma_n(f)-f||$$

である。よって

$$\lim_{n\to\infty}||S_n(f)-f||\leqq\lim_{n\to\infty}2||\sigma_n(f)-f||=0$$　(証明終)

系　f が $[-L,\ L]$ で連続ならば, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(f)(t)|^2=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(t)|^2dt$

(証明)　p22 の証明から

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(t)|^2dt-\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)(t)|^2=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|S_n(f)(t)-f(t)|^2dt=||S_n(f)-f||^2$$

である。ここで $n\to\infty$ とすると, f は連続であるから $||S_n(f)-f||^2\to 0$ より

$\displaystyle\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(t)|^2dt-\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k(f)(t)|^2=0$　が得られる。(証明終)

(注)　$\displaystyle c_0(f)=\frac{a_0}{2}\ ,\ c_k(f)=\frac{1}{2}(a_k-b_ki)\ ,\ c_{-k}(f)=\frac{1}{2}(a_k+b_ki)$

と系から、パーセバルの等式 (補題 1.9(P23)) が得られる。

< ロピタルの定理 >

[1]　$f(x),\ g(x)$ は $x=a$ の近くで連続，a 以外で微分可能で $g'(x)\neq 0$ かつ $f(a)=g(a)=0$ とする。そのとき極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\bigl(f(x),\ g(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ ならば同じことがいえる。$\bigr)$

[2]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=0$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[3]　$x\to a+0$(右極限) のとき $f(x)\to+\infty,\ g(x)\to+\infty$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[4]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=+\infty$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明の概略)

[1] は $Cauchy$ の平均値の定理 $\displaystyle\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\quad(a<c<x)$ より従う。

[2] は $F(x)=f(\frac{1}{x}),\ G(x)=g(\frac{1}{x})$ に対して [1] の結果を使う。

[3] は $a<x<x_1$ に対しコーシーの平均値定理より

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad(x<c<x_1)$$

と表されるので

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\times\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

と変形されることにより従う。

[4] は $F(x)=f(\frac{1}{x}),\ G(x)=g(\frac{1}{x})$ とおいて [3] の結果 を使う。

< 積分記号下の微分 1 >

定理 5.6　$\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{J}$ を閉区間をする。2 変数関数 f: $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{J} \to \mathbb{R}$ と

その偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{J} \to \mathbb{R}$ が共に連続であれば, 任意の定数 $c, d \in\boldsymbol{J}$ に対して, 関数

$$F(x) = \int_c^d f(x,t)dt$$

は微分可能であり

$$\frac{d}{dx}F(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt$$

が成り立つ。

(証明)　$c < d$ のとき証明する。$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,t) = f_x(x,t)$ と書く。

$\boldsymbol{I}$ に含まれる任意の閉区間を $[a,\ b]$ とする。f_x は $[a,\ b] \times [c,\ d]$ で一様連続であるから,
任意の正数 ε に対しある正数 δ が存在して, $|x-y| < \delta,\ |t-s| < \delta \quad (x, y \in [a,b],\quad t, s \in [c,d])$
ならば $|f_x(x,t) - f_x(y,s)| < \varepsilon$ となる。
次に, 任意の $x \in (a,b),\ t \in [c,d],\ h\ (|h| < \delta)$ に対し平均値の定理より

$$\frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} = f_x(c,t) \qquad (c = x + \theta h)$$

をみたす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。　　$|c - x| = |\theta h| \leqq |h| \leqq \delta$

より $\left|\dfrac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} - f_x(x,t)\right| = |f_x(c,t) - f_x(x,t)| < \varepsilon$

より $|h| < \delta$ であれば

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_c^d f_x(x,t)dt\right| \leqq \int_c^d \left|\frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} - f_x(x,t)\right| dt$$

$$\leqq \int_c^d \varepsilon dt = (d-c)\varepsilon$$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_c^d f_x(x,t)dt$ が得られる。　(証明終)

< 積分記号下の微分 2 >

定理 5.7　I を開区間とする。2 変数関数 $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ とその偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が共に連続で, 任意の $x \in I$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)|dt < \infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| dt < \infty$$

が成り立つとする。このとき, 定数 $a,\ b \in I \quad (a < b)$ に対して

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{a \leqq x \leqq b} \int_{|t| \geqq R} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| dt = 0$$

であれば, 関数 $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt$ は $(a,\ b)$ で微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \qquad \text{が成り立つ。}$$

(注)　変数 t の積分区間を $[0,\ +\infty)$ としてもこの定理は成り立つ。

(証明)　$F_R(x) = \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x,t)dt \quad , \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \quad , \quad h_R(x) = \int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

とおく。条件より

$$\sup_{a \leqq x \leqq b} |h_R(x) - h(x)| = \sup_{a \leqq x \leqq b} \left|\int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt\right|$$

$$\leqq \sup_{a \leqq x \leqq b} \int_{|t| \geqq R} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| dt \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)$$

より, 任意の正数 ε に対し, 十分大きい正数 R をとれば $\displaystyle\sup_{a \leqq x \leqq b} |h_R(x) - h(x)| < \varepsilon$ となる。

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ は $[a,\ b] \times [-R,\ R]$ で一様連続だから, 上の ε と R に対して十分小さい正数 δ をとれば, $\ x,\ y \in [a,\ b], \quad t, s \in [-R, R], \quad |x-y| < \delta, \quad |t-s| < \delta$ ならば

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2R}$ となる。このとき

$$|h_R(x) - h_R(y)| = \left|\int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt - \int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x}(y,t)dt\right| \leqq \int_{-R}^{R} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\right| dt$$

$$\leqq \int_{-R}^{R} \frac{\varepsilon}{2R} dt = \varepsilon \qquad \text{より}$$

$$|h(x) - h(y)| \leqq |h(x) - h_R(y)| + |h_R(x) - h_R(y)| + |h_R(y) - h(y)| < 3\varepsilon$$

よって $h(x)$ は連続である。$a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ である $\alpha,\ \beta$ に対し

$$F(\beta) - F(\alpha) = \lim_{R\to\infty} F_R(\beta) - F_R(\alpha) = \lim_{R\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} F_R(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} h_R(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx \qquad \text{より } F(x) \text{ は微分可能であり}$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dx \qquad \text{が成り立つ。} \qquad \text{(証明終)}$$

< Abel 変換 >

補題 5.3　(Abel 変換)

2 組の数列 $\{u_0, u_1, \cdots, u_n\}$, $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ があり

$u_0 \geqq u_1 \geqq u_2 \geqq \cdots \geqq u_n \geqq 0$, $\sigma_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_k \quad (0 \leqq k \leqq n)$

とする。ことのき次の不等式が成り立つ。

$$u_0 \left(\min_{0 \leqq k \leqq n} \sigma_k \right) \leqq \sum_{k=0}^{n} u_k v_k \leqq u_0 \left(\max_{0 \leqq k \leqq n} \sigma_k \right)$$

(証明)　$S = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_0 \sigma_0 + u_1(\sigma_1 - \sigma_0) + \cdots + u_n(\sigma_n - \sigma_{n-1})$

$= \sigma_0(u_0 - u_1) + \sigma_1(u_1 - u_2) + \cdots + \sigma_{n-1}(u_{n-1} - u_n) + \sigma_n u_n$

ここで $u_0 - u_1 \geqq 0$, $u_1 - u_2 \geqq 0$, $\cdots$, $u_{n-1} - u_n \geqq 0$, $u_n \geqq 0$ より

$$S \leqq \left(\max_{0 \leqq k \leqq n} \sigma_k \right) \{(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) + u_n\}$$

$$= u_0 \left(\max_{0 \leqq k \leqq n} \sigma_k \right)$$

同様にして $S \geqq u_0 \left(\min_{0 \leqq k \leqq n} \sigma_k \right)$ が得られる。　(証明終)

系　(Abel の連続定理)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$

が $x = R$ で収束すれば, $0 \leqq x \leqq R$ で一様収束する。

(証明)　$x = R$ で収束するから任意の正数 ε に対し, ある自然数 N がとれて,　$p, q > N \quad (p < q)$ であれば

$$-\varepsilon < \sum_{k=p}^{q} a_k R^k < \varepsilon$$

が成り立つ。ここで $u_k = \left(\frac{x}{R} \right)^{k+p}$, $v_k = a_{k+p} R^{k+p}$ とおくと, 前定理より

$$\left(\frac{x}{R} \right)^p \min_{p \leqq s \leqq q} \left(\sum_{k=p}^{s} a_k R^k \right) \leqq \sum_{k=p}^{q} a_k x^k \leqq \left(\frac{x}{R} \right)^p \max_{p \leqq s \leqq q} \left(\sum_{k=p}^{s} a_k R^k \right)$$

より $-\varepsilon < \sum_{k=p}^{q} a_k x^k < \varepsilon$ から $0 \leqq x \leqq R$ で一様収束する。　(証明終)

< 積分の第 2 平均値の定理 1 >

定理 5.8　(積分の第 2 平均値の定理)

関数 $f,\ \varphi : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ は連続, φ は単調非増加

$(x < y \ \Rightarrow\ \varphi(x) \geqq \varphi(y))$ で正 $(\varphi(b) > 0)$ とする。このとき

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)dx \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

をみたす ξ が存在する。

(注)　φ は単調非増加であれば連続でなくても良い。$\varphi(x)f(x)$ が積分可能であれば定理は成り立つ。

(証明)　$[a,\ b]$ を n 等分した分点を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$,

$h = \dfrac{b-a}{n}$ とおく。$u_k = \varphi(x_k)$,　$v_k = f(x_k)h \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

に対し Abel 変換の定理より

①
$$\varphi(a)\left\{\min_k \sum_{j=0}^{k} f(x_j)h\right\} \leqq \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k)f(x_k)h \leqq \varphi(a)\left\{\max_k \sum_{j=0}^{k} f(x_j)h\right\}$$

