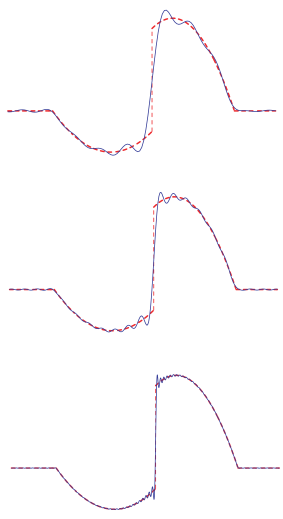
高知工科大学

Kochi University of Technology

「数学 8」

(フーリエ解析)



2010年度版

内容

◎ フーリエ級数
◎ フーリエ変換
◎ ラプラス変換

井上 昌昭　著

< 周期関数 >

関数 $f(t)$ が**周期関数**であるとは、ある正定数 p が存在してすべての実数 t に対し $f(t+p)=f(t)$ が成立するときをいう。このとき p を $f(t)$ の**周期**という。

<u>例</u>　自然数 n と定数 $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ に対し、関数

$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$ を**三角多項式**という。

この関数は $f(t+2\pi) = f(t)$ を満たすので、$f(t)$ は周期 2π の周期関数である。

補題　p を正数とする。$f(t)$ が周期 p の周期関数のとき、任意の実数 a に対し、

$$\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$$

が成り立つ。

[証明] $np \leqq a < (n+1)p$ 　(n は整数) のとき $a = np + a'$ 　$(0 \leqq a' < p)$ とおく。

$$\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_{np+a'}^{(n+1)p+a'} f(t)dt$$

$$= \int_{a'}^{p+a'} f(s+np)ds = \int_{a'}^{p+a'} f(s)ds$$

$$= \int_{a'}^{p} f(s)ds + \int_{p}^{p+a'} f(s)ds$$

$$= \int_{a'}^{p} f(s)ds + \int_0^{a'} f(\tau+p)d\tau = \int_{a'}^{p} f(\tau)d\tau + \int_0^{a'} f(\tau)d\tau$$

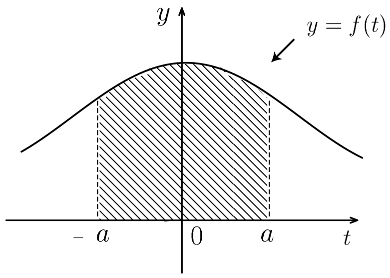
$$= \int_0^p f(\tau)d\tau$$ 　（証明終）

（注）$f(t)$ が周期 2π の周期関数のとき、任意の実数 b に対し

$$\int_{-\pi+b}^{\pi+b} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

が成り立つ。

< 偶関数と奇関数 >



関数 $f(t)$ が $f(-t)=f(t)$ を満たすとき、**偶関数**という。

例　$f(t)=K$　(定数),　$f(t)=t^{2n}$　(n は整数),

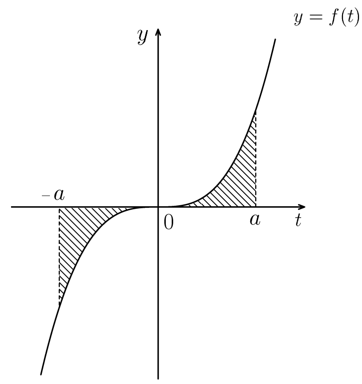
$f(t)=\cos t$,　$f(t)=\sin^2 t$ などは偶関数である。

◎

$f(t)$ が偶関数のとき、任意の正定数 a に対し、 $$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$$ が成立する。

（証明）
$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_a^0 f(-s)(-1)ds \qquad (t=-s)$$
$$= -\int_a^0 f(s)ds = \int_0^a f(s)ds$$
よりわかる。　（証明終）

関数 $f(t)$ が $f(-t)=-f(t)$ を満たすとき、**奇関数**という。



例　$f(t)=t^{2n-1}$　(n は整数),　$f(t)=\sin t$　,　$f(t)=\tan t$,
などは奇関数である。

◎

$f(t)$ が奇関数のとき、任意の正定数 a に対し、 $$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$ が成立する。

（証明）
$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_a^0 f(-s)(-1)ds = -\int_0^a f(s)ds$$
よりわかる。　（証明終）

次の性質がある。

①　偶関数 × 偶関数 = 偶関数　　②　奇関数 × 奇関数 = 偶関数

③　偶関数 × 奇関数 = 奇関数　　④　偶関数 + 偶関数 = 偶関数

⑤　奇関数 + 奇関数 = 奇関数

（注 1）任意の関数 $f(t)$ にたいして、$f(t)=g(t)+h(t)$ を満たす偶関数 $g(t)$ と奇関数 $h(t)$ が存在する。

（注 2）偶関数でかつ奇関数である関数は $f(t)=0$（恒等的にゼロ）だけである。

< 区分的に連続な関数 >

$\{t \ : \ a \leqq t \leqq b\}$ を $[a\ ,\ b]$ と略記する。

[定義 1]　関数 $f(t)$ が次の条件①, ②を満たすとき、区間 $[a\ ,\ b]$ で**区分的に連続**であるという。

①　$[a\ ,\ b]$ に属する有限個の点 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ を除いたところで $f(t)$ は連続である。

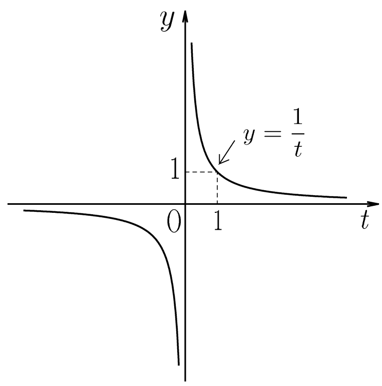
②　各不連続点 t_k $(1 \leqq k \leqq n)$ で $f(t)$ の左側極限と右側極限が存在し、有限の値である。
$a < t_k < b$ のとき

$$f(t_k - 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t_k - h) \quad , \quad f(t_k + 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t_k + h)$$

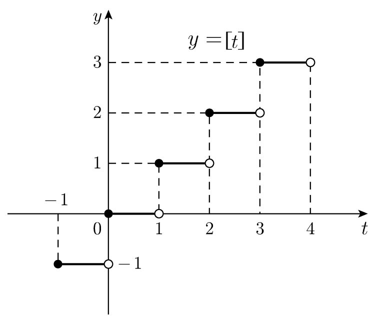
が存在し、有限の値である。$t_k = a$ のときは右側極限 $f(t_k + 0)$ が存在し、有限の値である。$t_k = b$ のときは左側極限 $f(t_k - 0)$ が存在し、有限の値である。

<u>例 1</u>　$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & : \quad t \neq 0 \\ 0 & : \quad t = 0 \end{cases}$　の場合

$f(0+0) = +\infty$ であるから
区間 $[0\ ,\ 1]$ で区分的に連続ではない。



<u>例 2</u>　$f(t) = [t] : t$ を超えない最大整数
の場合は不連続点は $t = k$（k は整数)
の場合だけである。$f(t)$ は任意有限区間
で区分的に連続である。$t = k$（整数）のときは
$f(k-0) = k-1\ ,\ f(k+0) = k$ である。



[定義 2]　$f(t)$ が周期 $2p$ $(p > 0)$ の周期関数とする。この関数が区間 $[-p\ ,\ p]$ で区分的に連続であるとき、単に**区分的に連続**であるという。

< 区分的に連続な関数の積分 1 >

定数 a, b $(a < b)$ に対し、

$$\{t : a \leq t \leq b\} = [a,\, b]\ ,\quad \{t : a < t < b\} = (a,\, b)$$

と略記する。　$[a,\, b]$ を閉区間,　$(a,\, b)$ を開区間という。

[定理]

> $[a, b]$ で定義された関数 $f(t)$ が $(a,\, b)$ で連続であり、$f(a+0)$ と $f(b-0)$ が存在して有限とする。この関数 $f(t)$ に対し
>
> $$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(b-0) & : \ t = b \\ f(t) & : \ a < t < b \\ f(a+0) & : \ t = a \end{cases}$$
>
> とおく。$\tilde{f}(t)$ は $[a, b]$ で連続である。このとき次式が成り立つ。
>
> $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

（証明）　$f(t)$ は区分的に連続だから $[a, b]$ で積分可能である。（証明は p76）

$[a, b]$ の分割 $\Delta : a = t_0, t_1, \cdots, t_n = b$ に対する $f, \tilde{f}$ のリーマン和を

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}),\quad S_\Delta(\tilde{f}) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}(\xi_k)(t_k - t_{k-1})\qquad (t_{k-1} \leqq \xi_k \leqq t_k)$$

とおく。$S_\Delta(f)$ と $S_\Delta(\tilde{f})$ の値が異なるのは $\xi_1 = a$ か $\xi_n = b$ の場合であるから

$$\begin{aligned} |S_\Delta(f) - S_\Delta(\tilde{f})| &\leqq |f(a) - f(a+0)|(t_1 - a) + |f(b) - f(b-0)|(b - t_{n-1}) \\ &\leqq (|f(a) - f(a+0)| + |f(b) - f(b-0)|)|\Delta| \end{aligned}$$

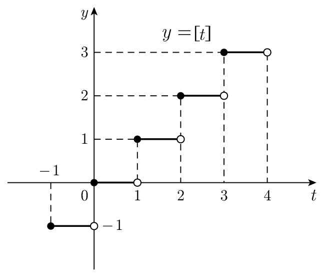
ここで $|\Delta| = \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leqq k \leqq n\}$（分割の最大幅）である。

よって $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} |S_\Delta(f) - S_\Delta(\tilde{f})| = 0$ より

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(\tilde{f}) = \int_a^b \tilde{f}(t)dt \qquad \text{（証明終）}$$

（注）　$f(t)$ に対し、この定理の $\tilde{f}(t)$ を「$f(t)$ を $a \leqq t \leqq b$ の範囲で連続化した関数」ということにする。

＜区分的に連続な関数の積分 2＞



<u>例 1</u>　$f(t)=[t]$(t を超えない最大整数)

のとき $\int_0^2 f(t)dt$ を求めたい。

$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で $f(t)$ を連続化した関数を

$\tilde{f}_1(t)$ とおくと $\tilde{f}_1(t)=0 \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ だから

前ページの定理より

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \tilde{f}_1(t)dt = \int_0^1 0dt = 0$$

である。また $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲で $f(t)$ を連続化した関数を $\tilde{f}_2(t)$

とおくと $\tilde{f}_2(t)=1 \quad (1 \leqq t \leqq 2)$ だから前ページの定理より

$$\int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 \tilde{f}_2(t)dt = \int_1^2 1dt = 1$$

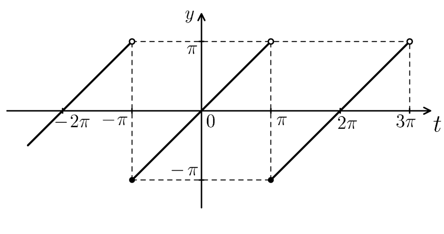
である。よって

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt = 0+1=1$$

(注 1) この例を $\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 0dt + \int_1^2 1dt = 1$ と考えても良い。

<u>例 2</u>　$f(t)$ が周期 2π の周期関数で、

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ のとき



$$f(t) = \begin{cases} -\pi & : \quad t=\pi \\ t & : \quad -\pi \leqq t < \pi \end{cases}$$

とする。(右図参照)　この $f(t)$ は奇関数ではない。しかし

$f(t)$ を $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲で連続化した関数を $\tilde{f}(t)$ とおくと

$\tilde{f}(t)=t(-\pi \leqq t \leqq \pi)$ となる。$\tilde{f}(t)$ は奇関数である。

前ページの定理より、$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲での積分は次のように計算できる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} tdt = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin tdt = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\sin tdt = \int_{-\pi}^{\pi} t\sin tdt = 2\int_0^{\pi} t\sin tdt = 2\pi$$

(注 2) 例 2 の途中式を $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} tdt, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin tdt = \int_{-\pi}^{\pi} t\sin tdt$ と略しても良い。

< 三角関数の積分 >

三角関数の積分は半角の公式や積和公式を使って $\sin(nt)$ や $\cos(nt)$ の形にしてから積分する。

① 半角の公式 $\boxed{\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2} \quad , \quad \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}}$

② 積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

例 1 (1) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(3t)dt = \int_0^\pi \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(6t)\right\}dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{1}{12}\sin(6t)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin(2t)\cos t dt = \int_{-\pi}^\pi \left\{\frac{1}{2}\sin(3t)+\frac{1}{2}\sin t\right\}dt = \left[-\frac{1}{6}\cos(3t)-\frac{1}{2}\cos t\right]_{-\pi}^\pi = 0$

例 2 自然数 $m,\ n(m \neq n)$ に対し, 次式が成立する。

① $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos^2(nt)dt = \pi$　② $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin^2(nt)dt = \pi$

③ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)\cos(mt)dt = 0$　④ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)\sin(nt)dt = 0$

⑤ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)\sin(mt)dt = 0$　⑥ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$

⑦ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nt)dt = 0$　⑧ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin(nt)dt = 0$

⑨ $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi 1dt = 2\pi$

この①〜⑨は区間 $[-\pi,\ \pi]$ を定義域とする関数 $f(t)$ の集合を線形空間と考えたとき,

内積 $\displaystyle(f,\ g) = \int_{-\pi}^\pi f(t)g(t)dt$ に関し $\{1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos(2t),\ \sin(2t),\ \cdots,\ \cos(nt),\ \sin(nt),\ \cdots\}$

が互いに直交 ($f \neq g$ ならば $(f,\ g) = 0$) することを意味する。

< 三角多項式の係数 >

例 自然数 n と定数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_n$ に対し, 関数

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \{a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)\}$$