が成り立つ。$\varphi(x)f(x)$ は連続だから $[a,\ b]$ で積分可能である。よって任意の正数 ε に対し, 十分大きな自然数 N をとれば, $n \geqq N$ のとき

②
$$\left|\sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k)f(x_k)h - \int_a^b \varphi(x)f(x)dx\right| < \varepsilon$$

が成り立つ。$f(x)$ は $[a,\ b]$ で一様連続であるから, 上記の ε に対し, ある正数 δ が存在して, $0 < \delta' \leqq \delta$ であれば

③
$$\sup_{\substack{|x-y|<\delta' \\ x,\ y\in[a,\ b]}} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\varphi(a)}$$

が成り立つ。ここで $h = \dfrac{b-a}{n} < \delta$ となるように $n \quad (\geqq N)$ を十分大きくとる。③式より

④
$$\left|\sum_{j=0}^{k} f(x_j)h - \int_a^{a+(k+1)h} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{\varphi(a)} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

が成り立つ。

< 積分の第 2 平均値の定理 2 >

(積分の第 2 平均値の定理の証明の続き)

④より

$$\sum_{j=0}^{k} f(x_j)h < \int_a^{a+(k+1)h} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\varphi(a)} \qquad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

だから

$$\max_k \sum_{j=0}^{k} f(x_j)h < \max_k \int_a^{a+(k+1)h} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\varphi(a)}$$

$$\leqq \max_{a \leqq \xi \leqq b} \int_a^{\xi} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\varphi(a)}$$

ここで $\varphi(a) > 0$ より

⑤　$$\varphi(a)\left\{\max_k \sum_{j=0}^{k} f(x_j)h\right\} \leqq \varphi(a)\left\{\max_{a \leqq \xi \leqq b} \int_a^{\xi} f(x)dx\right\} + \varepsilon$$

また②と①より

⑥　$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx - \varepsilon < \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_h)f(x_h)h \leqq \varphi(a)\left\{\max_k \sum_{j=0}^{k} f(x_j)h\right\}$$

⑤,⑥より

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx - \varepsilon < \varphi(a)\left\{\max_{a \leqq \xi \leqq b} \int_a^{\xi} f(x)dx\right\} + \varepsilon$$

ここで ε は任意の正数だから

⑦　$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx \leqq \varphi(a)\left\{\max_{a \leqq \xi \leqq b} \int_a^{\xi} f(x)dx\right\}$$

が成り立つ。同様にして

⑧　$$\varphi(a)\left\{\min_{a \leqq \xi \leqq b} \int_a^{\xi} f(x)dx\right\} \leqq \int_a^b \varphi(x)f(x)dx$$

が成り立つ。⑦,⑧から $\varphi(a)$ で割ると

$$\min_{a \leqq \xi \leqq b} \int_a^{\xi} f(x)dx \leqq \frac{1}{\varphi(a)} \int_a^b \varphi(x)f(x)dx \leqq \max_{a \leqq \xi \leqq b} \int_a^{\xi} f(x)dx$$

が成り立つ。$F(\xi) = \displaystyle\int_a^{\xi} f(x)dx$ は $[a,\ b]$ で定義された連続関数だから, 中間値の定理より,

ある ξ　$(a \leqq \xi \leqq b)$ が存在して

$$\frac{1}{\varphi(a)} \int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \int_a^{\xi} f(x)dx$$　が成り立つ。　(証明終)

< 広義積分の収束条件 1 >

定理 5.9　関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(t)|dt < \infty$　ならば　$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)dt$ は収束する。

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |f(t)|dt < \infty$　ならば　$\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(t)dt$ は収束する。

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$　ならば　$\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt$ は収束する。

(証明)　(1) を示す。

$$f_+(t) = \max\{f(t),\ 0\}\ ,\quad f_-(t) = \min\{f(t),\ 0\}$$ とおくと

$$f_+(t) + f_-(t) = f(t)\ ,\quad f_+(t) - f_-(t) = |f(t)|$$

$$0 \leqq f_+(t) \leqq |f(t)|\ ,\quad 0 \leqq -f_-(t) \leqq |f(t)|$$

である。ここで

$$F_+(t) = \int_0^t f_+(s)ds\ ,\quad F_-(t) = \int_0^t -f_-(s)ds$$

とおくと $F_+,\ F_-$ は単調非減少でかつ有界

$$0 \leqq F_+(t) \leqq \int_0^{\infty} |f(s)|ds\ ,\quad 0 \leqq F_-(t) \leqq \int_0^{\infty} |f(s)|ds$$

であるから極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} F_+(t)$,　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} F_-(t)$ は収束する。従って

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\{F_+(b) - F_-(b)\}$$ も収束する。

(2) も同様に示される。(3) は (1), (2) の結果からわかる。　　(証明終)

系　　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が任意有限区間で積分可能であり、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ ならば

極限 $\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt$ は収束する。

(証明)　　$\mathrm{R_e}(f(t)) = x(t)$ (実部), $\mathrm{I_m}(f(t)) = y(t)$ (虚部) とおくと $f(t) = x(t) + iy(t)$ であり

$|f(t)| = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$ だから $|x(t)| \leqq |f(t)|,\ |y(t)| \leqq |f(t)|$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty,\qquad \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|dt \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$

上記定理の (3) より $\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b x(t)dt$ と $\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b y(t)dt$ は収束するから

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\left\{\int_a^b x(t)dt + i\int_a^b y(t)dt\right\}$$ も収束する。　　(証明終)

< 広義積分の収束条件 2 >

補題 5.4 極限 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ が収束するための必要十分条件は

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t'\to\infty}} |f(t) - f(t')| = 0 \qquad \text{が成り立つことである。}$$

系 極限 $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)dt$ が収束するための必要十分条件は

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ b'\to\infty}} \left|\int_b^{b'} f(t)dt\right| = 0 \qquad \text{が成り立つことである。}$$

例 $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & : \quad t \neq 0 \\ 1 & : \quad t = 0 \end{cases}$ に対し, $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)dt$ が収束することを示す。

定数 $b,\ b'\quad (0 < b < b')$ に対し

$$\int_b^{b'} f(t)dt = \int_b^{b'} \frac{\sin t}{t}dt = \int_b^{b'} \frac{1}{t} \times (-\cos t)' dt$$

$$= \left[\frac{1}{t} \times (-\cos t)\right]_b^{b'} - \int_b^{b'} \left(-\frac{1}{t^2}\right) \times (-\cos t)dt$$

$$= -\frac{\cos b'}{b'} + \frac{\cos b}{b} + \int_b^{b'} \frac{\cos t}{t^2}dt$$

より

$$\left|\int_b^{b'} f(t)dt\right| \leqq \left|-\frac{\cos b'}{b'}\right| + \left|\frac{\cos b}{b}\right| + \int_b^{b'} \left|\frac{\cos t}{b^2}\right| dt$$

$$\leqq \frac{1}{b'} + \frac{1}{b} + \int_b^{b'} \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{b'} + \frac{1}{b} + \left[-\frac{1}{t}\right]_b^{b'}$$

$$= \frac{1}{b'} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b'} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$$

また $b' < b$ のとき同様にして $\displaystyle\left|\int_b^{b'} f(t)dt\right| = \left|\int_{b'}^{b} f(t)dt\right| \leqq \frac{2}{b'}$

よって $\displaystyle\left|\int_b^{b'} f(t)dt\right| \leqq \max\left\{\frac{2}{b},\ \frac{2}{b'}\right\}$ より

$\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ b'\to\infty}} \left|\int_b^{b'} f(t)dt\right| = 0$ 従って上記の系より $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)dt$ は収束する。

< 定理 2.1(2) の証明 >

定理 2.1(2)　定理 $\alpha,\ \beta\quad(\alpha>0)$ に対し $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin(\beta t)}{t}dt=\tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(証明)　$f(x,\ t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}\frac{\sin(xt)}{t} & :\quad t>0 \\ x & :\quad t=0 \end{cases}$

とおくと f は $\mathbb{R}\times[0,\ \infty)$ で連続であり, x に関する偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)=\left\{\begin{array}{ccc} e^{-\alpha t}\cos(xt) & : & t>0 \\ 1 & : & t=0 \end{array}\right\}=e^{-\alpha t}\cos(xt)$$

も $\mathbb{R}\times[0,\ \infty)$ で連続である。また各 $x\in\mathbb{R}$ に対し

$$|f(x,\ t)|\leqq e^{-\alpha t}|x|\ ,\quad \left|\frac{\partial t}{\partial x}(x,\ t)\right|\leqq e^{-\alpha t}\ \text{より}$$

$$\int_0^{\infty}|f(x,\ t)|dt\leqq|x|\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}dt=\frac{|x|}{\alpha}<\infty$$

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\right|dt\leqq\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}dt=\frac{1}{\alpha}<\infty$$

である。また任意の定数 $a,\ b\quad(a<b)$ に対し,

$$\lim_{R\to\infty}\max_{a\leqq x\leqq b}\int_R^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\right|dt\leqq\lim_{R\to\infty}\int_R^{\infty}e^{-\alpha t}dt=0$$

より定理 5.7(p.93) によって $F(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}f(x,\ t)dx$ は微分可能であり

p.30 定理 2.1(1) の結果より

$$\frac{d}{dx}F(x)=\int_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)dt=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\cos(xt)dt=\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$$

となるから

$$F(x)=\int\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}dx=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)+C\qquad(C\ \text{は定数})$$

である。ここで

$$F(0)=\int_0^{\infty}f(0,\ t)dt=0\quad\text{より}\quad C=0$$

よって

$$F(x)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\frac{\sin(xt)}{t}dt=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

より求める式が得られる。　　(証明終)