を三角多項式という。

$1 \leqq k \leqq n$ なる自然数 k に対し, 前ページの結果より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{n} \Big(a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt) \Big) \right\} \cos(kt)dt$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)dt + \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt)\cos(kt)dt + b_j \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jt)\cos(kt)dt \right\}$$

$$= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt)dt = \pi a_k$$

問 例の $f(t)$ と自然数 k $(1 \leqq k \leqq n)$ に対し, 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$

< フーリエ級数 1 >

三角多項式

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \{a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)\}$$

は周期 2π の周期関数である。前ページの結果より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2\pi a_0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \pi a_k, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \pi b_k$$

$(1 \leqq k \leqq n)$ だから, 各係数は

$$(*) \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt}$$

と表される。

フランスの数学者 J.B.J.Fourier(1768〜1830) は任意の周期 2π の周期関数が三角多項式の極限として表されることを信じた。

一般の周期 2π の周期関数 $f(t)$ に対し, $(*)$ で定められた係数 $a_0,\ a_k,\ b_k$ をとるとき, 無限級数

$$a_0 + a_1\cos t + b_1 \sin t + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t) + \cdots + a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt) + \cdots$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

は $f(t)$ を近似していると考え,

$$\boxed{f(t) \ \sim \ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}}$$

と書き, 発見者の名前をつけて $f(t)$ の**フーリエ級数** (Fourier series) という。また $a_0,\ a_k,\ b_k\ (1 \leqq k)$ を**フーリエ係数**という。

例 $f(t)$ が偶関数のときは $f(t)\cos(kt)$ は偶関数であり, $f(t)\sin(kt)$ は奇関数だから

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = 0 \qquad \text{である。}$$

よって偶関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \ \sim \ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt) \qquad \left(a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt,\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt\right)$$

となる

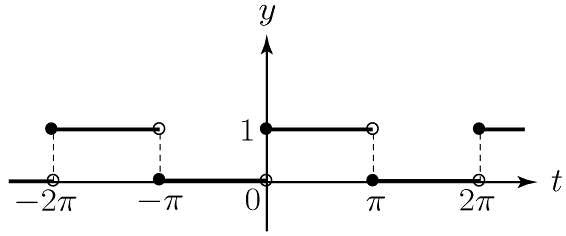
問 $f(t)$ が奇関数の場合にフーリエ級数とフーリエ係数を求めよ。

＜ フーリエ級数 2 ＞

例 $f(t)$ が図 1 のような周期関数の場合のフーリエ級数を求めたい。

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} 0 \ : \ t = \pi \\ 1 \ : \ 0 \leqq t < \pi \\ 0 \ : \ -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$$



(図1)

である。$f(t)$ は区分的に連続だからフーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(t)dt\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1dt = \frac{1}{2\pi}\left[t\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k}\cos(0)\right) = \frac{1}{\pi k}\{-\cos(k\pi) + 1\} = \begin{cases} 0 & : k \text{ が偶数} \\ \dfrac{2}{k\pi} & : k \text{ が奇数} \end{cases}$$

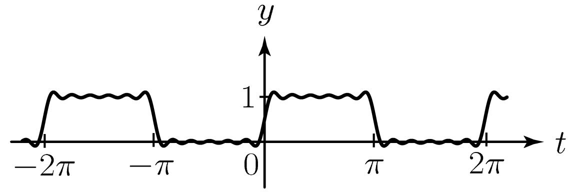
である。フーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7t) + \frac{2}{9\pi}\sin(9t) + \frac{2}{11\pi}\sin(11t) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\sin t + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t) + \frac{1}{9}\sin(9t) + \frac{1}{11}\sin(11t) + \cdots\right\}$$

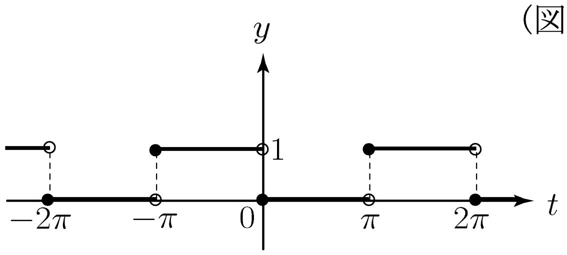
となる。右図 (図 2) はこのフーリエ級数の $k = 11$ までの部分和のグラフである。



(図2)

問 $f(t)$ は周期 2π の周期関数で

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ : \ t = \pi \\ 0 \ : \ 0 \leqq t < \pi \\ 1 \ : \ -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$$



(図3)

のとき, $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。

< フーリエ級数 3 >

例　$f(t)$ が p5 例 2 の関数のとき,

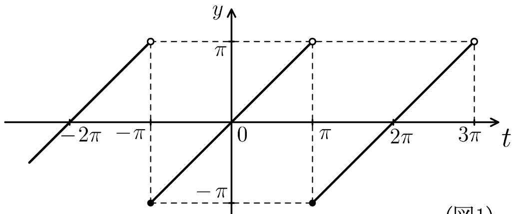
$f(t)$ は奇関数ではないが,

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲で積分

する場合は, $f(t)$ をこの範囲で連続化

した関数 $\tilde{f}(t) = t$ とみなし,

奇関数と考えて積分してよい。



(図1)

8 ページの結果より奇関数の場合，フーリエ係数は

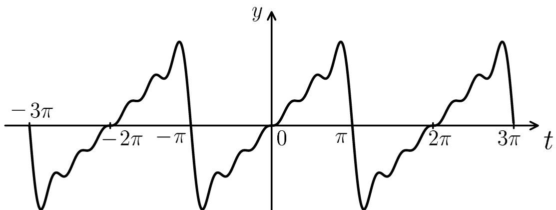
$$a_0 = 0 \quad , \quad a_k = 0 \quad (k \geqq 1)\ , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(kt)dt$$

となり、部分積分法より

$$\int_0^{\pi} t\sin(kt)dt = \left[t\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kt)}{k}dt = -\frac{\pi}{k}\cos(k\pi)$$

であるから

$$b_k = -\frac{2}{k}\cos(k\pi) = \begin{cases} \frac{2}{k} & : \quad k \text{ が奇数} \\ -\frac{2}{k} & : \quad k \text{ が偶数} \end{cases}$$



(図2)

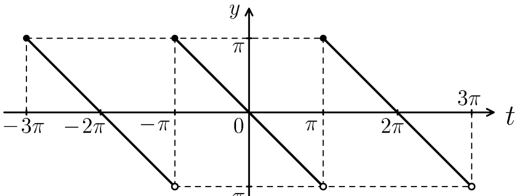
となり、フーリエ級数は

$$\begin{aligned} f(t) \ &\sim \ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\} \\ &= \frac{2}{1}\sin t - \frac{2}{2}\sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t) - \frac{2}{4}\sin(4t) + \frac{2}{5}\sin(5t) - \frac{2}{6}\sin(6t) + \cdots \\ &= 2\left\{\sin t - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{5}\sin(5t) - \frac{1}{6}\sin(6t) + \cdots\right\} \end{aligned}$$

となる。図 2 のグラフはこのフーリエ級数の $k = 6$ までの部分和のグラフである。

問　$f(t)$ が図 3 の周期関数であるとき、

$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。



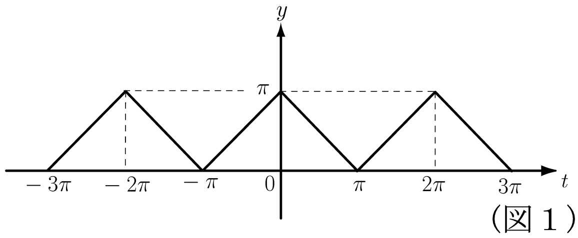
(図3)

< フーリエ級数 4 >

例　$f(t)$ が図 1 のような周期関数のとき $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t) = \pi - |t|$$

であり，$f(t)$ は偶関数である。



（図 1）

8 ページの例から偶関数の場合のフーリエ係数は

$$b_k = 0 \quad , \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\pi t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\left\{\left[(\pi - t)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{0 - 0 + \int_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi}$$

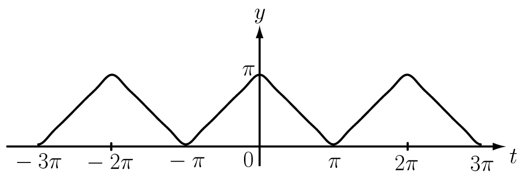
$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\cos(k\pi)}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2}\right\} = \frac{2}{\pi k^2}\{-\cos(k\pi) + 1\} = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi} & : k \text{ が奇数} \\ 0 & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$

となる。よって $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

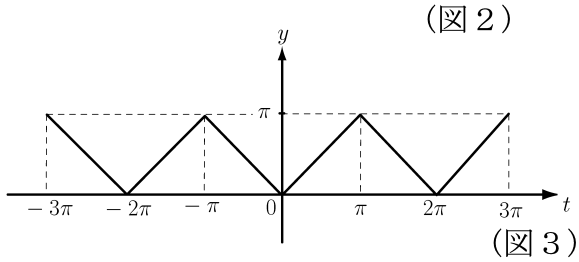
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left\{\cos t + \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{25}\cos(5t) + \frac{1}{49}\cos(7t) + \cdots\right\}$$

となる。
図 2 のグラフはこのフーリエ級数の $k = 7$ までの部分和のグラフである。



（図 2）

問　$f(t)$ が図 3 の周期関数であるとき，$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。



（図 3）

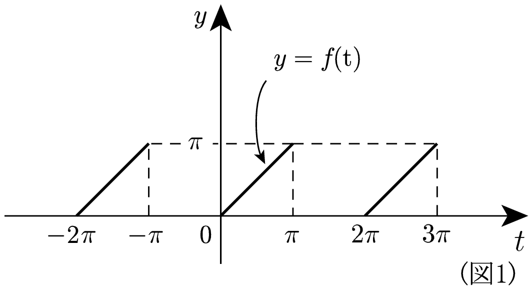
＜フーリエ級数 5＞

例　$f(t)$ が図 1 のような周期関数のとき

$-\pi < t < \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} t: & 0 \leqq t < \pi \\ 0: & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

となるのでフーリエ係数は



(図1)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,dt = \frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(kt)dt = -\frac{\cos(k\pi)}{k}$$

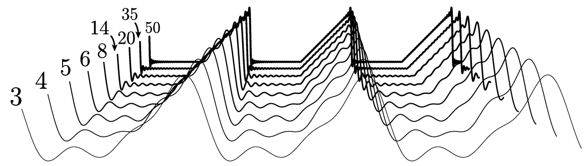
となるのでフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k^2}\right)\cos(kt) - \left(\frac{\cos(k\pi)}{k}\right)\sin(kt)\right\}$$

となる。

図 2 では $n = 3, 4, 5, 6, 8, 14, 20, 35, 50$ のときの $S_n(t)$ のグラフを $-3\pi \leqq t \leqq 3\pi + 0.5$ までの範囲で手前から順に描いた図である。見やすくするために手前のグラフを拡大してある。



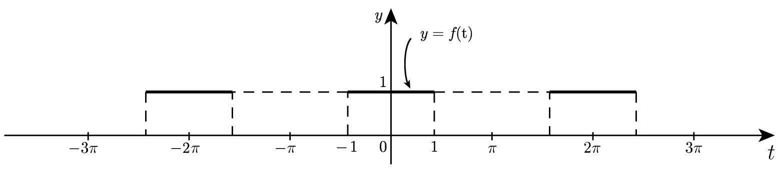
(図2)

問　$f(t)$ が図 3 のような周期関数のとき

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} 0: & 1 < t \leqq \pi \\ 1: & -1 \leqq t \leqq 1 \\ 0: & -\pi \leqq t < -1 \end{cases}$$

となる。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ を求め，例のように $\sum$ で表せ。



(図3)

< フーリエ級数 6 >

関数 $f(t)$ に対するフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \bigl\{ a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \bigr\}$$

とする。フーリエ級数 $S_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$ は元の関数 $f(t)$ と一致するかどうかは場合によって異なる。

例 1　$f(t)$ が 11 ページの例のような連続な周期関数のとき，$f(t)$ と第 7 部分和 $S_7(t)$ のグラフはほとんど一致しているように見える。実際に，この場合は全ての実数 t でフーリエ級数と元の関数 $f(t)$ が一致している。つまり

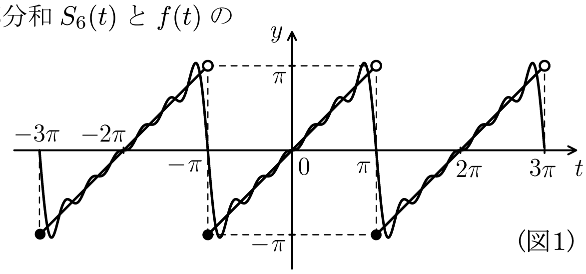
$$f(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl\{ a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \bigr\} = S_\infty(t)$$

が全ての実数 t で成り立つ。

例 2　$f(t)$ が 10 ページの例の関数の場合，$t = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \cdots$ で $f(t)$ は不連続になる。図 1 は $n = 6$ までの部分和 $S_6(t)$ と $f(t)$ のグラフを重ねて表したものである。このグラフでは $t = \pi$ のとき

$$f(\pi) = -\pi\ ,\ S_6(\pi) = 0$$

である。実際フーリエ級数 $S_\infty(t)$ は



(図1)

$$S_\infty(t) = 2\left\{ \frac{1}{1}\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{5}\sin(5t) - \frac{1}{6}\sin(6t) + \cdots \right\}$$

であるが，$\sin(n\pi) = 0 \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから $S_\infty(\pi) = 0$ より $f(\pi) \neq S_\infty(\pi)$ である。よって

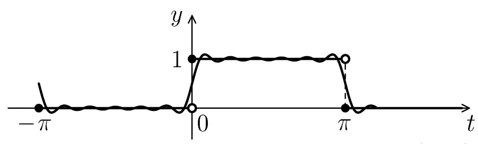
$$f(n\pi) = -\pi \quad , \quad S_\infty(n\pi) = 0 \qquad (n = \pm 1\,, \pm 3\,, \pm 5\,, \cdots)$$