< 定理 2.1(3) の証明 >

定理 2.1(3) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$

(証明) 定数 $\alpha(\geqq 0)$ と自然数 n に対し

$$F_n(\alpha) = \int_0^n e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt$$

とおく。定数 $\alpha,\ \beta,\ t \quad (\alpha < \beta,\ t > 0)$ に対し, 平均値の定理より

$$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} = -te^{-ct}(\alpha - \beta) \qquad (\alpha < c < \beta)$$

をみたす c が存在するから

$$|F_n(\alpha) - F_n(\beta)| = \left|\int_0^n (\beta - \alpha)e^{-ct}\sin t dt\right| \leqq |\beta - \alpha|n$$

より $F_n(\alpha)$ は α に関して連続である。一方 $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin t}{t}dt$

は収束するから $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}}\int_m^n \frac{\sin t}{t}dt = 0$ である。よって任意の正数 ε に対し,

十分大きい自然数 N をとると, $m,\ n \geqq N \quad (m \leqq n)$ であれば

$$\left|\int_m^n \frac{\sin t}{t}dt\right| < \varepsilon$$

となる。この $m,\ n$ に対し $\displaystyle F_n(\alpha) - F_m(\alpha) = \int_m^n e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt$

を考える。$\alpha \geqq 0$ より $e^{-\alpha t}$ は単調非増加で正より積分の第 2 平均値の定理から

$$F_n(\alpha) - F_m(\alpha) = \int_m^n e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt = e^{-\alpha m}\int_m^\xi \frac{\sin t}{t}dt$$

をみたす $\xi\ (m \leqq \xi \leqq n)$ が存在する。従って

$$\max_{0\leqq\alpha\leqq1}|F_n(\alpha) - F_n(\alpha)| \leqq \left|\int_m^\xi \frac{\sin t}{t}dt\right| < \varepsilon$$

だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F_n(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt$

は $\alpha\ (0 \leqq \alpha \leqq 1)$ に関して一様に収束する。$F_n(\alpha)$ は α に関して連続だから極限の関数

$\displaystyle F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt$ も α に関して連続である。従って

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{\substack{\alpha\to0 \\ \alpha>0}}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{\substack{\alpha\to0 \\ \alpha>0}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(証明終)

< 定理 2.3(2) の証明 >

定理 2.3(2)　$\boxed{f \text{ が絶対可積分であれば } F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt \text{ は有界で一様連続}}$

(証明)　$|F(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-ixt}|dt \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$

より有界である。任意の実数 $x, y (x < y)$ に対し、平均値の定理から

$$\frac{\cos y - \cos x}{y - x} = -\sin\xi \quad , \quad \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos\eta$$

をみたす定数 $\xi, \eta \in [x, y]$ が存在する。従って

$$|\cos y - \cos x| = |(-\sin\xi)(y - x)| \leqq |y - x|$$

$$|\sin y - \sin x| = |(\cos\eta)(y - x)| \leqq |y - x|$$

より $|e^{-iyt} - e^{-ixt}| \leqq |\cos yt - \cos xt| + |\sin yt - \sin xt|$

$$\leqq 2|x - y| \cdot |t|$$

である。一方 f は絶対可積分だから $\lim_{R\to\infty} \int_{|t|>R} |f(t)|dt = 0$ より、

任意の正数 ε に対し、十分大きい正数 R をとれば

$$\int_{|t|>R} |f(t)|dt \leqq \frac{\varepsilon}{4}$$

となる。$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = K$ とおく。上記の ε と R, K に対し、$|x - y| \leqq \frac{\varepsilon}{4RK}$ であれば

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-iyt} - e^{-ixt})dt\right|$$

$$\leqq \left|\int_{|t|>R} f(t)(e^{-iyt} - e^{-ixt})dt\right| + \left|\int_{-R}^{R} f(t)(e^{-iyt} - e^{-ixt})dt\right|$$

$$\leqq 2\int_{|t|>R} |f(t)|dt + \left(\max_{-R\leqq t\leqq R} |e^{-iyt} - e^{-ixt}|\right) \cdot \int_{-R}^{R} |f(t)|dt$$

$$\leqq \frac{2\varepsilon}{4} + 2|x - y| \cdot R \cdot K \leqq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4RK} \cdot R \cdot K \leqq \varepsilon$$

より $F(x)$ は一様連続である。(証明終)

< 定理 2.3(3) の証明 >

定理 2.3(3)　f が絶対可積分で有界ならば

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = 0$$

(証明)　(2) の証明と同様にして $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt$ は有界で一様連続だから、

任意の正数 ε に対して十分小さい正数 δ をとると、

$$|x-y| < \delta \text{ ならば } |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdots ①$$

となる。この δ と ε に対し、R を十分大きくとると、

$$\frac{\pi}{R} < \delta \text{ かつ } \int_{|t|>R} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3} \cdots ②$$

とできる。f は有界で積分可能だから、有限区間で 2 乗可積分である。

従って補題 1.11(<u>P.24</u>) より $L = R$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\cos\Bigl(\frac{n\pi}{R}t\Bigr)dt = 0$$

である。よって N を十分大きくとると $n \geqq N$ であれば

$$\Bigl|\int_{-R}^{R} f(t)\cos\Bigl(\frac{n\pi}{R}t\Bigr)dt\Bigr| < \frac{\varepsilon}{3} \cdots ③$$

そこで $x \geqq \dfrac{N\pi}{R}$ とすると、ある自然数 $m(\geqq N)$ が存在し

$\dfrac{m\pi}{R} \leqq x < \dfrac{(m+1)\pi}{R}$ となる。従って $\Bigl|x - \dfrac{m\pi}{R}\Bigr| \leqq \dfrac{\pi}{R} < \delta$ より

①,②,③から

$$|g(x)| \leqq \Bigl|g(x) - g\Bigl(\frac{m\pi}{R}\Bigr)\Bigr| + \Bigl|g\Bigl(\frac{m\pi}{R}\Bigr)\Bigr|$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{3} + \Bigl|\int_{|t|>R} f(t)\cos\Bigl(\frac{m\pi t}{R}\Bigr)dt + \int_{-R}^{R} f(t)\cos\Bigl(\frac{m\pi t}{R}\Bigr)dt\Bigr|$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{3} + \int_{|t|>R} |f(t)|dt + \Bigl|\int_{-R}^{R} f(t)\cos\Bigl(\frac{m\pi t}{R}\Bigr)dt\Bigr| < \varepsilon$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = 0$ が示された。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = 0$ も同様である。(証明終)

< P.38 例の証明 >

◎

任意の非負整数 m に対し $\displaystyle\lim_{\lvert t\rvert\to\infty} \lvert t\rvert^m e^{-t^2} = 0 \cdots$①
であることから　$\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} \lvert t^m\rvert e^{-t^2} < \infty \cdots$②
が成立する。

(証明)　背理法で示す。

もし　$\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} \lvert t^m\rvert e^{-t^2} = +\infty$

と仮定すると、ある点列 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots (t_n \in \mathbb{R})$ が存在し

$$\lim_{n\to\infty} \lvert t_n\rvert^m e^{-(t_n)^2} = +\infty \cdots ③$$

が成り立つ。

(1)　集合 $\{\lvert t_n\rvert : n \geqq 1\}$ が有界でなければ、ある部分列 $\{t_{n_k}\}$ が存在し

$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \lvert t_{n_k}\rvert = +\infty$　かつ　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \lvert t_{n_k}\rvert^m e^{-(t_{n_k})^2} = +\infty$ であり、

これは①に矛盾する。

(2)　集合 $\{\lvert t_n\rvert : n \geqq 1\}$ が有界であれば、ある正数 M が存在して、

$\lvert t_n\rvert \leqq M \quad (n \geqq 1)$ である。このときある部分列 $\{t_{n_k}\}$ が存在し、

$\displaystyle\lim_{k\to\infty} t_{n_k}$ は収束する。その極限を

$\displaystyle\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_\infty$ とおくと $\lvert t_{n_k}\rvert \leqq M$ より $\lvert t_\infty\rvert \leqq M$ である。

このとき

$$\lim_{k\to\infty} \lvert t_{n_k}\rvert^m e^{-(t_{n_k})^2} \leqq M^m < \infty$$

となり、これは③に矛盾する。

(1),(2) のいずれの場合も矛盾するので②が成立する。(証明終)

< P.38 補題 2.1, 2.2 の証明 >

[補題 2.1 の証明]　$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ のとき $f^{(r)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ は明らかである。

自然数 r に対して $t^r f(t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ を示す。任意の非負整数 m, n に対し

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^m \cdot \left|\frac{d^n}{dt^n}(t^r f(t))\right| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^m \left|\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{d^k}{dt^k} t^r\right) \cdot f^{(n-k)}(t)\right|$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot A_r(k) \sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^{m+r-k} \cdot |f^{(n-k)}(t)| < \infty$$

ここで　$A_r(k) = \begin{cases} r(r-1)\cdots(r-k+1) & : k \leqq r \text{ のとき} \\ 0 & : k > r \text{ のとき} \end{cases}$

より $t^r f(t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ である。(証明終)

[補題 2.2 の証明]　$m = n = 0$ のとき $\sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^m |f^{(n)}(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < \infty$

より f は有界であり $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = M$ とする。また $m = 2, n = 0$ のとき

$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^m |f^{(n)}(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^2 |f(t)| < \infty$ より $\sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^2 |f(t)| = K$

とおく。$t \neq 0$ のとき $|f(t)| \leqq \dfrac{K}{t^2}$ である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b |f(t)| dt$$

$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \left\{\int_a^{-1} |f(t)| dt + \int_{-1}^{1} |f(t)| dt + \int_1^b |f(t)| dt\right\}$$

$$\leqq \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \left\{\int_a^{-1} \frac{K}{t^2} dt + \int_{-1}^{1} M dt + \int_1^b \frac{K}{t^2} dt\right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \left\{\left[-\frac{K}{t}\right]_a^{-1} + [Mt]_{-1}^{1} + \left[-\frac{K}{t}\right]_1^b\right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \left\{K + \frac{K}{a} + 2M - \frac{K}{b} + K\right\} = 2K + 2M < \infty \qquad \text{(証明終)}$$