となる。しかし，それ以外の t では $f(t) = S_\infty(t)$ となる。

問　$f(t)$ が 9 ページの例の関数のとき，フーリエ級数は

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{ \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t) + \frac{1}{11}\sin(11t) + \cdots \right\}$$

となる。(図 2 の実線は $S_{11}(t)$ のグラフである。)
次の値を求めよ。



(図2)

(1)　$f(0) =$ 　　　　　　，$S_\infty(0) =$

(2)　$f(\pi) =$ 　　　　　　，$S_\infty(\pi) =$

< 区分的になめらかな関数１ >

[定義 1]　関数 $f(t)$ が次の条件①, ②を満たすとき, 区間 $[a,b]$ で**区分的に滑らか**であるという。

① $[a,b]$ に属する有限個の点 $t_1, \cdots, t_n$ を除いたところで $f(t)$ は微分可能であり, その範囲で導関数 $f'(t)$ は連続である。

②不連続点 t_k $(1 \leqq k \leqq n)$ で $f(t)$ および $f'(t)$ の左側極限と右側極限が存在して有限である。$a < t_k < b$ のときは

$$f(t_k - 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t_k - h) \quad , \qquad f(t_k + 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t_k + h)$$

$$f'(t_k - 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f'(t_k - h) \quad , \qquad f'(t_k + 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f'(t_k + h)$$

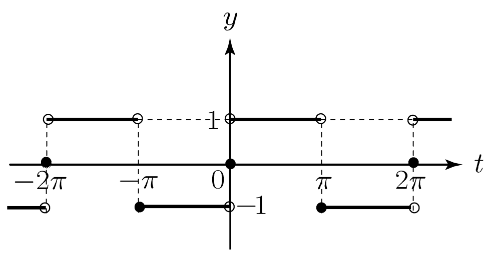
が存在して有限である。$t_k = a$ のときは右極限 $f(t_k + 0)$, $f'(t_k + 0)$ が存在して有限である。$t_k = b$ のときは左側極限 $f(t_k - 0)$, $f(t_k - 0)$ が存在して有限である。

[定義 2]　$f(t)$ が周期 $2p$ $(p > 0)$ の周期関数とする。この関数が $[-p, p]$ 上で区分的に滑らかであるとき, $f(t)$ を単に**区分的に滑らか**であるという。

例 1　関数 $f(t)$ が周期 2π をもつ周期関数で, 微分可能であり, かつその導関数が連続であれば, 区分的に滑らかである。

例 2　$f(t)$ が周期 2π の周期関数で

$$f(t) = \begin{cases} -1 & : \quad -\pi \leqq t < 0 \\ 0 & : \quad t = 0 \\ 1 & : \quad 0 < t < \pi \end{cases}$$



のとき $f(t)$ は区分的に滑らかであり

$$f(0-0) = -1 \quad , \quad f(0+0) = 1 \quad , \quad f(-\pi - 0) = 1 \quad , \quad f(-\pi + 0) = -1$$

$$f'(0-0) = 0 \quad , \quad f'(0+0) = 0 \quad , \quad f'(-\pi - 0) = 0 \quad , \quad f'(-\pi + 0) = 0$$

である。

< 区分的になめらかな関数 2 >

<u>定理</u>

> 周期 p $(p>0)$ の周期関数 $f(t)$ が区分的に滑らかであれば
> 次式が成り立つ。
>
> ① $\displaystyle \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t+h)-f(t+0)}{h} = f'(t+0)$
>
> ② $\displaystyle \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(t+h)-f(t-0)}{h} = f'(t-0)$

[証明] ＜①の証明＞

t に対し, 正数 δ (>0) を十分小さくとり,

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & : \quad t < s \leqq t+\delta \\ f(t+0) & : \quad s = t \end{cases}$$

とおくと $\tilde{f}(s)$ は $[t, t+\delta]$ で連続であり, $(t, t+\delta)$ で微分可能である
ようにできる。$\delta > h > 0$ である h に対し, $\tilde{f}$ の区間 $[t, t+h]$ での
平均値の定理から

$$f(t+h) - f(t+0) = \tilde{f}(t+h) - \tilde{f}(t) = h\tilde{f}'(c) = hf'(c)$$

をみたす c $(t < c < t+h)$ が存在する。よって

$$\frac{f(t+h)-f(t+0)}{h} = f'(c) \qquad\qquad (t < c < t+h)$$

が成り立つ。f は区分的になめらかであるから $h \to 0 \quad (h>0)$ とすると

$c \to t+0, \quad f'(c) \to f'(t+0)$ より

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t+h)-f(t+0)}{h} = f'(t+0)$$

が成り立つ。

②の証明も同様である。

< フーリエ級数の収束 >

$f(t)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

とおく。ここで

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \;,\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \;,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

である。

[定理]

> $f(t)$ が区分的に滑らかであれば, 全ての点 $t \in [-\pi,\pi]$ に対して
>
> $$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$
>
> が成立する。

(証明は P.24,P.25)

例　$f(t)$ が P.9 の例の場合,$-\pi \leqq t < \pi$ では $f(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \leqq t < \pi \\ 0 & : \quad -\pi \leqq t < \pi \end{cases}$ である。

$$(*) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\sin t + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \cdots + \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1} + \cdots\right\} = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

が成立する。

① $t=0$ のとき $(*)$ の左辺 $= \frac{1}{2}$。また $f(0-0)=0$ ， $f(0+0)=1$ より

$(*)$ の右辺 $= \frac{1}{2}\{0+1\} = \frac{1}{2}$ である。

② $t = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots\right\}$$

となる。この式が $(*)$ の右辺 $= \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right\} = \frac{1}{2}\{1+1\} = 1$ に等しいから

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots\right\} = 1$$

となる。この式より等式

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

が成立する。この式の左辺をライプニッツ (Leibniz) の級数という。

< 一般周期のフーリエ級数 >

正数 $L\ (>0)$ と自然数 $n\ (\geqq 1)$ および定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ に対し,

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) \right\}$$

とおくと, $S(t+L) = S(t)$ が成り立つ。すなわち $S(t)$ は周期 L の周期関数である。このとき

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(t)dt = a_0 \quad , \quad \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt = a_k \quad , \quad \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(t)\sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt = b_k$$

が成り立つ。

上の結果より, 一般の周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) \right\}$$

$$\left(a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt \right)$$

と表わされる。

前ページの定理と同様にして, 次の定理が成り立つ。

[定理]

> 周期 L の周期関数 $f(t)$ が区分的に滑らかであればフーリエ級数は $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ の各点で収束し,
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left[a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{L}t\right) \right\} \right] = \frac{1}{2}\left\{ f(t-0) + f(t+0) \right\}$$
>
> が全ての $t \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ で成立する。

(証明は P.24, P.25)

(注) $f(t)$ が $t=\tau$ で連続であれば, $f(\tau-0) = f(\tau+0) = f(\tau)$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left[a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}\tau\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{L}\tau\right) \right\} \right] = f(\tau)$$

が成立する。

< 複素数値関数 >

まず複素数の計算を復習する。

複素数 $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$, x と y は実数) に対し $\overline{z} = x - iy$ を z の共役な複素数, $\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値という。次式が成り立つ。ただし K は実数とする。

$$\boxed{① \quad z\overline{z} = \mid z \mid^2 \qquad ② \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad ③ \quad \overline{Kz} = K\overline{z} \qquad ④ \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}}$$

(証明) ①, ②, ③は明らか。④を示す。$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ $(x_1, y_1, x_2, y_2$ は実数)

とすると $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2)$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2)$ より等しい。 (証明終)

実数変数 t の複素数値関数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ $(x(t), y(t)$ は実数値関数) に対し

$$\frac{d}{dt}z(t) = \lim_{h \to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \frac{d}{dt}x(t) + i\frac{d}{dt}y(t)$$

$$\frac{d}{dt}Z(t) = z(t) \text{ のとき } \int_a^b z(t)dt = [Z(t)]_a^b = Z(b) - Z(a)$$

と定めると

$$\int_a^b (x(t) + iy(t))dt = \int_a^b x(t)dt + i\int_a^b y(t)dt$$

より $\boxed{\overline{\int_a^b z(t)dt} = \int_a^b \overline{z(t)}dt}$ が成り立つ。また実数 x, y に対し

オイラーの公式 $\boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$ より次式が従う。

$$\boxed{⑤ \quad \frac{d}{dt}e^{(x+iy)t} = (x+iy)e^{(x+iy)t} \quad , \quad ⑥ \quad \int_a^b e^{(x+iy)t}dt = \left[\frac{1}{x+iy}e^{(x+iy)t}\right]_a^b}$$

(ただし x, y は実数である。)

(証明) ⑤のみ証明する。

$$\frac{d}{dt}e^{(x+iy)t} = \frac{d}{dt}e^{xt}\cos(yt) + i\frac{d}{dt}e^{xt}\sin(yt)$$

$$= xe^{xt}\cos(yt) - ye^{xt}\sin(yt) + i\left\{xe^{xt}\sin(yt) + ye^{xt}\cos(yt)\right\}$$

$$= (x+iy)e^{xt}\cos(yt) + (-y+ix)e^{xt}\sin(yt) = e^{xt}\left\{(x+iy)\cos(yt) + i(x+iy)\sin(yt)\right\}$$

$$= (x+iy)e^{xt}\left\{\cos(yt) + i\sin(yt)\right\} = (x+iy)e^{xt} \cdot e^{iyt} = (x+iy)e^{(x+iy)t} \qquad \text{(証明終)}$$

< フーリエ級数の複素数表示 1 >

周期 $L\ (>0)$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\}$$

とおく。ここで $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

である。オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (i = \sqrt{-1}\ \text{は虚数単位}\ ,\ \theta\ \text{は実数})$$

より $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad , \quad \sin\theta = \frac{i}{2}\left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)$$

と表わされる。この式を $S_n(t)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} S_n(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k i}{2}\left(e^{-ik\omega t} - e^{ik\omega t}\right) \right\} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}i\right) e^{ik\omega t} + \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}i\right) e^{-ik\omega t} \right\} \end{aligned}$$

とある。ここで

$$c_0 = a_0 \quad , \quad c_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}i \quad , \quad c_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}i \qquad (1 \leqq k \leqq n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} S_n(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t} \right\} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t} \end{aligned}$$

と表わされる。

< フーリエ級数の複素数表示 2 >

前ページの c_k ，c_{-k} は

$$c_k = \frac{1}{2}\{a_k - b_k i\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt - \frac{2i}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\{\cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t)\}\,dt = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt \quad ,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}\{a_k + b_k i\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt + \frac{2i}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\{\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)\}\,dt = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{ik\omega t}dt$$

で，$c_0 = a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt$ だから，$S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}$ の係数 c_k は

$$\boxed{c_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

と表わされる。よって周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$\boxed{f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}}$$

$\left(\omega = \dfrac{2\pi}{L}\right)$ と表わされる。$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ を $f(t)$ の**フーリエ級数の複素数表示**
(または**複素フーリエ級数**) という。

(注)　c_k と $e^{ik\omega t}$ は共に複素数であるが,

$$c_k e^{ik\omega t} + c_{-k}e^{-ik\omega t} = a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)$$

は実数である。

< ディリクレ核 >

正数 L に対し $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ とおく。整数 k に対し, 次式が成り立つ。

① $$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t}dt = \begin{cases} 1 & : \quad k=0 \\ 0 & : \quad k\neq 0 \end{cases}}$$

(証明) $k=0$ のときは明らか。$k\neq 0$ のとき　$\omega t = u$ とおくと

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}du = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ik}e^{iku}\right]_{u=-\pi}^{u=\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi ik}\left\{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi ik}\left\{\cos(k\pi) + i\sin(k\pi) - \cos(-k\pi) - i\sin(-k\pi)\right\} = 0 \qquad \text{(証明終)}$$

自然数 n に対し $D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t}$ を**ディリクレ核**という。

次式が成り立つ。

② $D_n(-t) = D_n(t)$ ③ $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} D_n(t)dt = 1$ ④ $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{0} D_n(t)dt = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{0}^{\frac{L}{2}} D_n(t)dt = \dfrac{1}{2}$
⑤ $D_n(t+L) = D_n(t)$ ⑥ $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)}$

(証明)　②は明らか。③は上記①よりわかる。④は②より偶関数であるから

$\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{0} D_n(t)dt = \int_{0}^{\frac{L}{2}} D_n(t)dt$ となることと③の結果よりわかる。⑤は

$e^{ik\omega(t+L)} = e^{ik\omega t + 2\pi ki} = e^{ik\omega t}(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)) = e^{ik\omega t}$ よりわかる。

⑥を示す。等比数列の和の公式から

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n}\left(e^{i\omega t}\right)^k = \left(e^{i\omega t}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{i\omega t}\right)^k = e^{-in\omega t}\times\frac{1-\left(e^{i\omega t}\right)^{2n+1}}{1-e^{i\omega t}}$$

$$= \frac{e^{-in\omega t} - e^{i(n+1)\omega t}}{1-e^{i\omega t}} = \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t}}{e^{-\frac{i\omega t}{2}} - e^{\frac{i\omega t}{2}}}$$

$$= \frac{-2i\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{-2i\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)} \qquad \text{(証明終)}$$

< ベッセルの不等式 >

周期 $L\ (>0)$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和は

$$S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik\omega t}\qquad \left(\omega=\frac{2\pi}{L}\ \ ,\ \ c_k=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)e^{-ik\omega t}dt\right)$$

と表わされる。関数 $f(t)$ は $\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}|\,f(t)\,|^2\,dt<\infty$ であるとする。(これを $f(t)$ は $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ で **2 乗可積分**であるという。) このとき次式が成り立つ。

$$(*)\qquad \boxed{\sum_{k=-n}^{n}|\,c_k\,|^2\ \leqq\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}|\,f(t)\,|^2\,dt}\qquad (n\geqq 1)$$