< P.38 補題 2.3 の証明 >

[補題 2.3 の証明]　$m = 1$ のとき $F_1(x,t) = f(t)\cos(xt)$,　$F_2(x,t) = -f(t)\sin(xt)$

とおくと $f(t)e^{-ixt} = F_1(x,y) + iF_2(x,y)$ である。$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より，

$F_1(x,t)$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で連続、$\dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,t) = -tf(t)\sin(xt), F_2(x,t)$ および

$\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,t) = -tf(t)\cos(xt)$ も共に $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で連続であり、$\mathbb{R}$ の任意の閉区間 $I = [a,b]$ に属する x に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big| F_i(x,t) \Big| dt \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \qquad (i = 1, 2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{\partial}{\partial x} F_i(x,t) \Big| dt \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)| dt < \infty \qquad (i = 1, 2)$$

$$\lim_{R\to\infty} \max_{a \leqq x \leqq b} \int_{|t|>R} \Big| \frac{\partial}{\partial x} F_i(x,t) \Big| dt \leqq \lim_{R\to\infty} \int_{|t|>R} |tf(t)| dt = 0 \quad (i = 1, 2)$$

となるから積分記号下の微分可能性の定理 5.7 より

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt$ と $-\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt$ は共に x に関して微分可能で

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \{tf(t)\sin(xt)\} dt \ ,$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{-f(t)\sin(xt)\} dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \{tf(t)\cos(xt)\} dt$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \{-itf(t)e^{-ixt}\} dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-ixt} dt \end{aligned}$$

である。$m \geqq 2$ については、これをくり返せば

$$\frac{d^m}{dx^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = (-i)^m \int_{-\infty}^{\infty} t^m f(t)e^{-ixt} \ dt$$

が得られる。(証明終)

< 広義積分の近似 >

補題 5.5　定数 c,r $(c > 0, r > 1)$ が存在し、$(*)$ 式を満たす積分可能な関数 f がある。

$$(*)\ |f(x)| < \frac{c}{(1+|x|)^r}$$

この関数 f に対して、次式が成り立つ。

$$(1)\ \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^{\infty} f(x)dx \qquad (2)\ \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

(証明)　(1) を示す。f は絶対可積分だから、任意の正数 ε に対し、ある正数 M と $\delta(0 < \delta < M)$ が存在し

$$\int_M^{\infty} |f(x)|dx < \varepsilon$$

かつ

$$\frac{c}{(r-1)(1+M-\delta)^{r-1}} < \varepsilon$$

となる。ここで c と r は条件式 $(*)$ の定数である。そこで $|\Delta x| < \delta$ のとき、

$$\sum_{k > \frac{M}{\Delta x}} |f(k\Delta x)|\Delta x \leqq \sum_{k\Delta x > M} \frac{c}{(1+k\Delta x)^r} \cdot \Delta x$$

$$\leqq \int_{M-\Delta x}^{\infty} \frac{c}{(1+x)^r} dx = \frac{c}{(r-1)(1+M-\Delta x)^{r-1}} < \varepsilon$$

が成り立つ。f は区間 $[0, M]$ でリーマン積分可能だから

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{0 \leqq k \leqq \frac{M}{\Delta x}} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^M f(x)dx$$

が成り立つ。よって

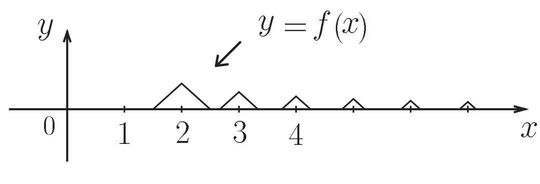
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x - \int_0^{\infty} f(x)dx \right|$$

$$\leqq \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \left| \sum_{0 \leqq k \leqq \frac{M}{\Delta x}} f(k\Delta x)\Delta x - \int_0^M f(x)dx \right| + \sum_{k > \frac{M}{\Delta x}} \left| f(k\Delta x) \right| \Delta x + \int_M^{\infty} |f(x)|dx \right\} \leqq 2\varepsilon$$

より (1) が成り立つ。(2) も同様である。

(注)

$$f(x) = \begin{cases} x - n + \frac{1}{n} & : n - \frac{1}{n} \leqq x \leqq n \quad (n \geqq 2) \\ -x + n + \frac{1}{n} & : n \leqq x \leqq n + \frac{1}{n} \quad (n \geqq 2) \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$



は絶対可積分で一様連続であるが (1) 式は成り立たない。

< フーリエ変換の導出 >

補題 5.6　関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は何回でも微分可能であり、ある正定数 M が存在して $|t|>M$ であれば $f(t)=0$ とする。このとき次式が成り立つ。

(i)　$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$

(ii)　$\displaystyle\lim_{L\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ik\omega t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}dx$

ただし $\displaystyle c_k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)e^{-ik\omega t}dt$　,　$\displaystyle F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt$　,　$\displaystyle \omega=\frac{\pi}{L}$

である。

(証明)　(i)　任意の非負整数 m,n に対し、$g(t)=|t|^m|f^{(n)}(t)|$ は連続で、

$|t|>M$ であれば $g(t)=0$ となる。$K=\displaystyle\max_{|t|\leqq M}g(t)$ とおくと

$\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}}g(t)=K<\infty$ より $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ がわかる。

(ii)　$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ だから、そのフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]=F(x)$ も $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ の元である。(P.39)

$\displaystyle F_L(x)=\int_{-L}^{L}f(t)e^{-ik\omega t}dt$ とすると、条件より $L>M$ ならば $F_L(x)=F(x)$ である。

そこで $L>M$ のとき、$F_L=F\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ より $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^m\cdot|F(x)|<\infty$　　$(m=0,1,2,\cdots)$

だから $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^2|F(x)|=M_F<\infty$　　より

$$\left|\frac{1}{2\pi}F(x)e^{ixt}\right|\leqq\frac{M_F}{(1+|x|)^2}$$

$$c_k=\frac{1}{L}F_L(k\omega)=\frac{\omega}{\pi}F(k\omega)$$

である。ここで $\Delta x=\omega\left(=\dfrac{\pi}{L}\right)$ とおくと $L\to\infty$ のとき $\Delta x\to 0$ であり

$\dfrac{1}{2\pi}F(x)e^{ixt}$ に関する広義積分の近似 (補題 5.5) より

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ik\omega t}=\lim_{L\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{2\pi}F(k\omega)e^{ik\omega t}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\Delta x)e^{ik\omega t}\Delta x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}dx$$

が成り立つ。(証明終)

< 積分順序の交換 1 >

補題 5.7 関数 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}$(複素数の全体) が連続ならば

$$\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx=\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy$$

(証明) f は $[a,b]\times[c,d]$ で一様連続であるから、任意の正数 ε に対し、ある正数 δ が存在して、

$$|x_1-x_2|<\delta \text{ かつ } |y_1-y_2|<\delta \text{ ならば } |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)(d-c)}$$

とできる。この δ に対し $[a,b],[c,d]$ を等分した分点を

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\,\Big(x_j-x_{j-1}=\frac{b-a}{n}\Big)$$

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d\,\Big(y_k-y_{k-1}=\frac{d-c}{m}\Big)$$

とおき、$\dfrac{b-a}{n}<\delta$, $\dfrac{d-c}{m}<\delta$ となるようにする。

$(x,y)\in[x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]$ のとき $f_{nm}(x,y)=f(x_{j-1},y_{k-1})$

$(j=1,2,\cdots,n,\quad k=1,2,\cdots,m)$ と定めると

$\displaystyle\sup_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}}|f(x,y)-f_{nm}(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)(d-c)}$ となる。

$$\int_a^b\Big(\int_c^d f_{nm}(x,y)dy\Big)dx=\sum_{j=1}^n\Big(\sum_{k=1}^m f(x_{j-1},y_{k-1})\cdot\frac{d-c}{m}\Big)\frac{b-a}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^m\Big(\sum_{j=1}^n f(x_{j-1},y_{k-1})\cdot\frac{b-a}{n}\Big)\frac{d-c}{m}=\int_c^d\Big(\int_a^b f_{nm}(x,y)dx\Big)dy \text{ より}$$

$$\Big|\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx-\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)dy\Big)dx\Big|$$

$$\leqq\int_a^b\Big(\int_c^d|f(x,y)-f_{nm}(x,y)|dy\Big)dx+\int_c^d\Big(\int_a^b|f_{nm}(x,y)-f(x,y)|dx\Big)dy<\varepsilon$$

が成り立つ。ε は任意であるから求める等式が得られる。 (証明終)

< 積分順序の交換 2 >

補題 5.8　$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ が連続ならば、任意の正数 R に対し、

$$\int_{-R}^{R} f(x,y)dy \text{ は } x \text{ について連続である。}$$

(証明)　$x_0\in\mathbb{R}$ とする。f は $[x_0-1,x_0+1]\times[-R,R]$ で一様連続だから

$$\Big|\int_{-R}^{R} f(x,y)dy-\int_{-R}^{R} f(x_0,y)dy\Big|\leqq\int_{-R}^{R}|f(x,y)-f(x_0,y)|dy$$

$$\leqq 2R\sup_{-R\leqq y\leqq R}|f(x,y)-f(x_0,y)|\to 0\ \ (x\to x_0)$$　(証明終)

補題 5.9　$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を非負実数値の連続関数で、

(A)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ は y についての連続関数

と仮定すると

(i)　もし $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy$ が収束すれば、

$\displaystyle\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy$ は $R\to\infty$ で極限値をもつ。

(ii)　もし $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy=K$ ならば、

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy$ は K に収束する。

(証明)　(i) $\displaystyle\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy\leqq\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy\leqq\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy$ より

$\displaystyle\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy$ は R について上に有界な単調増加関数だから

$R\to\infty$ で極限値をもつ。

< 積分順序の交換 3 >

(補題 5.9 (ii) の証明)

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \geqq 0$ なので $\displaystyle\int_{-T}^{T}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy$ は T について単調増加関数である。

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy$ が極限値 $L \leqq K$ に収束することを背理法で示す。

$\displaystyle\int_{-T}^{T}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy \geqq K+\eta$ をみたすような $\eta > 0$ と $T > 0$ が存在すると仮定する。

$v \in [-T,T]$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dx - \int_{-R(v)}^{R(v)} f(x,v)dx < \frac{\eta}{4T+2} \cdots ①$$

を満たすような $R(v)(>0)$ がとれる。仮定 (A) から $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ は y について連続であり、また補題 5.8 より $\displaystyle\int_{-R(v)}^{R(v)} f(x,y)dx$ も y について連続だから $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx - \int_{-R(v)}^{R(v)} f(x,y)dx$ は y についての連続関数である。

よって①より十分小さな正数 $\delta(v)$ をとれば、$|v-y| < \delta(v)$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx - \int_{-R(v)}^{R(v)} f(x,y)dx < \frac{\eta}{2T+2} \cdots ②$$

となる。今 v の $\delta(v)$ 近傍を $I_v = (v-\delta(v), v+\delta(v))$ とすると

$[-T,T] \subset \displaystyle\bigcup_{v\in[-T,T]} I_v$ となる。ハイネ - ボレル - ルベーグ (Heine - Borel - Lebesgue) の被覆定理より有限個の $v_1, v_2, \cdots, v_m \in [-T,T]$ が存在して $[-T,T] \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} I_{v_j}$ となる。各 v_i に対し、

①で定まる $R(v_j)$ をとり、$R = \max\{T, R(v_1), R(v_2), \cdots R(v_m)\}$ とおく。

このとき②より、$y \in [-T,T]$ に対し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx - \int_{-R}^{R} f(x,y)dx \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx - \int_{-R(v_j)}^{R(v_j)} f(x,y)dx \leqq \frac{\eta}{2T+2}$$

が成り立つ。

< 積分順序の交換 4 >

(補題 5.9　(ii) の証明の続き)

$$K \geqq \int_{-R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy \geqq \int_{-T}^{T}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy$$

$$\geqq \int_{-T}^{T}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx - \frac{\eta}{2T+2}\Big)dy$$

$$= \int_{-T}^{T}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy - \frac{2T\eta}{2T+2} > K+\eta-\eta = K$$

となり矛盾が生じる。ゆえに $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy = L \leqq K$

一方　　$\displaystyle L = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy \geqq \int_{-R}^{R}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy \geqq \int_{-R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy$

より　　$\displaystyle K = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy \leqq L$ より $L = K$。　　(証明終)

補題 5.10

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を非負連続関数で、

(A1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ は x についての連続関数,

(A2)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ は y についての連続関数

と仮定する。さらに

(B)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy$ が収束すれば、

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\Big)dx$ も収束し、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\Big)dx$$

(証明)　補題 5.7 と補題 5.9 より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\Big)dy = \lim_{R\to\infty}\int_{R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\Big)dy$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{R}^{R}\Big(\int_{-R}^{R} f(x,y)dy\Big)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\Big)dx$$　　(証明終)

< 積分の順序交換 5 >

定理 5.10

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ は連続で

(A1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|dy$ は x についての連続関数、

(A2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|dx$ は y についての連続関数でかつ

(B) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|dx\right) dy$ が収束する

と仮定すると、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right) dy$ と $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right) dx$

は収束し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right) dx$$

(証明)　$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (u(x,y),\ v(x,y) \in \mathbb{R})$ とし、

$f_1(x,y) = \max\{u(x,y), 0\}$, $f_2(x,y) = \max\{-u(x,y), 0\}$

$f_3(x,y) = \max\{v(x,y), 0\}$, $f_4(x,y) = \max\{-v(x,y), 0\}$

とおくと $f_j(x,y) \geqq 0$ $(j = 1,2,3,4)$, $f_1(x,y) - f_2(x,y) = u(x,y)$

$f_3(x,y) - f_4(x,y) = v(x,y)$, $|f_j(x,y)| \leqq |f(x,y)| \quad (j = 1,2,3,4)$

$|f_j(x_1,y_1) - f_j(x_2,y_2)| \leqq |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \quad (j = 1,2,3,4)$

だから $f_j(x,y)$ は連続で

$$0 \leqq \int_{-R}^{R} f_j(x,y)dx \leqq \int_{-R}^{R} |f(x,y)|dx \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|dx$$

より $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dx$ は収束している。

次に f_j が補題 5.10 の仮定 (A1),(A2) をみたしていることを示す。

$x_0 \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x_0,y)|dy - \int_{-R}^{R} |f(x_0,y)|dy < \frac{\varepsilon}{6}$$

をみたす正数 R が存在する。

< 積分の順序交換 6 >

[定理 5.10 の証明の続き]

仮定より $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dy$ は x について連続であり、補題 5.8 より $\displaystyle\int_{-R}^{R}|f(x,y)|dy$ も x について連続だから $|x-x_0|<\delta_1$ のとき

$$0 \leqq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dy - \int_{-R}^{R}|f(x,y)|dy < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つように正数 δ_1 をとれる。$0 \leqq f_j(x,y) \leqq |f(x,y)|$ より

$|x-x_0|<\delta_1$ のとき

$$\begin{aligned}0 &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dy - \int_{-R}^{R} f_j(x,y)dy = \int_{|y|>R} f_j(x,y)dy \\ &\leqq \int_{|y|>R}|f(x,y)|dy < \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで f_j は連続だから $\displaystyle\int_{-R}^{R} f_j(x,y)dy$ は x について連続である。よって $|x-x_0|<\delta_2$ のとき

$$\left|\int_{-R}^{R} f_j(x,y)dy - \int_{-R}^{R} f_j(x_0,y)dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つように正数 δ_2 がとれる。$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると

$|x-x_0|<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x_0,y)dy\right| \\ &\leqq \left|\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dy - \int_{-R}^{R} f_j(x,y)dy\right| + \left|\int_{-R}^{R} f_j(x,y)dy - \int_{-R}^{R} f_j(x_0,y)dy\right| \\ &+ \left|\int_{-R}^{R} f_j(x_0,y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x_0,y)dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

従って $(A1)_j : \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dy$ は x について連続である。

同様に $(A2)_j : \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dx$ は y について連続である。

また $0 \leqq \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dx \leqq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dx$ と仮定 (B) から

$$(B)_j : \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dx\right)dy \text{ も収束する。}$$

< 積分の順序交換 6 >

[定理 5.10 の証明の続き]

よって f_j は補題 5.10 の仮定をすべてみたすので、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dy\right)dx$

も収束し、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x,y)dy\right)dx \quad (j=1,2,3,4)$

が成立する。$f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y) + if_3(x,y) - if_4(x,y)$ だから、

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right)dy$ と $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right)dx$ は共に収束し、

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right)dx$ が成立する。　(証明終)

例　$F(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) \quad (x, y \geqq 1)$ とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{(\frac{x}{y})^2+1} = \frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{(\frac{x}{y})^2+1} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{-1\cdot(x^2+y^2) - (-x)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ここで $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ は $x, y \geqq 1$ で連続だから、

定数 $a, b(a>1, b>1)$ に対し

$$\int_1^b\left\{\int_1^a \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right\}dy = \int_1^a\left\{\int_1^b \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right\}dx$$

$$= \tan^{-1}(\frac{a}{b}) - \tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(\frac{1}{b}) + \frac{\pi}{4}$$

ここで $\tan^{-1}(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$, $\tan^{-1}(0) = 0$ より

$$\int_1^{\infty}\left\{\int_1^{\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right\}dy = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_1^{\infty}\left\{\int_1^{\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right\}dx = -\frac{\pi}{4}$$

よって $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\int_1^{\infty} f(x,y)dx\right)dy \neq \int_1^{\infty}\left(\int_1^{\infty} f(x,y)dy\right)dx$ である。

< 積分の順序交換 8 >

定理 5.11　関数 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}$ が $t\in[a,b]$ に関して区分的に連続、$x\in[c,d]$ に関して連続ならば

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(t,x)dt\right)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(t,x)dx\right)dt$$

(証明)　$f(t,x)$ の t についての不連続点を $t_0,t_1,\cdots,t_m$

$(a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b)$ とする。$1\leqq k\leqq m$ に対し

$$f_k(t,x)=\begin{cases} f(t_k-0,x) & : \quad t=t_k \\ f(t,x) & : \quad t_{k-1}<t<t_k \\ f(t_{k-1}+0,x) & : \quad t=t_{k-1} \end{cases}$$

とおくと、f_k は $[t_{k-1},t_k]\times[c,d]$ で定義された連続関数

である。補題 5.7 より

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(t,x)dt\right)dx=\int_c^d\left(\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t,x)dt\right)dx$$

$$=\sum_{k=1}^m\int_c^d\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k(t,x)dt\right\}dx=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\int_c^d f_k(t,x)dx\right\}dt=I \text{ とおく}$$

ここで $F_k(t)=\displaystyle\int_c^d f_k(t,x)dx$, $F(t)=\displaystyle\int_c^d f(t,x)dx$ とおくと

$F_k(t)$ は $[t_{k-1},t_k]$ で連続であり、$t_{k-1}<t<t_k$ では $F_k(t)=F(t)$

だから $\displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k} F_k(t)dt=\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(t)dt$ である。よって

$$I=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k} F_k(t)dt=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(t)dt=\int_a^b F(t)dt=\int_a^b\left\{\int_c^d f(t,x)dx\right\}dt$$