(証明)　整数 k,ℓ に対し $\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}e^{i(k-\ell)\omega t}dt=\begin{cases}1 & : & k=\ell\\ 0 & : & k\neq\ell\end{cases}$ である。よって

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}|\,S_n(t)\,|^2\,dt=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik\omega t}\right)\left(\overline{\sum_{\ell=-n}^{n}c_\ell e^{i\ell\omega t}}\right)dt$$

$$=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n}\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(c_k e^{ik\omega t}\right)\left(\overline{c_\ell}e^{-i\ell\omega t}\right)dt=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n}c_k\overline{c_\ell}\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}e^{i(k-\ell)\omega t}dt$$

$=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}c_k\cdot\overline{c_k}=\sum_{k=-n}^{n}|\,c_k\,|^2$ である。また $c_k=\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)e^{-ik\omega t}dt$ に対し

$\overline{c_k}=\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\overline{f(t)e^{-ik\omega t}}dt=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)e^{ik\omega t}dt$　　$(\overline{f(t)}=f(t)$ は実数) だから

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}S_n(t)f(t)dt=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}c_k e^{ik\omega t}f(t)dt=\sum_{k=-n}^{n}c_k\times\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)e^{ik\omega t}dt$$

$=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}c_k\times\overline{c_k}=\sum_{k=-n}^{n}|\,c_k\,|^2$ である。同様にして

$\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\overline{S_n(t)}f(t)dt=\sum_{k=-n}^{n}\overline{c_k}\times\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)e^{-ik\omega t}dt=\sum_{k=-n}^{n}\overline{c_k}\times c_k=\sum_{k=-n}^{n}|\,c_k\,|^2$ である。

この結果から

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}|\,S_n(t)-f(t)\,|^2\,dt=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}(S_n(t)-f(t))\left(\overline{S_n(t)-f(t)}\right)dt$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(|\,S_n\,|^2-S_n(t)f(t)-\overline{S_n}(t)f(t)+|\,f(t)\,|^2\right)dt$$

$=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}|\,c_k\,|^2\,dt-\sum_{k=-n}^{n}|\,c_k\,|^2-\sum_{k=-n}^{n}|\,c_k\,|^2+\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}|\,f(t)\,|^2\,dt$ である。従って

$\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}|\,f(t)\,|^2\,dt-\sum_{k=-n}^{n}|\,c_k\,|^2=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}|\,S_n(t)-f(t)\,|^2\,dt\geqq 0$ より

不等式 $(*)$ が得られる。　(証明終)

不等式 $(*)$ をベッセルの不等式という。

< リーマン・ルベーグの補題 >

$f(t)$ を区間 $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ で 2 乗可積分 $\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty\right)$ とする。

$f(t)$ の複素フーリエ係数 $c_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt \quad \left(\omega = \dfrac{2\pi}{L}\right)$ と実フーリエ係数

$a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt, \quad a_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt, \quad b_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt$ の間には

$c_0 = a_0, \quad c_k = \dfrac{a_k}{2} - \dfrac{b_k}{2}i, \quad c_{-k} = \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{b_k}{2}i \quad (1 \leqq k \leqq n)$ という関係があった。

この関係から $|c_0| = |a_0|, \quad |c_k|^2 = \dfrac{1}{4}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$ より前ページの不等式は

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^2 + |b_k|^2) \leqq \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt \quad (n \geqq 1)$$

と表わされる。 ここで n は任意の自然数であるから、$n \longrightarrow \infty$ の極限をとると
左辺は単調増大数列で収束するので

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |a_o|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) \ \leqq \ \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt}$$

が成り立つ。この不等式を**ベッセルの不等式**という。このとき次式が成り立つ。

$$\boxed{① \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \qquad\qquad ② \lim_{n\to\infty} |b_n| = 0}$$

（証明） ①を背理法で示す。

もし①が成り立たないと仮定すると、ある正定数 $\varepsilon (> 0)$
とある自然数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $|a_{n_k}| \geqq \varepsilon$ が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \ \geqq \ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|^2 \ \geqq \ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^2 = +\infty$$

これはベッセルの不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqq 2\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty$ に反する。

従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ でなければならない。②も同様である。（証明終）

$\dfrac{L}{2}a_n = \displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt, \quad \dfrac{L}{2}b_n = \displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$ だから

上記の①, ②より、次式が従う。

$f(t)$ が $\left[-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right]$ で 2 乗可積分であれば
① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt = 0, \qquad$ ② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt = 0$

この結果をリーマン・ルベーグの補題という。

< フーリエ級数の収束定理の証明１ >

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の収束定理は複素フーリエ級数を使うと次のようになる。

[定理]

> 周期 L の周期関数 $f(t)$ が区分的に滑らかであれば
>
> $$\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$
>
> がすべての実数 t で成り立つ。

[証明]

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{L}\right)$$

をディリクレ核とすると $S_n(t)$ は

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-n}^{n}\left\{\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s)e^{-ik\omega s}ds\right\}e^{ik\omega t} \\
&= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s)\left\{\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(t-s)}\right\}ds = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s)D_n(t-s)ds \\
&= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s)D_n(s-t)ds = \frac{1}{L}\int_{-t-\frac{L}{2}}^{-t+\frac{L}{2}} f(u+t)D_n(u)du
\end{aligned}$$

と表わされる。ここで $f(u+t)D_n(u)$ は周期 L の (u の) 関数であるから <u>P.1</u> より

$$S_n(t) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(u+t)D_n(u)du$$

と表わされる。ここで

$$\begin{aligned}
I_n &= S_n(t) - \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\} \\
&= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(u+t)D_n(u)du - \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\} \\
II_n &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0} f(u+t)D_n(u)du - \frac{1}{2}f(t-0) \\
III_n &= \frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}} f(u+t)D_n(u)du - \frac{1}{2}f(t+0)
\end{aligned}$$

とおく。

＜ フーリエ級数の収束定理の証明 2 ＞

ディリクレ核の性質 $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{0} D_n(t)dt = \dfrac{1}{2},\quad D_n(-t) = D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)}$ より

$$
\begin{aligned}
II_n &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0} f(u+t)D_n(u)du - \frac{1}{2}f(t-0) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0}\{f(u+t)-f(t-0)\}D_n(u)du \\
&= \frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}}\{f(t-s)-f(t-0)\}D_n(s)ds = \frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}}\{f(t-s)-f(t-0)\}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega s\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)}ds \\
&= \frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}}\left\{\frac{f(t-s)-f(t-0)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)}\right\}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega s\right)ds
\end{aligned}
$$

と表わされる。ここで

$$
F(s) = \begin{cases} \dfrac{f(t-s)-f(t-0)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)} & : \ 0 < s \leqq \frac{L}{2} \\ 0 & : \ s = 0 \end{cases}
$$

とおく。$f(t)$ は区分的に滑らかであるから

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} F(s) &= \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} \frac{f(t-s)-f(t-0)}{s}\times\frac{\frac{\omega}{2}s}{\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)}\times\frac{2}{\omega} \\
&= -f'(t-0)\times\frac{2}{\omega} = -\frac{L}{\pi}f'(t-0)
\end{aligned}
$$

より、$F(s)$ は $\left[0, \dfrac{L}{2}\right]$ で区分的に連続である。また

$$
f_1(s) = \begin{cases} F(s)\cos\left(\frac{\omega}{2}s\right) & : \ 0 \leqq s \leqq \frac{L}{2} \\ 0 & : \ -\frac{L}{2} \leqq s < 0 \end{cases}
\qquad
f_2(s) = \begin{cases} F(s)\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right) & : \ 0 \leqq s \leqq \frac{L}{2} \\ 0 & : \ -\frac{L}{2} \leqq s < 0 \end{cases}
$$

とおくと、$f_1(s), f_2(s)$ は共に $\left[-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right]$ で区分的に連続であるから、$\left[-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right]$ で 2 乗可積分である。
$f_1(s)$ と $f_2(s)$ に対するリーマン・ルベーグの補題より

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} II_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}} F(s)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega s\right)ds \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{L}\left\{\int_{0}^{\frac{L}{2}} F_(s)\cos\left(\frac{\omega}{2}s\right)\sin(n\omega s)ds + \int_{0}^{\frac{L}{2}} F_(s)\sin\left(\frac{\omega}{2}s\right)\cos(n\omega s)ds\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{L}\left\{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f_1(s)\sin(n\omega s)ds + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f_2(s)\cos(n\omega s)ds\right\} = 0
\end{aligned}
$$

同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} III_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}} f(t+u)D_n(u)du - \frac{1}{2}f(t+0) = 0$ も示される。
よって
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{S_n(t) - \frac{1}{2}\Big(f(t-0)+f(t+0)\Big)\right\} = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}(II_n + III_n) = 0$ （証明終）

< フーリエ級数の練習 >

問 1　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が次の場合に，$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。

(1) $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : \ 0 \leqq t < \pi \\ 0 & : \ -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$

(2) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ \dfrac{\pi}{2} \leqq t < \pi \\ \frac{\pi}{2} & : \ 0 \leqq t < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & : \ -\frac{\pi}{2} \leqq t < 0 \\ 0 & : \ -\pi \leqq t < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

(3) $f(t) = |t| - \pi \quad (-\pi \leqq t < \pi)$

(4) $f(t) = \dfrac{1}{2}t^2 \quad (-\pi \leqq t < \pi)$

問 2　問 1(3) の結果を利用して，次式を示せ。

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

問 3　問 1(2) の結果を利用して，次式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

問 4　問 1(4) の結果を利用して，次式を示せ。

① $$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots$$

② $$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

問 5　周期 $L(>0)$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の複素数表示は

$$f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \quad , \qquad C_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt$$

である。(ただし $\omega = \frac{2\pi}{L}$)　この式から $f(t)$ のフーリエ級数の実数表示を導け。

問 6　自然数 n と正数 $t(>0)$ に対し、次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}$$

＜ 極限 ＞

$x \to +\infty,\ x \to -\infty$ のときの極限を復習する。

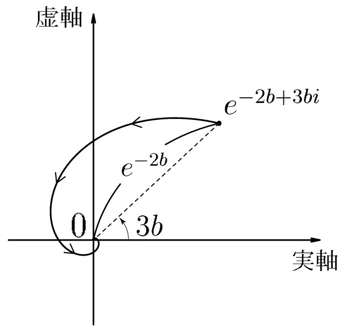
① $0 < r < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} r^x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^y = +\infty$

② $r > 1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r^x = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} r^x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^y = 0$

例 1 $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-2b} = 0$, $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} e^{-2a} = +\infty$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0$ (ロピタルの定理 (P78) より)

例 3 $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{(-2+3i)b} = \lim_{b\to+\infty} e^{-2b} \times \{\cos(3b) + i\sin(3b)\}$



ここで $|\cos(3b) + i\sin(3b)| = 1$ より

$$\lim_{b\to+\infty}\left|e^{(-2+3i)b}\right| = \lim_{b\to+\infty}\left|e^{-2b}\right| \cdot |\cos(3b) + i\sin(3b)|$$
$$= \lim_{b\to+\infty} e^{-2b} = 0$$

よって $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{(-2+3i)b} = 0$

(注) 例 3 の収束は複素平面上の点が原点 0 に近づくことを意味する。

問 次の極限値を求めよ。ここで $\alpha,\ \beta > 0$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-\alpha b}$

(2) $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\beta b}$

(3) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} e^{\beta a}$

(4) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\beta a}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$

(7) $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-(2+3i)b}$

(8) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)a}$

< 広義積分 1 >

積分範囲が無限区間である定積分を次式で定め，**広義の定積分**または**広義積分**という。

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)dt \quad , \qquad \int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt$$

例 1 $\displaystyle \int_0^{\infty} te^{-2t}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-2t}dt = \lim_{b\to+\infty}\left\{\left[t\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\right]_0^b - \int_0^b \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)dt\right\}$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{b}{2e^{2b}} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^b\right\} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{4e^{2b}} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

例 2 $\displaystyle \int_{-\infty}^{0} e^{(2+3i)t}dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{(2+3i)t}dt = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}\right]_a^0$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left\{\frac{1}{2+3i} - \frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)a}\right\} = \frac{1}{2+3i}$$

問 次の値を求めよ。ただし $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ i = \sqrt{-1}$ とする。

(1) $\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt$

(2) $\displaystyle \int_{-\infty}^{0} e^{\beta t}dt$

(3) $\displaystyle \int_0^{\infty} te^{-t}dt$

(4) $\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-(2+3i)t}dt$

(5) $\displaystyle \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha+\beta i)t}dt$

＜ 広義積分 2 ＞

定理　定数 α, β に対し、次式が成り立つ。ただし $\alpha > 0$。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\ \frac{\sin(\beta t)}{t}dt = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

＜ 証明の概略 ＞

(1) $\displaystyle I = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt$ とおくと部分積分法より

$$I = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\beta\sin(\beta t)dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin(\beta t)dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\left\{\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\beta}\beta\cos(\beta t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt = \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 I$$

であるから

$$I = \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

(2) $\displaystyle f_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\ \frac{\sin(xt)}{t}dt$ とおいて x で微分すると

$$\frac{d}{dx}f_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\frac{d}{dx}\sin(xt)}{t}dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(xt)dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$$

よって $f_\alpha(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) + C$ (C は定数)。　ここで $x=0$ のとき

$\displaystyle f_\alpha(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{0}{t}dt = 0$　より　$C=0$　よって　$f_\alpha(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$

従って $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin(\beta t)}{t}dt = f_\alpha(\beta) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{\alpha\to+0}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{\alpha\to+0}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$

< 広義積分 3 >

定理　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

＜証明＞

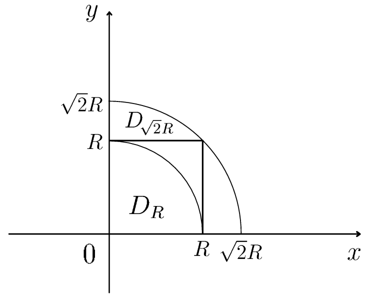
$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy\right)$$

$$D_R = \{(x,\ y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq R^2\}$$

とおくと

$$D_R \subset \{(x,\ y)\ :\ 0 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq R\} \subset D_{\sqrt{2}R}$$

より



$$(※)\quad \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqq \int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy \leqq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

である。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変数変換すると $\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = r$ より

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{2}\times\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

である。（※）より

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leqq \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \leqq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

ここで $R\to\infty$ とすると

$$\frac{\pi}{4} \leqq \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 \leqq \frac{\pi}{4}$$

より $\displaystyle\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ となる。（証明終）

(注)　多項式（整式）, 分数関数, べき関数, 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数, 双曲線関数,

逆双曲線関数およびそれらの関数を組み合わせて得られる関数を **初等関数** という。

不定積分 $\displaystyle\int e^{-x^2}dx$ や $\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}dx$ は初等関数では表されないことがわかっている。

しかし不定積分がわからなくても，定積分が求まることがある。

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}\ ,\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

はその代表的な例であり，その結果は良く知られている。

＜ 広義積分の近似 ＞

$f(x) \geqq 0$ のとき $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ は図 1 の斜線部分の面積を意味する。これを図 2 のように底辺が Δx の長方形の面積の和で近似する。すなわち

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \fallingdotseq f(0)\Delta x + f(1\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + \cdots$$

$$\cdots + f(k\Delta x)\Delta x + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x$$

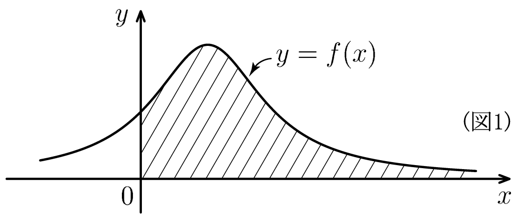
ここで底辺の幅 Δx を小さくすれば，図 3 , 4 のように図 1 の面積 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ に近づく。

このようにして，次式が成り立つ。

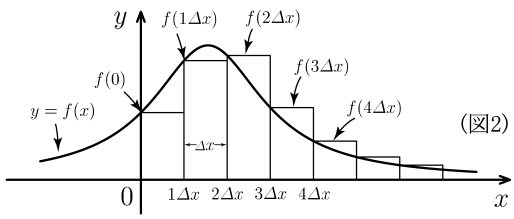
$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^{\infty} f(x)dx}$$

同様にして次式が成立する。

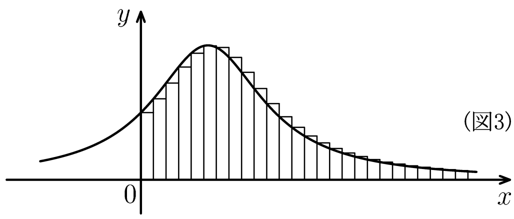
$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}$$



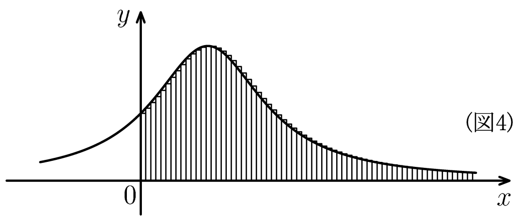
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

例

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k\Delta x} \sin(\alpha k\Delta x)\Delta x = \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \sin(\alpha x)dx$

(2) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\beta(k\Delta x)^2} k(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} xdx$

(3) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)e^{itk\Delta x}\Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx$

(注) このような問題は $k\Delta x \to x$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \boxed{\quad\quad} \Delta x \to \int_0^{\infty} \boxed{\quad\quad} dx$, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{\quad\quad} \Delta x \to \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\quad\quad} dx$

とおきかえればよい。

問 次の極限を広義積分で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha k\Delta x)\Delta x}{1 + (k\Delta x)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\Delta x)e^{ik\Delta xt}\Delta x$

< フーリエ変換の導出 >

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$\boxed{f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}} \quad \text{(フーリエ級数)}$$

であった。ここで

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{L} \quad , \quad C_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt} \quad \text{(フーリエ係数)}$$

である。

$f(t)$ が周期関数でないときは，$f(t)$ をフーリエ級数では表現できない。そのときは

周期 L が無限大 $(=\infty)$ の関数と考え，$L \to \infty$ の極限を考える。

$$F_L(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ixt}dt \quad , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

とおくと $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ より

$$C_k = \frac{1}{L}F_L(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}F_L(k\omega)$$

である。ここで $\omega = \Delta x$ とおくと $L \to \infty$ のとき $\Delta x \to 0$ であり，$F_L(x) \to F(x)$

であるから，前ページより

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi}F_L(k\omega)e^{ik\omega t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F_L(k\Delta x)e^{ik\Delta xt}\Delta x \ \longrightarrow \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F(x)e^{ixt}dx$$

と考えられる。従って

$$\boxed{f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \quad , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt}$$

が得られる。$F(x)$ を $f(t)$ のフーリエ変換という。

< フーリエ変換の定義 >

前ページの結果より

$$(*) \qquad f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \ , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

が得られた。$F(x)$ を $f(t)$ の**フーリエ変換**という。また $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$ を**フーリエ逆変換**という。

フーリエ変換にはいろいろな定義式があるが，このワークブックでは $(*)$ 式を用いることにする。

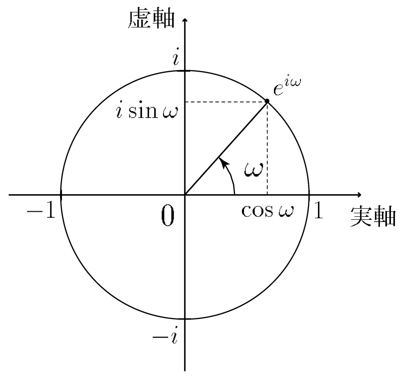
(注 1) 信号処理や通信理論の本では $(*)$ 式の変数 x を ω で表す場合が多い。$(*)$ 式のかわりに

$$(*)' \qquad f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \ , \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

を用いる。t が時間を表す変数の場合に，ω を**角周波数**という。t の単位が秒であれば，関数

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

は複素平面上の単位円を 1 秒間に角度 ω だけ回転する。



(注 2) フーリエ変換の別の定義式を紹介しておく。$(*)'$ 式において

$$\ell = \frac{\omega}{2\pi} \ , \quad \mathcal{F}(\ell) = F(2\pi\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt$$

とおくと $\omega = 2\pi\ell$，$d\omega = 2\pi d\ell$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi\ell)e^{i2\pi\ell t}2\pi d\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell$$

となるので，$(*)'$ は

$$(**) \qquad f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell \ , \quad \mathcal{F}(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt$$

と書きなおせる。$(**)$ もフーリエ変換の定義式としてよく使われる。t が時間を示す変数のとき，ℓ を**周波数**という。関数 $e^{i2\pi\ell t}$

$$e^{i2\pi\ell t} = \cos(2\pi\ell t) + i\sin(2\pi\ell t)$$

の実部 $\cos(2\pi\ell t)$ と虚部 $\sin(2\pi\ell t)$ は基本周期が $\dfrac{1}{\ell}$ である。t の単位が秒であれば，1 秒間に基本波形が ℓ 回現れる。

< フーリエ変換 1 >

$f(t)$ のフーリエ変換 $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$ を

$$\boxed{\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt} \qquad (f(t) \text{ のフーリエ変換})$$

と書くことにする。

例　オイラーの公式より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

であるから、$f(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{\cos(xt) - i\sin(xt)\} dt$$

と書きなおせる。

今 $f(t)$ が偶関数であれば $f(t)\cos(xt)$ も偶関数であり、$f(t)\sin(xt)$ は奇関数であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt) dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(xt) dt \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt) dt = 0$$

となる。従ってこのときのフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f(t)] = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(xt) dt \quad \cdots \quad \text{偶関数のフーリエ変換}$$

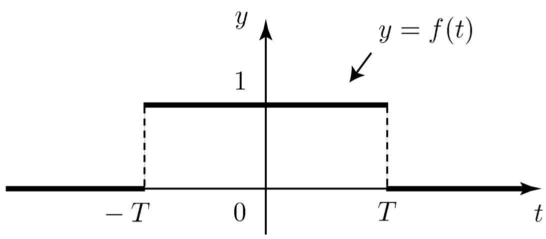
となる。

問 1　$f(t)$ が奇関数のとき、フーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を例のように簡単にせよ。

問 2　定数 $T > 0$ に対し、

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : |t| \leqq T \\ 0 & : |t| > T \end{cases}$$

とする。このとき $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。



< フーリエ変換 2 >

問 1 正定数 $T(>0)$ に対し

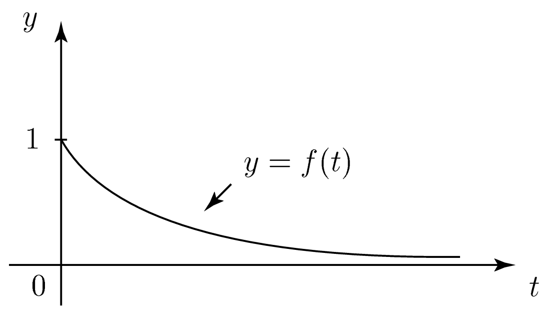
$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

とする。このとき $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。

例 正定数 $\alpha(>0)$ に対し

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t < 0 \end{cases}$$

のとき、$f(t)$ のフーリエ変換は



$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-ixt}dt$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-(\alpha+ix)t}dt = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{-(\alpha+ix)}e^{-(\alpha+ix)t}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{1}{\alpha+ix}e^{-(\alpha+ix)b} + \frac{1}{\alpha+ix}\right\}$$

ここで $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-(\alpha+ix)b} = \lim_{b\to+\infty} e^{-\alpha b}\times e^{-ixb}$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\alpha b}}(\cos(xb) - i\sin(xb)) = 0$$

より $\displaystyle\mathscr{F}[f(t)] = \frac{1}{\alpha+ix}$

問 2 正定数 $\alpha > 0$ に対し $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ t > 0 \\ e^{\alpha t} & : \ t \leqq 0 \end{cases}$ のときフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。

< フーリエ変換 3 >

問 1　$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & : |t| \leqq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases}$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。

例　$\mathscr{F}[e^{-|t|}] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-ixt}dt = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b e^{-|t|}e^{-ixt}dt$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \int_a^0 e^t e^{-ixt}dt + \int_0^b e^{-t}e^{-ixt}dt \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \left[\frac{1}{1-ix} e^{(1-ix)t} \right]_{t=a}^{t=0} + \left[\frac{1}{-(1+ix)} e^{-(1+ix)t} \right]_{t=0}^{t=b} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \frac{1}{1-ix} - \frac{1}{1-ix}e^{(1-ix)a} - \frac{1}{1+ix}e^{-(1+ix)b} + \frac{1}{1+ix} \right\}$$

ここで

$$\lim_{b\to+\infty} e^{-(1+ix)b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b}\left(\cos(xb) - i\sin(xb)\right) = 0$$

$$\lim_{a\to-\infty} e^{(1-ix)a} = \lim_{a\to-\infty} e^a\left(\cos(xa) - i\sin(xa)\right) = 0$$

より

$$\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right] = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}$$

問 2　正定数 $\alpha > 0$ に対して $\mathscr{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right]$ を求めよ。

< 絶対可積分関数 >

定義域が $-\infty < t < \infty$ である関数が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ であるとき、

$f(t)$ は <u>**絶対可積分**</u> であるという。

<u>定理</u>　$f(t)$ が絶対可積分であれば次式が成り立つ。

(1)　$\displaystyle\lim_{T\to\infty}\int_T^{\infty} |f(t)|dt = 0$　　　$\displaystyle\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{-T} |f(t)|dt = 0$

(2)　$\displaystyle\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = F(x)$ は有界で一様連続

(3)　$f(t)$ が有界ならば

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = 0$$

(注)　ルベーグ積分の理論を使うと (3) の有界条件は不要になる。

(3) 式もリーマン・ルベーグの補題という。

［(3) の証明］

(1) より任意の正数 $\epsilon > 0$ に対し、十分大きい $T > 0$ をとると

$$\int_T^{\infty} |f(t)|dt + \int_{-\infty}^{-T} |f(t)|dt < \epsilon$$

となる。$f(t)$ は有界だから $[-T, T]$ で 2 乗可積分である。<u>P.23</u> のリーマン・ルベーグの補題

から十分大きい x をとると

$$\left|\int_{-T}^{T} f(t)\cos(xt)dt\right| < \epsilon, \qquad \left|\int_{-T}^{T} f(t)\sin(xt)dt\right| < \epsilon$$

となるので　$\displaystyle\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt\right| \leqq \int_{-\infty}^{-T} |f(t)|dt + \left|\int_{-T}^{T} f(t)\cos(xt)dt\right| + \int_T^{\infty} |f(t)|dt < 2\epsilon$

より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = 0$ が得られる。同様にして $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = 0$

が得られる。$\cos(-xt) = \cos(xt)$　　$\sin(-xt) = -\sin(xt)$ より

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = 0$$

(証明終)

< 急減少関数 1 >

実数全体 ($\mathbb{R}$) で定義された実数値関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が何回でも微分可能であり、任意の非負整数 $m,n(\geqq 0)$ に対し、

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|t|^m\times|f^{(n)}(t)|<\infty \qquad \left(f^{(n)}(t)=\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right)$$