(証明終)

< 畳み込み 1 >

[定義 2.6]　$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$ の任意の有界閉区間で積分可能であり,

各 t に対し $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)|dx$ が収束するとき, 関数

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$$

を f と g との **畳み込み** または **合成積** という。

補題 5.11　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が有界連続, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 内の任意有界閉区間で

積分可能であり, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$ は収束する。

このとき $f * g$ は有界連続である。

(証明)　$\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = M\ (< \infty)$ とする。

$$|(f * g)(t)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)g(x)|dx \leqq M \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$$

より $f * g$ は有界である。$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$ は収束するので, 任意の

正数 ε に対し,

$$\int_{|x|>R} |g(x)|dx \ \leqq\ \frac{\varepsilon}{4M+1} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

をみたす正数 R が存在する。今　$t_0 \in \mathbb{R}$ に対し, f は

有界閉区間 $[t_0 - 1 - R,\ t_0 + 1 + R]$ で連続だから, その中で

一様連続である。よってある $\delta\ (0 < \delta < 1)$ が存在して,

$u, v \in [t_0 - 1 - R,\ t_0 + 1 + R],\ |u - v| < \delta$ のとき

$$|f(u) - f(v)| \ \leqq\ \frac{\varepsilon}{2\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx + 1}$$

とくに $|t - t_0| < \delta,\ x \in [-R, R]$ のとき,

$$|f(t-x) - f(t_0 - x)| \ \leqq\ \frac{\varepsilon}{2\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx + 1} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

＜ 畳み込み 2 ＞

[補題 5.11 の証明の続き]　①,②より　$|t-t_0| < \delta$ のとき

$$|(f*g)(t)-(f*g)(t_0)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-x)g(x)dx\right|$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)-f(t_0-x)|\cdot|g(x)|dx$$

$$= \int_{|x|\leqq R} |f(t-x)-f(t_0-x)|\cdot|g(x)|dx + \int_{|x|>R} |f(t-x)-f(t_0-x)|\cdot|g(x)|dx$$

$$\leqq \sup_{|x|\leqq R}|f(t-x)-f(t_0-x)|\int_{|x|\leqq R}|g(x)|dx + \int_{|x|>R}(|f(t-x)|+|f(t_0-x)|)|g(x)|dx$$

$$\leqq \sup_{|x|\leqq R}|f(t-x)-f(t_0-x)|\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx + 2M\int_{|x|>R}|g(x)|dx$$

$\leqq \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ より $f*g$ は $t=t_0$ で連続である。(証明終)

定理 5.12

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は有界で連続かつ絶対可積分とする。このとき, 次が成り立つ。

(i)　$f*g$ は有界で連続かつ絶対可積分である。

(ii)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$

(iii)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(t)|dt \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt$

(iv)　$\mathscr{F}[f*g](x) = \mathscr{F}[f](x)\cdot\mathscr{F}[g](x)$

　　ここで $\displaystyle\mathscr{F}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dx$ は f のフーリエ変換である。

< 畳み込み 3 >

[定理 5.12 の証明]

(i)(ii)　補題 5.11 より $f*g$ は有界連続である。また $|f|,|g|$ に補題を適用することにより

$$(|f|*|g|)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-x)g(x)|dx$$

は t について連続である。一方

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-x)g(x)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-x)|dt\cdot|g(x)|=\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|ds\cdot|g(x)|$$

は x の連続関数で

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-x)g(x)|dt\Big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|ds\Big)|g(x)|dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|ds\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx$$

は収束する。よって積分順序交換の定理 5.10(P.112) より

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)dx\Big)dt$$

は収束し、

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)dx\Big)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)dt\Big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)ds\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx$$ となる。

(iii)　任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$|(f*g)(t)|=\Big|\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)dx\Big|\leqq\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-x)g(x)|dx=(|f|*|g|)(t)$$

であり、$|f|$ と $|g|$ に対し (ii) の結果から $\int_{-\infty}^{\infty}(|f|*|g|)(t)dt$ は収束し

$$\int_{-\infty}^{\infty}(|f|*|g|)(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|ds\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(t)|dt\leqq\int_{-\infty}^{\infty}(|f|*|g|)(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|ds\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx$$

< 畳み込み 4 >

[定理 5.12 の証明の続き]

(iv)　$\mathscr{F}[f*g](x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)e^{-ixt}dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)dy\Big)e^{-ixt}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)e^{-ixt}dy\Big)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)e^{-ix(t-y)}\cdot g(y)e^{-ixy}dy\Big)dt = I$$ とおく。

ここで x を固定し、$F(t) = f(t)e^{-ixt}$　,　$G(t) = g(t)e^{-ixt}$ とおくと

$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} F(t-y)G(y)dy\Big)dt = \int_{-\infty}^{\infty}(F*G)(t)dt$ である。

F, G は有界で連続かつ絶対可積分だから

(ii) の結果より

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}(F*G)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty}G(t)dt$$

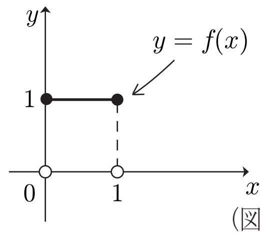
となるから

$$\mathscr{F}[f*g](x) = I = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-ixt}dt$$

$$= \mathscr{F}[f](x)\cdot\mathscr{F}[g](x)$$　　(証明終)

< 畳み込み 5 >

<u>例</u>　$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & : 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & :\text{それ以外} \end{array} \right\}$ のとき、f と f との畳み込みは



(図1)

$$f_2(x) = (f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy = \int_0^1 f(x-y)dy$$

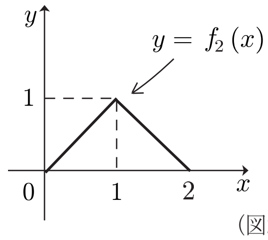
① $x < 0$ のとき　$f_2(x) = 0$

② $0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$f_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(x-y)dy + \int_x^1 f(x-y)dx = \int_0^x 1dx = x$

③ $1 \leqq x \leqq 2$ のとき　$f_2(x) = \displaystyle\int_0^{x-1} f(x-y)dy + \int_{x-1}^1 f(x-y)dy = \int_{x-1}^1 1dx = 2 - x$

④ $2 < x$ のとき　$f_2(x) = 0$

となり、従って $f_2(x)$ のグラフは図 2 のようになる。



(図2)

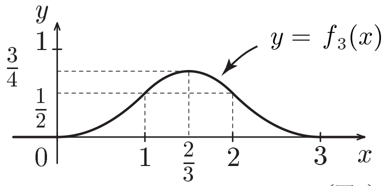
さらに f_2 と f との畳み込み

$$f_3(x) = (f_2 * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-y)f(y)dy = \int_0^1 f_2(x-y)dy$$

を計算すると

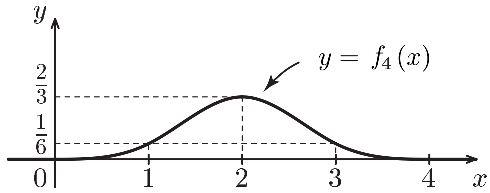
$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 & : 0 \leqq x \leqq 1 \\ -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} & : 1 \leqq x \leqq 2 \\ \dfrac{1}{2}(x-3)^2 & : 2 \leqq x \leqq 3 \\ 0 & : 3 < x \end{cases}$$

となり、グラフは図 3 のようになる。



(図3)

また $f_4(x) = (f_3 * f)(x)$ のグラフは図 4 のようになる。



(図4)

一般に $f(x) \geqq 0,\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ をみたす関数 f を確率密度関数という。

確率密度関数 f の自分自身との畳み込み $f_n = f_{n-1} * f \quad (n \geqq 2)$ は n が大きくなると正規分布曲線に近づく。
(確率論の中心極限定理による。)

この例は f が不連続関数でも $f_2 = f * f$ は連続関数になり、$f_3 = f_2 * f$ は微分可能な関数になる。このように、畳み込みによって、元の関数よりなめらかな曲線になる。

＜ デルタ近似関数列 1 ＞

定理 5.13　自然数 n に対し，　$h_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & : \ |t| \leqq \frac{1}{n} \text{のとき} \\ 0 & : \ \text{その他} \end{cases}$　は次を満たす。

(1) $h_n(-t) = h_n(t)$,　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)dt = 1$

(3) 任意有界区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} (f * h_n)(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h_n(t-u)du = \frac{1}{2}\left\{f(t-0) - f(t+0)\right\}$$

が全ての実数 t に対して成立する。

(証明)　(1),(2) は明らか。(3) を示す。$f(t)$ は積分可能だから $\displaystyle\int f(t)dt = F(t) + C$ とおく。

$|t-u| \leqq \dfrac{1}{n} \Longleftrightarrow t - \dfrac{1}{n} \leqq \ u \ \leqq t + \dfrac{1}{n}$ だから

$$(f * h_n)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h_n(t-u)du = \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} f(u)\frac{n}{2}du$$

$$= \left[\ \frac{n}{2}F(u)\ \right]_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \ = \ \frac{n}{2}\left\{F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F\left(t-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

ここで $\dfrac{1}{n} = x$ とおくと　$n \to \infty$ のとき　$x \to +0$ (0 への右極限) だから, x に関する

ロピタルの定理を使うと

$$\lim_{n\to\infty} (f * h_n)(t) \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\left\{F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F\left(t-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \ \lim_{x\to+0} \frac{1}{2x}\left\{F(t+x) - F(t-x)\right\}$$

$$= \lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left\{F(t+x) - F(t-x)\right\}}{\frac{\partial}{\partial x}(2x)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \frac{f(t+x) + f(t-x)}{2} \ = \ \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

(証明終)

< デルタ近似関数列 2 >

定理 5.14　自然数 n に対して $g_n(t) = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n}{4}t^2}$ とおく。次の性質がある。

(1) $g_n(-t) = g_n(t)$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = 1$

(3) 有界かつ任意有限区間で区分的に連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}(f * g_n)(t) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g_n(s)ds = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

が全ての実数 t に対して成立する。

(証明)　(1) は明らか。$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$(定理 2.2) より

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = 2\int_0^{\infty} g_n(t)dt = 2\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{n}{4}t^2}dt \qquad \left(\frac{\sqrt{n}}{2}t = u \text{ とおく}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\frac{2}{\sqrt{n}}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

(3) $$(f*g_n)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g_n(s)ds = \int_{-\infty}^{0} f(t-s)g_n(s)ds + \int_0^{\infty} f(t-s)g_n(s)ds$$

ここで $g_n(s)$ は偶関数だから

$$\int_{-\infty}^{0} f(t-s)g_n(s)ds = \int_{\infty}^{0} f(t+u)g_n(-u)(-1)du = \int_0^{\infty} f(t+u)g_n(u)du \qquad \text{より}$$

$$(f*g_n)(t) = \int_0^{\infty} f(t+s)g_n(s)ds + \int_0^{\infty} f(t-s)g_n(s)ds = \int_0^{\infty}\{f(t+s)+f(t-s)\}g_n(s)ds$$

一方 (1),(2) より $\displaystyle\int_0^{\infty} g_n(s)ds = \frac{1}{2}$　だから

$$(f*g_n)(t) - \frac{1}{2}\{f(t+0)+f(t-0)\} = (f*g_n)(t) - \{f(t+0)+f(t-0)\}\int_0^{\infty} g_n(s)ds$$

$$= \int_0^{\infty}\{f(t+s)+f(t-s)-f(t+0)-f(t-0)\}g_n(s)ds = \boldsymbol{I_n} + \boldsymbol{II_n}$$

$$\boldsymbol{I_n} = \int_0^{\infty}\{f(t+s)-f(t+0)\}g_n(s)ds\ ,\quad \boldsymbol{II_n} = \int_0^{\infty}\{f(t-s)-f(t-0)\}g_n(s)ds$$

とおく。

$$\boldsymbol{I_n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}\{f(t+s)-f(t+0)\}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{n}{4}s^2}ds + \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty}\{f(t+s)-f(t+0)\}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{n}{4}s^2}ds$$

$$\left(u = \frac{\sqrt{n}}{2}s\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}}\left\{f\left(t+\frac{2}{\sqrt{n}}u\right)-f(t+0)\right\}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du + \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}}^{\infty}\left\{f\left(t+\frac{2}{\sqrt{n}}u\right)-f(t+0)\right\}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du$$

$$= J_1 + J_2$$

< デルタ近似関数列 3 >

< 定理 5.14(3) の証明の続き >

$$J_1 = \int_0^{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}} \left\{ f\left(t+\frac{2}{\sqrt{n}}u\right) - f(t+0) \right\} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}du \ , \ J_2 = \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}}^{\infty} \left\{ f\left(t+\frac{2}{\sqrt{n}}u\right) - f(t+0) \right\} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}du$$

とおく。ここで $\displaystyle\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} f(t+s) = f(t+0)$ より任意の正数 ε に対して, ある正数 δ が存在して,

$0 < s < \delta$ であれば $|f(t+s) - f(t+0)| < \varepsilon$ が成立する。この δ に対し, $\left(\dfrac{1}{\delta}\right)^4 < n_1$ となる

自然数 n_1 をとる。$n \geqq n_1$ であれば $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt[4]{n_1}} < \delta$ だから $0 < u < \dfrac{\sqrt[4]{n}}{2}$ であれば

$0 < \dfrac{2}{\sqrt{n}}u \leqq \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} < \delta$ より

$$|J_1| = \left| \int_0^{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}} \left\{ f\left(t+\frac{2}{\sqrt{n}}u\right) - f(t+0) \right\} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du \right|$$

$$\leqq \int_0^{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}} \left| f\left(t+\frac{2}{\sqrt{n}}u\right) - f(t+0) \right| \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du < \varepsilon \int_0^{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du$$

$$< \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots ①$$

一方 $f(t)$ は有界だから $M = \displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}}^{\infty} e^{-u^2}du = 0$

より上記 ε に対し, ある自然数 n_2 をとると,

$n \geqq n_2$ であれば $\displaystyle\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}}^{\infty} e^{-u^2}du < \frac{\varepsilon}{2}$

となる。よって,

$$J_2 = \left| \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}}^{\infty} \left\{ f\left(t+\frac{2}{\sqrt{n}}u\right) - f(t+0) \right\} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}du \right| \leqq 2M \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du$$

$$= \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{2}}^{\infty} e^{-u^2}du < \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots ②$$

よって $n \geqq \max\{n_1 \ , \ n_2\}$ であれば,①,②より

$$|\boldsymbol{I_n}| = \left| \int_0^{\infty} \{f(t+s) - f(t+0)\} g_n(s)ds \right| \leqq |J_1| + |J_2| < \varepsilon$$

だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{I_n} = 0$ が得られる。同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{II_n} = 0$ もわかる。 (証明終)

< 広義積分の発散する例 >

P.46 の例の場合、$f(t) = \begin{cases} 1 & : |t| \leqq 1 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$ に対し

$\mathscr{F}[f] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \frac{2\sin x}{x}$ となる。$F(x) = \dfrac{2\sin x}{x}$ に対し

広義積分 $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{2\sin x}{x}e^{ixt}dx$

が発散することを示す。

[$t = 1$ のとき]

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b F(x)e^{ix}dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{2\sin x}{x}(\cos x + i\sin x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \Big(\frac{\sin(2x)}{x} + \frac{2i\sin^2 x}{x}\Big)dx$$

ここで $\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\sin(2x)}{x}dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \frac{1}{\pi}\int_{2a}^{2b} \frac{\sin u}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{1}{2}$

より前の項は収束する。しかし後の項は発散する。

$b = n^2$　,　$a = -n$ のとき

$$\int_a^b \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_{-n}^{n} \frac{\sin^2 x}{x}dx + \int_n^{n^2} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_n^{n^2} \frac{\sin^2 x}{x}dx$$

ここで $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ より

$$\int_a^b \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_n^{n^2} \frac{1 - \cos(2x)}{2x}dx = \int_n^{n^2} \frac{1}{2x}dx - \int_n^{n^2} \frac{\cos(2x)}{2x}dx = x_n - y_n$$

$x_n = \displaystyle\int_n^{n^2} \frac{1}{2x}dx$　,　$y_n = \displaystyle\int_n^{n^2} \frac{\cos(2x)}{2x}dx$ とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ である。

$$y_n = \int_n^{n^2} \frac{\sin(2x + \frac{\pi}{2})}{2x}dx = \int_{2n+\frac{\pi}{2}}^{2n^2+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u - \frac{\pi}{2}}\cdot 2\cdot du = 2\int_{2n+\frac{\pi}{2}}^{2n^2+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u - \frac{\pi}{2}}du$$

$$= 2\int_{2n+\frac{\pi}{2}}^{2n^2+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u}du + \pi\int_{2n+\frac{\pi}{2}}^{2n^2+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u\Big(u - \frac{\pi}{2}\Big)}du \to 0\ (n \to \infty)$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n^2} \frac{\sin^2 x}{x}dx = +\infty$ となるので

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n^2} \frac{2\sin x}{x}e^{ix}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n^2} \frac{\sin(2x)}{x}dx + \frac{i}{\pi}\int_n^{n^2} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ は発散する。

< P73 の捕捉説明 >

補題 5.12　2 変数関数 $\varphi(t,u)$ が連続で偏微分可能であり，偏導関数 $\varphi_t(t,u)$ が連続であれば

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t,u)du = \varphi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)du$$

(証明)　$\displaystyle \frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t,u)du = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h}\varphi(t+h,u)du - \int_0^t \varphi(t,u)du\right\}$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\int_0^{t+h}\frac{\varphi(t+h,u)-\varphi(t,u)}{h}du + \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varphi(t,u)du\right\}$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)du + \varphi(t,t)$$　　(証明終)

例　P73 例題の $\displaystyle x(t) = \int_0^t \left\{e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\right\} f(u)du$ が解であることを確かめる。

$g(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ とおくと $g(t)$ は同次微分方程式の解である。つまり

$$g''(t) + 5g'(t) + 6g(t) = 0$$

が成立する。また

$$x(t) = \int_0^t g(t-u)f(u)du = (g*f)(t)$$

である。$g(0) = 0$ と補題から

$$x'(t) = g(0)f(t) + \int_0^t g'(t-u)f(u)du = \int_0^t g'(t-u)f(u)du$$

となる。$g'(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t}$ より $g'(0) = 1$ から

$$x''(t) = g'(0)f(t) + \int_0^t g''(t-u)f(u)du = f(t) + \int_0^t g''(t-u)f(u)du$$

よって

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t)$$

$$= f(t) + \int_0^t \{g''(t-u) + 5g'(t-u) + 6g(t-u)\} f(u)du = f(t)$$

でかつ $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ より $x(t)$ が例題の解であることが確かめられた。

< 第 3 章問題の解答 $No.1$ >

P.56　(ラプラス変換)

(1)　$\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}$　　(2)　$\mathscr{L}[e^{-t}]=\dfrac{1}{s+1}$　　(3)　$\mathscr{L}[e^{it}]=\dfrac{1}{s-i}$

P.57

(1)　$\mathscr{L}[\sin(kt)]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$　,　(2)　$\mathscr{L}[e^{(\alpha+ki)t}]=\dfrac{1}{s-\alpha-ki}$