が成立するとき、$f=f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の **急減少関数** という。$\mathbb{R}$ 上の急減少関数の全体を $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ で表し、**Schwartz 空間** という。

例　$f(t)=e^{-t^2}$ は急減少関数である。

なぜなら、任意の非負整数 m に対し、ロピタルの定理から

$$\lim_{|t|\to\infty}|t|^m e^{-t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^m}{e^{t^2}}=0$$

がわかるので $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|t|^m e^{-t^2}<\infty$ がわかる。また

$$f^{(n)}(t)=\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}=(t\text{ の }n\text{ 次式})\times e^{-t^2}$$

より　$t^m f^{(n)}(t)=(t$ の $n+m$ 次式$)\times e^{-t^2}$ だから有界であることが

わかる。次の補題が成り立つ。

補題 1　$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ とすると、全ての自然数 r に対し

$$t^r f(t)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}), \qquad f^{(r)}(t)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$$

補題 2　$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ならば f は絶対可積分 $\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty\right)$ である。

補題 3　$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ のとき、任意の自然数 m に対して、

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\mathscr{F}[f](x)\right)=(-i)^m\mathscr{F}[t^m f(t)](x)$$ が成り立つ。

(略証)　$m=1$ のとき

$$\frac{d}{dx}\mathscr{F}[f(t)](x)=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(\frac{d}{dx}e^{-ixt}\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(-it)e^{-ixt}dt$$

$$=-i\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)e^{-ixt}dt=-i\mathscr{F}[tf(t)](x)$$

2 以上の m についてはこれをくり返す。

< 急減少関数２ >

<u>補題 4</u>　$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ と自然数 m に対し、次式が成り立つ。

$$\mathscr{F}\left[\frac{d^m}{dt^m}f(t)\right](x) = (ix)^m \mathscr{F}[f(t)](x)$$

（略証）$m = 1$ のとき、

$$\mathscr{F}[f'(t)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-ixt}dt = \left[f(t)e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{d}{dt}e^{-ixt}\right)dt$$

$$= 0 - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-ix)e^{-ixt}dt = ix\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = ix\mathscr{F}[f(t)](x)$$

2 以上の m に対しては、これをくり返せば良い。

［定理］$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ならば $\mathscr{F}[f(t)] \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

（証明）任意の非負整数 m,n に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^m \left|\frac{d^n}{dx^n}\mathscr{F}[f(t)](x)\right| < \infty$$

を示す。補題 3，4 より

$$(ix)^m \left(\frac{d^n}{dx^n}\mathscr{F}[f(t)](x)\right) = (ix)^m \times (-i)^n \mathscr{F}[t^n f(t)](x)$$

$$= (-i)^n \mathscr{F}\left[\frac{d^m}{dt^m}\{t^n f(t)\}\right](x) = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{d^m}{dt^m}t^n f(t)\right\}e^{-ixt}dt$$

$$= (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \left(\frac{d^k}{dt^k}t^n\right) \times f^{(m-k)}(t)\right\}e^{-ixt}dt$$

$$= (-i)^n \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \ \cdot C_n(k)\int_{-\infty}^{\infty} t^{n-k} \times f^{(m-k)}(t)e^{-ixt}dt$$

ここで $C_n(k) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1) & : \ k \leqq n \\ 0 & : \ k > n \end{cases}$ である。

補題 1.2 より、$t^{n-k}f^{(m-k)}(t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ で $t^{n-k}f^{(m-k)}(t)$ は絶対可積分だから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^m \left|\frac{d^n}{dx^n}\mathscr{F}[f(t)](x)\right| \leqq \sum_{k=0_m}^{m} C_k \ C_n(k)\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{n-k}|f^{(m-k)}(t)|dt < \infty \qquad \text{(証明終)}$$

< フーリエ変換 4 >

例　$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]$ を求めたい。$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}e^{-ixt}dt=F(x)$ とおく。

$$\frac{d}{dx}F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\left(\frac{d}{dx}e^{-ixt}\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}(-it)e^{-ixt}dt$$

$$=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(-2t)e^{-t^2}e^{-ixt}dt=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}e^{-t^2}\right)e^{-ixt}dt=\frac{i}{2}\mathscr{F}\left[\left(\frac{d}{dt}e^{-t^2}\right)\right]$$

ここで 39 ページ補題 4 より $\mathscr{F}\left[\left(\dfrac{d}{dt}e^{-t^2}\right)\right]=ix\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]$ だから

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{i}{2}\times ix\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=-\frac{x}{2}F(x)$$

となる。微分方程式 $\dfrac{d}{dx}F(x)=-\dfrac{x}{2}F(x)$ の解は

$$F(x)=Ce^{-\frac{x^2}{4}}\qquad\qquad (C\text{ は定数})$$

である。P.30 の結果より $\displaystyle\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であり，

$C=F(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}e^{0}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ より $C=\sqrt{\pi}$ 。

よって

$$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=F(x)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

問　正定数 α に対して $\mathscr{F}\left[e^{-\alpha t^2}\right]$ を求めよ。

< 合成積 >

$-\infty < t < \infty$ の範囲で定義されている 2 つの関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ に対して

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) f_2(u) du$$

を f_1 と f_2 の「**合成積**」(*convolution*) または「**たたみこみ**」という。

◎ $(f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t)$

[証明] $(f_1 * f_2)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) f_2(u) du$ 　　ここで $t - u = s$ とおくと

$$= \int_{\infty}^{-\infty} f_1(s) f_2(t-s)(-1) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-s) f_1(s) ds = (f_2 * f_1)(t)$$

定理 　$\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(x)$, $\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(x)$ のとき

$$\mathscr{F}[(f_1 * f_2)(t)] = F_1(x) F_2(x)$$

[証明]

$$\mathscr{F}[(f_1 * f_2)(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-ixt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) f_2(u) du \right\} e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) e^{-ixt} dt \right\} f_2(u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) e^{-ix(t-u)} dt \right\} f_2(u) e^{-ixu} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) e^{-ixs} ds \right\} f_2(u) e^{-ixu} du = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) f_2(u) e^{-ixu} du$$

$$= F_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-ixu} du = F_1(x) F_2(x)$$

(証明終)

[問] 　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ のとき $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) e^{-u^2} du$ のフーリエ変換を求めよ。

< フーリエ変換の対応表 >

$f(t)$　(元の関数)	$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$　(フーリエ変換)
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x)$
$f(\alpha t)$　$(\alpha \neq 0)$	$\dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$
$f(t-\alpha)$　(α は定数)	$e^{-i\alpha x} F(x)$
$e^{i\alpha t} f(t)$　(α は定数)	$F(x-\alpha)$
$f'(t)$　(f の導関数)	$ixF(x)$
$f^{(n)}(t)$　(f の n 階導関数)	$(ix)^n F(x)$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(u)du$	$\dfrac{1}{ix} F(x)$
$(-it)^n f(t)$	$F^{(n)}(x)$　($F(x)$ の n 階導関数)
$(f_1 * f_2)(t)$　(合成積)	$F_1(x)F_2(x)$　(積)
$f_1(t)f_2(t)$　(積)	$\dfrac{1}{2\pi}(F_1 * F_2)(x)$　$\left(\dfrac{1}{2\pi}\text{合成積}\right)$
$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ \lvert t\rvert \leqq T \\ 0 & : \ \lvert t\rvert > T \end{cases}$　$(T > 0)$	$\dfrac{2\sin(Tx)}{x}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}$　$(\alpha > 0)$	$\dfrac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$
$e^{-\alpha t^2}$　$(\alpha > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$
$\dfrac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}$　$(\alpha > 0)$	$2\pi e^{-\alpha\lvert x\rvert}$
$2\alpha \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(t-u)^2+\alpha^2} du$　$(\alpha > 0)$ (コーシー・ポアソン積分)	$2\pi e^{-\alpha\lvert x\rvert} F(x)$
$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-u)^2}{4\alpha}} f(u)du$　$(\alpha > 0)$ (ガウス・ワイエルシュトラス積分)	$e^{-\alpha x^2} F(x)$

(注)　コーシー・ポアソン積分は $f(t)$ と $\dfrac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}$ との合成積である。

ガウス・ワイエルシュトラス積分は $f(t)$ と $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ との合成積である。

< フーリエ逆変換 >

$f(t)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = F(x)$ に対し
フーリエ逆変換を

$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx} \qquad \text{(フーリエ逆変換)}$$

と書くことにする。

補題　次式が成り立つ。

(1) $$\int_0^{\infty} \frac{\sin(au)}{u}du = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : a > 0 \\ 0 & : a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & : a < 0 \end{cases}$$

(2) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ixa}dx = \frac{\sin na}{\pi a} \quad (a \neq 0)$$

[証明] (1) $a > 0$ のとき $au = s$ とおくと P29 の結果より

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(au)}{u}du = \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{\frac{s}{a}}\frac{1}{a}ds = \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s}ds = \frac{\pi}{2}$$

$a < 0$ のとき $au = -s$ とおくと

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(au)}{u}du = \int_0^{\infty} \frac{\sin(-s)}{-\frac{s}{a}}(-\frac{1}{a})ds = -\int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s}ds = -\frac{\pi}{2}$$

(2) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ixa}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ia}e^{ixa}\right]_{-n}^{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi ia}\{\cos(na) + i\sin(na) - \cos(-na) - i\sin(-na)\} = \frac{\sin(na)}{\pi a}$$

(定理)

> $f(t)$ が絶対可積分で任意有界区間で区分的に滑らかであれば
>
> $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ のとき
>
> $$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$
>
> が成り立つ

この定理を **反転公式** という。

< フーリエ逆変換の収束 >

前ページの定理を証明する。前ページの補題より

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu}du\right\}e^{ixt}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(\int_{-n}^{n} e^{ix(t-u)}dx\right)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\sin(n(t-u))}{\pi(t-u)}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds = \int_{0}^{\infty}\Big(\, f(t-s)+f(t+s)\,\Big)\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds$$

$$I_n = S_n(t) - \frac{1}{2}\{\, f(t-0)+f(t+0)\} = S_n(t) - \int_0^{\infty}\{f(t-0)+f(t+0)\}\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds$$

$$= \int_0^{\infty}\{f(t-s)+f(t+s)-f(t-0)-f(t+0)\}\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds = II_n + III_n$$ とおく。

ここで

$$II_n = \int_0^{\infty}\{f(t-s)-f(t-0)\}\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds,\quad III_n = \int_0^{\infty}\{f(t+s)-f(t+0)\}\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds$$ とする。

$F(s) = \dfrac{f(t+s)-f(t+0)}{\pi s}\quad (s>0)$ とおくと

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} F(s) = \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} \frac{f(t+s)-f(t+0)}{\pi s} = \frac{1}{\pi}f'(t+0)$$

より $F(s)$ は区間 $[0,1]$ で区分的に連続かつ有界である。また $\dfrac{f(t+s)}{\pi s}$ は区間 $[1,\infty)$ で有界であり

$\displaystyle\int_1^{\infty}\left|\frac{f(t+s)}{\pi s}\right|ds < \infty$ である。よってリーマン・ルベーグの補題 (P.37) より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 F(s)\sin(ns)ds = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{f(t+s)}{\pi s}\sin(ns)ds = 0\cdots ①$$

である。また

$$\int_1^{\infty} f(t+0)\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds = \int_n^{\infty} f(t+0)\frac{\sin u}{\pi\frac{u}{n}}\frac{1}{n}du = \frac{f(t+0)}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$$

で $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\int_n^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty} f(t+0)\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds = \lim_{n\to\infty}\frac{f(t+0)}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = 0\cdots ②$$

①②より

$$\lim_{n\to\infty} III_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\left\{\{f(t+s)-f(t+0)\}\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1 F(s)\sin(ns)ds + \int_1^{\infty}\frac{f(t+s)}{\pi s}\sin(ns)ds - \int_1^{\infty} f(t+0)\frac{\sin(ns)}{\pi s}ds\right\} = 0$$

同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} II_n = 0$ も示される。よって

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t) - \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\} = \lim_{n\to\infty}(II_n + III_n) = 0$$

（証明終）

< フーリエ逆変換の練習 >

$f(t)$ を絶体可積分で有界かつ任意有界区間で区分的になめらかな関数とする。
フーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ に対して、反転公式から

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

である。ここで $f(t)$ が連続関数のときは $f(t+0) = f(t-0) = f(t)$ であるから

反転公式は

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = f(t) \qquad (f(t)\text{ が連続のとき})$$

となる。

例 1 $f(t) = \left\{ \begin{array}{lll} e^{-t} & : & t > 0 \\ 0 & : & t \leqq 0 \end{array} \right\}$ は $t = 0$ のとき不連続, $t > 0$ または $t < 0$ の範囲では連続である。

$$\mathscr{F}[f(t)] = \frac{1}{1+ix}, \qquad \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+ix}\right] = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \left\{ \begin{array}{lll} e^{-t} & : & t > 0 \\ \frac{1}{2} & : & t = 0 \\ 0 & : & t < 0 \end{array} \right.$$

問 1 次のフーリエ逆変換を求めよ。(ただし $\alpha > 0$)

(1) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\right]$

(2) $\mathscr{F}^{-1}\left[\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\right]$

(3) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\sin(4x)}{x}\right]$

例 2 $\mathscr{F}^{-1}[F_1(x)] = f_1(t)$, $\mathscr{F}^{-1}[F_2(x)] = f_2(t)$ のとき $\mathscr{F}^{-1}[a_1F_1(x) + a_2F_2(x)] = a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$ より

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+1}\right] = \frac{1}{6}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{6}{x^2+9}\right] + \frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2}{x^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{6}e^{-3|t|} + \frac{1}{2}e^{-|t|}$$

問 2 次のフーリエ逆変換を求めよ。

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{3}{x^2+1} + e^{-x^2}\right]$$