(3)　$\mathscr{L}[e^{\alpha t}\cos(kt)]=\dfrac{1}{2}\left\{\mathscr{L}[e^{(\alpha+ki)t}]+\mathscr{L}[e^{(\alpha-ki)t}]\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{s-\alpha-ki}+\dfrac{1}{s-\alpha+ki}\right\}=\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+k^2}$

(4)　$\mathscr{L}[e^{\alpha t}\sin(kt)]=\dfrac{i}{2}\left\{\mathscr{L}[e^{(\alpha-ki)t}]-\mathscr{L}[e^{(\alpha+ki)t}]\right\}=\dfrac{i}{2}\left\{\dfrac{1}{s-\alpha+ki}-\dfrac{1}{s-\alpha-ki}\right\}=\dfrac{k}{(s-\alpha)^2+k^2}$

P.58

(1)　$\mathscr{L}[t^2]=-\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}[t]=-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)=\dfrac{2}{s^3}$　,　(2)　$\mathscr{L}[t^3]=-\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}[t^2]=-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{2}{s^3}\right)=\dfrac{6}{s^4}$

(3)　$\mathscr{L}[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$　,　(4)　$\mathscr{L}[e^{\alpha t}]=\dfrac{1}{s-a}$　,　(5)　$\mathscr{L}[te^{\alpha t}]=-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s-\alpha}\right)=\dfrac{1}{(s-\alpha)^2}$

(6)　$\mathscr{L}[t\cos(kt)]=-\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}[\cos(kt)]=-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+k^2}\right)=\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

(7)　$\mathscr{L}[t\sin(kt)]=-\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}[\sin(kt)]=-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{k}{s^2+k^2}\right)=\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

(8)　$\mathscr{L}[\sinh(kt)]=\mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-k}-\dfrac{1}{s+k}\right)=\dfrac{k}{s^2-k^2}$

(9)　$\mathscr{L}[\cosh(kt)]=\mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-k}+\dfrac{1}{s+k}\right)=\dfrac{s}{s^2-k^2}$

P.59

問の解　　$\mathscr{L}\big[f'''(t)\big]=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$

P.65　(ラプラス逆変換 2)

$F(s)$	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\dfrac{1}{s-a}$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$	1	t	t^n	e^{at}	te^{at}	$\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$	$e^{at}\sin(\omega t)$	$e^{at}\cos(\omega t)$

$F(s)$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$\dfrac{1}{s}e^{-\alpha s}$	$e^{-\alpha\sqrt{s}}$
$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$	$t\sin(\omega t)$	$t\cos(\omega t)$	$\sinh(\omega t)$	$\cosh(\omega t)$	$f(t)=\begin{cases}1:t\geqq\alpha\\0:t<\alpha\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$

P.66

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-s-2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s+1}\right\}\right]=\dfrac{1}{3}\left(e^{2t}-e^{-t}\right)$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s+2}\right\}\right]=\dfrac{1}{4}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4s+5}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-2)^2+1}\right]=e^{2t}\sin t$

< 第 3 章問題の解答 $No.2$ >

P.67 (ラプラス逆変換 4)

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{s^2-8s+16}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-4+1}{(s-4)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-4}+\dfrac{1}{(s-4)^2}\right]=e^{4t}+te^{4t}$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2-6s+9}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3+4}{(s-3)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-3}+4\times\dfrac{1}{(s-3)^2}\right]=e^{3t}+4te^{3t}$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s^2-2s+5}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1+3}{(s-1)^2+4}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-1)^2+2^2}+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{(s-1)^2+2^2}\right]=e^t\cos(2t)+\dfrac{3}{2}e^t\sin(2t)$

(4) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{s^2-4s+5}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2(s-2)+4}{(s-2)^2+1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[2\times\dfrac{s-2}{(s-2)^2+1}+4\times\dfrac{1}{(s-2)^2+1}\right]=2e^{2t}\cos t+4e^{2t}\sin t$

P.68

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2}\right]=\left(te^{at}\right)*f(t)=\displaystyle\int_0^t(t-u)e^{a(t-u)}f(u)du$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)(s-b)}\right]=\left\{\dfrac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)\right\}*f(t)=\dfrac{1}{a-b}\displaystyle\int_0^t\left(e^{a(t-u)}-e^{b(t-u)}\right)f(u)du$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2+b^2}\right]=\left\{\dfrac{1}{b}e^{at}\sin(bt)\right\}*f(t)=\dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^t e^{a(t-u)}\sin\left(b(t-u)\right)f(u)du$

P.69 (ラプラス逆変換 6)

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s^3}\right]=a+bt+\dfrac{c}{2}t^2$　　(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a+bs}{s^2+1}\right]=a\sin t+b\cos t$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]=\cos(2t)$　　(4) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)$

(5) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-2)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-2+1}{(s-2)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{1}{(s-2)^2}\right]=e^{2t}+te^{2t}$

(6) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{(s-2)(s+4)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\frac{7}{6}}{s+4}-\dfrac{\frac{1}{6}}{s-2}\right]=\dfrac{7}{6}e^{-4t}-\dfrac{1}{6}e^{2t}$

(7) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(s-2)^3}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{(s-2)^2}\right)\right]=-t\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-2)^2}\right]=-t^2e^{2t}$

(8) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{16}{s^4-16}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s+2}\right)-\dfrac{2}{s^2+4}\right]=\dfrac{1}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}-\sin(2t)$

P.70 (常微分方程式への応用 1)

(1) $\dfrac{dx}{dt}=kx$, $x(0)=a$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおく。

$\mathscr{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right]=sX(s)-x(0)=sX(s)-a$, $\mathscr{L}[kx]=kX(s)$　より (1) 式の

両辺をラプラス変換すると

$$sX(s)-a=kX(s)\ \Rightarrow\ X(s)=\frac{a}{s-k}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s-k}\right]=ae^{kt}$$

(答) $x(t)=ae^{kt}$

< 第 3 章問題の解答 $No.3$ >

P.70 (常微分方程式への応用 1)

(2) $\dfrac{dx}{dt} + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおく。(2) 式の両辺をラプラス変換すると

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right] = e^{-t} + te^{-t} \qquad \underline{(答)\ x(t) = e^{-t} + te^{-t}}$$

P.71 (常微分方程式への応用 2)

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 6x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおく。

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) \ , \ \mathscr{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) \ , \ \mathscr{L}\left[e^t\right] = \frac{1}{s-1}$$

より (1) の式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s) - 5sX(s) + 6X(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3}$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3}\right] = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$\underline{(答)\ x(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - 2e^{2t} + e^{3t}\right)}$$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおく。

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1 \ , \ \mathscr{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - s - 1$$

より (2) の式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s) - s - 1 - 4\left(sX(s) - 1\right) + 4X(s) = 0 \ \Rightarrow \ (s^2 - 4s + 4)X(s) = s - 3$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s-3}{s^2 - 4s + 4} = \frac{s-2-1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}\right] = e^{2t} - te^{2t} \ \ \underline{(答)\ x(t) = e^{2t} - te^{2t}}$$

P.72 (常微分方程式への応用 3)

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) \ , \ \mathscr{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 1 \ \text{より}$$

(1) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s) - 1 - 2sX(s) + 5X(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{(s-1)^2 + 4}$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2 + 4}\right] = \frac{1}{2}e^t\sin(2t) \ \ \underline{(答)\ x(t) = \frac{1}{2}e^t\sin(2t)}$$

< 第 3 章問題の解答 $No.4$ >

P.72 (常微分方程式への応用 3)

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=2\sin t$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおく。

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-s-1$$ より (2) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s)-s-1+4X(s)=\frac{2}{s^2+1} \quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{s+1}{s^2+4}+\frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$X(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{s^2+4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{s^2+1} \quad\Rightarrow\quad \underline{(答)\ x(t)=\cos(2t)+\frac{1}{6}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin t}$$

P.73 (常微分方程式への応用 4)

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+2x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0$

(解) $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ とおき (1) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s)-3sX(s)+2X(s)=F(s) \quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{F(s)}{s^2-3s+2}=\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}\right)F(s)$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}\right)F(s)\right]=\left(e^{2t}-e^{t}\right)*f(t)=\underline{\int_0^t\left\{e^{2(t-u)}-e^{t-u}\right\}f(u)du}$$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+10x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0$

(解) $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ とおき (2) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+6sX(s)+10X(s)=F(s) \quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{F(s)}{s^2+6s+10}=\frac{1}{(s+3)^2+1}\times F(s)$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2+1}F(s)\right]=\left(e^{-3t}\sin t\right)*f(t)=\underline{\int_0^t e^{-3(t-u)}\sin(t-u)f(u)du}$$

P.74 (常微分方程式への応用 5)

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y\\ \frac{dy}{dt}=-x+3y\\ x(0)=0\ ,\ y(0)=1\end{cases}$$

(解) $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$ とおく。

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right]=sX(s)-x(0)=sX(s)\ ,\ \mathscr{L}\left[\frac{dy}{dt}\right]=sY(s)-y(0)=sY(s)-1$$

より微分方程式をラプラス変換すると

$$\left\{\begin{array}{ll}sX(s)=X(s)+Y(s) & \Rightarrow\ (s-1)X(s)-Y(s)=0\\ sY(s)-1=-X(s)+3Y(s) & \Rightarrow\ X(s)+(s-3)Y(s)=1\end{array}\right) \Rightarrow \quad \begin{array}{lr}(s-3)(s-1)X(s)-(s-3)Y(s)=0 & \\ +)\qquad X(s)+(s-3)Y(s)=1 & \\ \hline (s^2-4s+4)X(s) & =1\end{array}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s-2)^2}\ ,\ Y(s)=\frac{s-1}{(s-2)^2}=\frac{s-2+1}{(s-2)^2}=\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2)}\right]=te^{2t},y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}\right]=e^{2t}+te^{2t}$$

(答) $\begin{cases}x(t)=te^{2t}\\ y(t)=e^{2t}+te^{2t}\end{cases}$