< デルタ関数 >

　1929 年にイギリスの物理学者 P.Dirac は、量子力学を記述するには
次のような疑似関数 $\delta(t)$

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

が必要であると唱えた。そして Dirac は $\delta(t)$ に関する導関数等のさま
ざまな形式的な計算を行って、量子力学の研究を進めていった。

　1950 年、フランスの数学者 L.Schwartz は Dirac の $\delta(t)$ およびそれに関す
る計算の数学的な定義づけに成功した。定義の前にそのアイデアを紹介する。

　正数 $\varepsilon > 0$ に対し、関数 $f_\varepsilon(t)$ を

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & : |t| < \varepsilon \\ 0 & : |t| \geqq \varepsilon \end{cases}$$

とすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)dt = 1 \ \text{であり、} \ t \neq 0 \ \text{ならば} \ \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f_\varepsilon(t) = 0$$

だから、 $f_\varepsilon(t)$ は $\delta(t)$ を近似していると考えられる。そのように考え、形式的な
計算をしてみる。急減少関数 $\varphi(\in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ に対し、 $\psi(t) = \int \varphi(t)dt$ とおく。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)\varphi(t)dt = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(t)dt = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\frac{1}{2\varepsilon}\psi(t) \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{\psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)\}}{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(2\varepsilon)} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{2} = \varphi(0)$$

よって $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し、 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$ である。また部分積分の公式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\varphi(t)dt = \Big[\, \delta(t)\varphi(t) \,\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi'(t)dt = -\varphi'(0)$$

となる。このような形式的な計算を考慮に入れることによって、 δ を関数
としてではなく、むしろ δ を

$$\delta : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto \varphi(0)$$

をみたす写像（すなわち $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ ）とみなしたのである。そうすれば、 δ の
導関数 δ' も

$$\delta' : \varphi \longmapsto -\varphi'(0)$$

をみたす写像として得られる。そこで $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ の元 φ から $\mathbb{C}$ （複素数全体）への
写像としてデルタ関数等の超関数を定義した。

< 超関数 >

急減少関数 $\varphi(\in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ に対し、複素数の値を対応させる関数 T が線形性

$$T(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha T(\varphi)+\beta T(\psi) \quad (\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}),\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{C})$$

をみたすとき、 T を **超関数** という。正確には $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ にある位相を入れて、 T の連続性を仮定するが、ここでは簡単のため連続性については言及しない。
（実際に本書で扱われる超関数はすべて連続性を満たしている。）
$\mathscr{S}(\mathbb{R})$ の元 φ に対し、超関数 T の像を

$$T(\varphi)=<T,\ \varphi>$$

と表記することにする。

例１ $f(t)$ は任意有限区間で積分可能であり、ある正定数 $C(>0)$ と自然数 n が存在して

$$|f(t)|\leqq C(1+|t|)^n \qquad (t\in\mathbb{R})$$

が成り立っているとする。このとき

$$T_f(\varphi)=<T_f,\ \varphi>=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(t)dt$$

と定めると、 T_f は超関数となる。この超関数 T_f を普通の関数 f と同一視することにより、超関数を普通の関数の一般化と考えることができる。

例２ 実数 α に対し

$$\delta_\alpha(\varphi)=<\delta_\alpha,\ \varphi>=\varphi(\alpha) \qquad (\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}))$$

とおくと δ_α は超関数である。この δ_α を「点 α に台をもつディラックのデルタ（δ）関数」または簡単に「点 α におけるデルタ関数」という。なお $\alpha=0$ のとき δ_0 を単に「デルタ関数」という。

問 正数 $\varepsilon(>0)$ と実数 $\alpha(\in\mathbb{R})$ に対し、 $f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & :|t-\alpha|<\varepsilon\\[2mm] 0 & :|t-\alpha|\geqq\varepsilon\end{cases}$ とおく。

任意の $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し、 $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}T_{f_\varepsilon}(\varphi)=\delta_\alpha(\varphi)$ であることを証明せよ。

＜デルタ関数の近似関数列＞

フーリエ逆変換の収束の証明より、 $\rho_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(nt)}{\pi t} & : t \neq 0 \\ \frac{n}{\pi} & : t = 0 \end{cases}$ とおくと

絶対可積分で有界かつ任意有界区間で区分的に滑らかな関数 f に対して

$$(\star) \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} (f * \rho_n)(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\rho_n(s)ds = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}}$$

が成立する。特に f が連続関数の場合は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(f*\rho_n)(t) = f(t) = \delta_t(f)$ が

成立する。そこで $(\star)$ 式が成り立つような関数列 $\{\rho_n(t)\}$ を**デルタ関数の近似関数列**という

ことにする。このような関数列は $\{\rho_n\}$ 以外にもある。

<u>例</u> $h_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & : |t| \leqq \frac{1}{n} \\ 0 & : |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$ や $g_n(t) = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n}{4}t^2}$

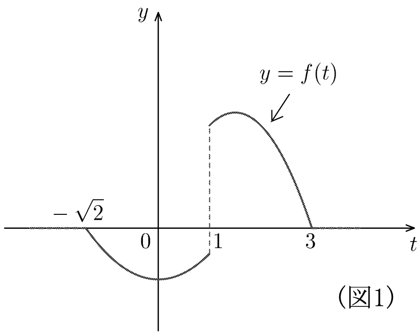
もデルタ関数の近似関数列である。$f(t)$ が図 1 のような関数の場合、

$h_n(t)$ のグラフ（図 2, 図 4）と $(f*h_n)(t)$ のグラフ（図 3, 図 4）、

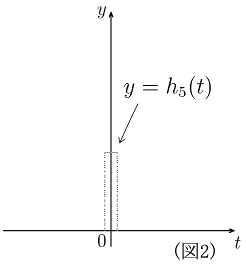
$g_n(t)$ のグラフ（図 6, 図 8）と $(f*g_n)(t)$ のグラフ（図 7, 図 8）、

$\rho_n(t)$ のグラフ（図 10, 図 11）と $(f*\rho_n)(t)$ のグラフ（図 11, 図 13）

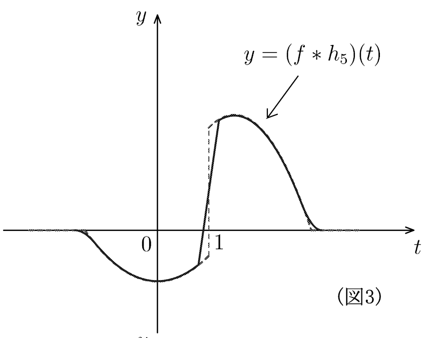
を見て、収束の様子をわかってほしい。



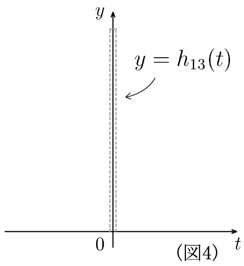
(図1)



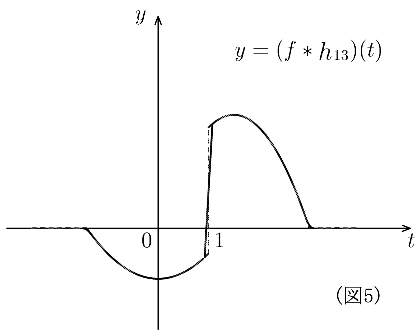
(図2)



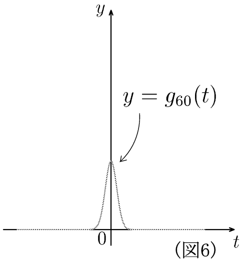
(図3)



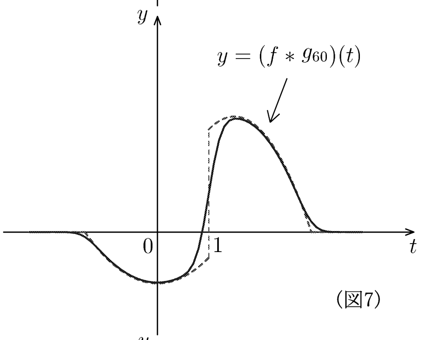
(図4)



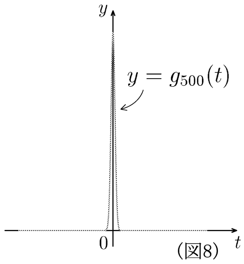
(図5)



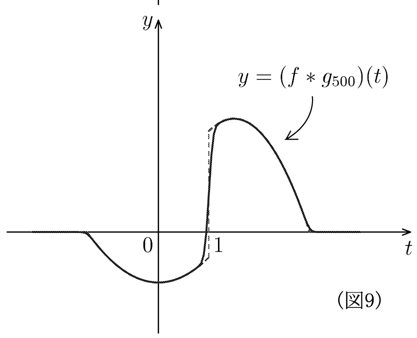
(図6)



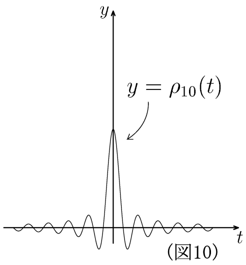
(図7)



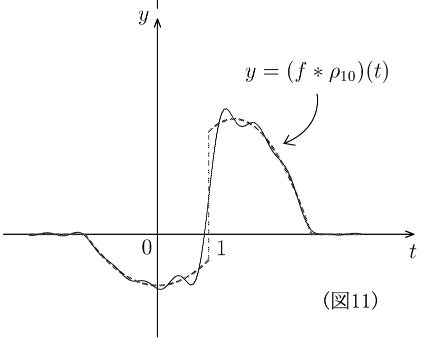
(図8)



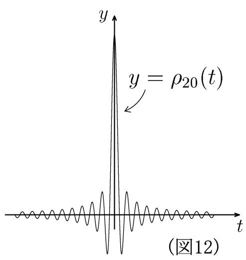
(図9)



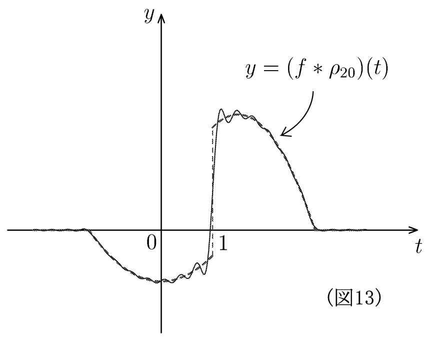
(図10)



(図11)



(図12)



(図13)

< 超関数のフーリエ変換１ >

急減少関数 $f,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し、 $\mathscr{F}[f](x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt$ だから
超関数 $T_{\mathscr{F}[f]}$ は

$$T_{\mathscr{F}[f]}(\varphi)=<T_{\mathscr{F}[f]},\ \varphi>=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}[f](x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt\right\}\varphi(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ixt}dx\right\}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathscr{F}[\varphi](t)dt=<T_f,\ \mathscr{F}[\varphi]>$$

となる。そこで、任意の超関数 T に対して、T のフーリエ変換 $\mathscr{F}[T]$ を

$$<\mathscr{F}[T],\ \varphi>=<T,\ \mathscr{F}[\varphi]>$$

で定義する。また逆フーリエ変換 $\mathscr{F}^{-1}[T]$ を

$$<\mathscr{F}^{-1}[T],\ \varphi>=<T,\ \mathscr{F}^{-1}[\varphi]>$$

で定義する。

<u>例１</u>　$T=\delta_\alpha$（α におけるデルタ関数）の場合

$$<\mathscr{F}[\delta_\alpha],\ \varphi>=<\delta_\alpha,\ \mathscr{F}[\varphi]>=\mathscr{F}[\varphi](\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-i\alpha t}dt=<T_{e^{-i\alpha\cdot}},\ \varphi>$$

ここで関数 $e^{-i\alpha\cdot}$ は t に対し $e^{-i\alpha t}$ を対応させる関数である。

この結果 $\mathscr{F}[\delta_\alpha]=T_{e^{-i\alpha\cdot}}$ を略して $\mathscr{F}[\delta_\alpha](x)=e^{-i\alpha x}$ と書くこともある。

<u>例２</u>　$T=T_1$ の場合

$$<\mathscr{F}[T_1],\ \varphi>=<T_1,\ \mathscr{F}[\varphi]>=\int_{-\infty}^{\infty}1\times\mathscr{F}[\varphi](x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\mathscr{F}[\varphi](x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-ixt}dt\right\}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left(\int_{-n}^{n}e^{-ixt}dx\right)dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{2\sin(nt)}{t}dt=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)2\pi\rho_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}2\pi(\varphi*\rho_n)(0)=2\pi\varphi(0)$$

$=<2\pi\delta_0,\ \varphi>$ 　より $\mathscr{F}[T_1]=2\pi\delta_0$ となる。これを略して $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta_0$ 　と書くこともある。

< 超関数のフーリエ変換２ >

<u>例 1</u>　実数 α に対し、関数 $e^{i\alpha\cdot} : t \longmapsto e^{i\alpha t}$ に対応する超関数 $T_{e^{i\alpha\cdot}}$ のフーリエ変換を求める。 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$< \mathscr{F}[T_{e^{i\alpha\cdot}}],\ \varphi > = < T_{e^{i\alpha\cdot}},\ \mathscr{F}[\varphi] > = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\mathscr{F}[\varphi](x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{i\alpha x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-ixt}dt\right)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left(\int_{-n}^{n} e^{i(\alpha-t)x}dx\right)dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)2\pi\rho_n(\alpha-t)dt = \lim_{n\to\infty}2\pi(\varphi*\rho_n)(\alpha) = 2\pi\varphi(\alpha) = < 2\pi\delta_\alpha,\ \varphi >$$

より $\mathscr{F}[T_{e^{i\alpha\cdot}}] = 2\pi\delta_\alpha$ となる。これを略して $\mathscr{F}[e^{i\alpha\cdot}] = 2\pi\delta_\alpha$ と書くこともある。

<u>例 2</u>　実数 α に対し、関数 $\cos(\alpha\cdot) : t \longmapsto \cos(\alpha t)$ に対応する超関数 $T_{\cos(\alpha\cdot)}$ のフーリエ変換を求める。 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$< \mathscr{F}[T_{\cos(\alpha\cdot)}],\ \varphi > = < T_{\cos(\alpha\cdot)},\ \mathscr{F}[\varphi] > = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(\alpha x)\mathscr{F}[\varphi](x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}\mathscr{F}[\varphi](x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\mathscr{F}[\varphi](x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\mathscr{F}[\varphi](x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\{2\pi\varphi(\alpha)+2\pi\varphi(-\alpha)\} = \pi\delta_\alpha(\varphi)+\pi\delta_{-\alpha}(\varphi) = < \pi(\delta_\alpha+\delta_{-\alpha}),\ \varphi >$$

より $\mathscr{F}[T_{\cos(\alpha\cdot)}] = \pi(\delta_\alpha+\delta_{-\alpha})$ となる。これを略して、 $\mathscr{F}[\cos(\alpha\cdot)] = \pi(\delta_\alpha+\delta_{-\alpha})$ と書くこともある。

<u>問</u>　実数 α に対し、関数 $\sin(\alpha\cdot) : t \longmapsto \sin(\alpha t)$ に対応する超関数 $T_{\sin(\alpha\cdot)}$ のフーリエ変換を求めよ。

< フーリエ変換の練習 >

問 1　関数 $f(t)$ が次の各場合に、 $f(t)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。
ただし K, n は正の定数とする。

(1) $f(t) = \begin{cases} K & : |t| \leqq n \\ 0 & : |t| > n \end{cases}$　　(2) $f(t) = \begin{cases} t & : |t| \leqq n \\ 0 & : |t| > n \end{cases}$

(3) $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & : t \geqq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$　　(4) $f(t) = e^{-3|t|}$

問 2　$\mathscr{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt = F(x)$ とおく。

(1) $\frac{d}{dx}F(x)$ を $F(x)$ を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて $F(x)$ を求めよ。

問 3　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ とする。 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-3|t-u|} du$ のフーリエ変換を求めよ。

問 4　次のフーリエ逆変換を求めよ。

(1) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{2+ix}\right]$　　(2) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{3}{x^2+1}\right]$

(3) $\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-\frac{x^2}{4}}\right]$　　(4) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\sin(3x)}{x}\right]$

問 5　区分的に連続で絶対可積分である関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ に対し、 $F(x)$ のフーリエ逆変換が

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty}(f * \rho_n)(t)$$

と表されることを示せ。ただし $\rho_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(nt)}{\pi t} & : t \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{n} & : t = 0 \end{cases}$ とする。

問 6　関数 $f(t)$ は絶対可積分で有界かつ任意有限区間で区分的に連続であるとする。今、正数 $\varepsilon\ (> 0)$ に対し、

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & : |t| \leqq \varepsilon \\ 0 & : |t| > \varepsilon \end{cases}$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} (f * h_\varepsilon)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$ が成り立つことを示せ。

< ラプラス変換の導出 >

正定数 $\sigma(>0)$ と関数 $f(t)$ に対して，

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : \quad t \geqq 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases}$$

とおき，$f_\sigma(t)$ のフーリエ変換を $F_\sigma(x)$ とおくと

$$F_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t)e^{-ixt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+ix)t}dt$$

となる。$F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とおくと $F_\sigma(x) = F(\sigma + ix)$ となる。

$F_\sigma(x)$ のフーリエ逆変換は

$$f_\sigma(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{ixt}dx$$

となるので $t > 0$ のとき $f_\sigma(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ より

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{ixt}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{(\sigma+ix)t}dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(\sigma+ix)e^{(\sigma+ix)t}dx \qquad (s = \sigma + ix \text{ とおく}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds \end{aligned}$$

となる。そこで $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ を**ラプラス変換**といい，

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \Big(= F(s)\Big) \qquad \cdots(\text{ラプラス変換})$$

と書くことにすると，その逆変換は

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds \qquad \cdots(\text{ラプラス逆変換})$$

となる。

< ラプラス変換 1 >

関数 $f(t)$ のラプラス変換は

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

である。ここで s は一般には複素数 $\sigma + ix$ で，その実数部分 σ が正の数である。(これを $\mathrm{Re}(s) > 0$ と書く) ただし，ラプラス変換を求めるときには，複素数であることを意識しなくても良い。s を正の定数と考えて，計算しても良い。

例 1 $$\mathscr{L}[t] = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left\{\left[t \times \frac{1}{-s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \frac{1}{s}e^{-st}dt\right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{b}{s}e^{-sb} + \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=b}\right\} = \lim_{b\to\infty}\left\{\frac{b}{-se^{sb}} - \frac{1}{s^2}e^{-sb} + \frac{1}{s^2}\right\} = \frac{1}{s^2}$$

(注) ここで $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{sb}} = 0$ であり，ロピタルの定理より

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{sb}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{d}{db}(b)}{\frac{d}{db}(e^{sb})} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{se^{sb}} = 0$$

となる。

例 2 実数定数 α に対し、$\mathscr{L}[e^{\alpha t}]$ を求める。

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt$$

この積分は $s > \alpha$ のときのみ存在する。そこで $s > \alpha$ になる s に対して、ラプラス変換を求めると、

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(\alpha-s)t}dt = \frac{1}{s-\alpha}$$

となる。

問 次のラプラス変換を求めよ

(1) $\mathscr{L}[1]$

(2) $\mathscr{L}[e^{-t}]$

(3) $\mathscr{L}[e^{it}]$

< ラプラス変換 2 >

ラプラス変換の性質をいくつか示す。

$\boxed{1}$ $\mathscr{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathscr{L}[f_1(t)] + a_2 \mathscr{L}[f_2(t)]$

$\boxed{2}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f(\alpha t)] = \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right) \qquad (\alpha > 0)$

$\boxed{3}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$

(証明)

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \int_0^\infty e^{\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt = F(s-\alpha)$$

$\boxed{4}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f_\alpha(t)] = e^{-\alpha s} F(s) \qquad (\alpha > 0)$

ここで $f_\alpha(t) = \begin{cases} f(t-\alpha) & : \quad t \geqq \alpha \\ 0 & : \quad t < \alpha \end{cases}$

(証明)

$$\mathscr{L}[f_\alpha(t)] = \int_\alpha^\infty f(t-\alpha) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau \qquad (t - \alpha = \tau)$$

$$= e^{-\alpha s} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-\alpha s} F(s)$$

例 1 $\mathscr{L}[e^{ikt}] = \displaystyle\int_0^\infty e^{(ik-s)t} dt = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{ik - s} e^{(ik-s)t} \right]_{t=0}^{t=b} = \frac{1}{s - ik} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$

例 2 $\mathscr{L}[\cos(kt)] = \mathscr{L}\left[\dfrac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}\right] = \dfrac{1}{2}\left\{\mathscr{L}[e^{ikt}] + \mathscr{L}[e^{-ikt}]\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-ik} + \frac{1}{s+ik}\right\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

問 次のラプラス変換を求めよ。ただし α, k は実数の定数とする。(2)〜(4) のラプラス変換の変数 s は $s > \alpha$ とする。

(1) $\mathscr{L}[\sin(kt)]$

(2) $\mathscr{L}[e^{(\alpha + ki)t}]$

(3) $\mathscr{L}[e^{\alpha t} \cos(kt)]$

(4) $\mathscr{L}[e^{\alpha t} \sin(kt)]$

＜ラプラス変換 3＞

$\boxed{5}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[tf(t)] = -F'(s)$

(証明) $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ を s で微分すると

$$F'(s) = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st}dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = -\mathscr{L}[tf(t)]$$

$\boxed{6}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$

問 次のラプラス変換を求めよ。ただし α と k は実数の定数とする。(4),(5) のラプラス変換の変数 s は $s > \alpha$ と考える。

(1) $\mathscr{L}[t^2]$

(2) $\mathscr{L}[t^3]$

(3) $\mathscr{L}[t^n]$

(4) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}]$

(5) $\mathscr{L}[te^{\alpha t}]$

(6) $\mathscr{L}[t\cos(kt)]$

(7) $\mathscr{L}[t\sin(kt)]$

(8) $\mathscr{L}[\sinh(kt)] = \mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt})\right]$

(9) $\mathscr{L}[\cosh(kt)] = \mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt})\right]$

< ラプラス変換 4 >

$\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n |f(t)|dt$ が有限の値に収束するとき，関数 $f(t)$ は絶対可積分という。

$\boxed{7}$　$f(t)e^{-st}$ および $f'(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であるとき，

$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ であれば $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

(証明)　　絶対可積分より $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left\{\Big[f(t)e^{-st}\Big]_0^b + \int_0^b f(t)se^{-st}dt\right\}$$

$$= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= sF(s) - f(0)$$

(証明終)

$\boxed{8}$　$f(t)e^{-st}$，$f'(t)e^{-st}$，$f''(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であり，

$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ であれば $\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

(証明)　　$\boxed{7}$ より　$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$

よって

$$\mathscr{L}[f''(t)] = \mathscr{L}[(f'(t))'] = s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0)$$

$$= s\left\{s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)\right\} - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

問　$f(t)e^{-st}$，$f'(t)e^{-st}$，$f''(t)e^{-st}$，$f'''(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であり，$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f'''(t)]$ を求めよ。

< ラプラス変換 5 >

$t \geqq 0$ で定義されている 2 つの関数 $f(t)$，$g(t)$ に対し，$t<0$ では常に $f(t)=0$，$g(t)=0$ と定めると，$f(t)$ と $g(t)$ の合成積は

$$\boxed{(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du=\int_0^t f(t-u)g(u)du}$$

となる。これは定義域が $[0,\ \infty)$ である関数の合成積である。ラプラス変換を考えるときは常に $t \geqq 0$ の範囲で考えるので，合成積は $(f*g)(t)=\displaystyle\int_0^t f(t-u)g(u)du\left(=\int_0^t f(u)g(t-u)du\right)$ とする。

$\boxed{9}$

$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathscr{L}[g(t)]=G(s)$ のとき

$\mathscr{L}\big[(f*g)(t)\big]=F(s)G(s)$

(証明)　正定数の σ に対し

$$f_\sigma(t)=\begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases} \quad , \qquad g_\sigma(t)=\begin{cases} g(t)e^{-\sigma t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases}$$

の合成積は

(i) $t \geqq 0$ のとき $\displaystyle (f_\sigma*g_\sigma)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t-u)g_\sigma(u)du=\int_0^t f_\sigma(t-u)g_\sigma(u)du$

$$=\int_0^t f(t-u)e^{-\sigma(t-u)}g(u)e^{-\sigma u}du=e^{-\sigma t}\int_0^t f(t-u)g(u)du=e^{-\sigma t}(f*g)(t)$$

(ii) $t<0$ のとき $\displaystyle (f_\sigma*g_\sigma)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\underline{f_\sigma(t-u)}}g_\sigma(u)du=0$

一方フーリエ変換の性質より

$$\mathscr{F}\big[(f_\sigma*g_\sigma)(t)\big]=\mathscr{F}\big[f_\sigma(t)\big]\times\mathscr{F}\big[g_\sigma(t)\big] \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ 左辺 $\displaystyle =\int_{-\infty}^{\infty}(f_\sigma*g_\sigma)(t)e^{-ixt}dt=\int_0^{\infty}(f*g)(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt=\mathscr{L}\big[(f*g)(t)\big](\sigma+ix)$

$(*)$ 右辺 $\displaystyle =\int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt\times\int_0^{\infty} g(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt=F(\sigma+ix)\times G(\sigma+ix)$

$\sigma+ix=s$ とおくと

$$\mathscr{L}[(f*g)(t)](s)=F(s)\times G(s) \qquad \text{(証明終)}$$

< ラプラス変換 6 >

補題 正定数 $b(>0)$ に対し $I=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(証明)　$\lambda=\dfrac{b}{\tau}$ とおくと

$$① \ I=\int_0^{\infty} e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\int_{\infty}^{0} e^{-(\frac{b}{\lambda}-\lambda)^2}\left(-\frac{b}{\lambda^2}\right)d\lambda=\int_0^{\infty}\frac{b}{\lambda^2}e^{-(\lambda-\frac{\lambda}{b})^2}d\lambda$$

τ と λ をおきかえると

$$② \ I=\int_0^{\infty} e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\frac{b}{\lambda})^2}d\lambda$$

①+②より

$$2I=\int_0^{\infty}(1+\frac{b}{\lambda^2})e^{-(\lambda-\frac{b}{\lambda})^2}d\lambda$$

ここで $x=\lambda-\dfrac{b}{\lambda}$ とおくと $\dfrac{dx}{d\lambda}=1+\dfrac{b}{\lambda^2}$ より

$$2I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

よって $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　　(証明終)

定理

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=e^{-\alpha\sqrt{s}}}$$

(証明)　$\tau=\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}$ とおくと $\dfrac{d\tau}{dt}=-\dfrac{\alpha}{4}t^{-\frac{3}{2}}$ より

$$\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=\int_0^{\infty}\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{0} e^{-\tau^2}e^{-s(\frac{\alpha}{2\tau})^2}d\tau$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\tau^2-\left(\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha\sqrt{s}}\int_0^{\infty} e^{-\left(\tau-\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}d\tau$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha\sqrt{s}}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=e^{-\alpha\sqrt{s}}$$

(証明終)

< ラプラス変換 7 >

ラプラス変換の性質を表にまとめる。ここで a，a_1，a_2 は実数定数，α は正定数，n は自然数とする。

原関数 $f(t)$	像関数 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
$f(\alpha t) \qquad (\alpha > 0)$	$\dfrac{1}{\alpha} F(\dfrac{s}{\alpha})$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-\alpha) \qquad (t \geqq \alpha)$ (ただし $t < \alpha$ のとき $f(t-\alpha) = 0$ とする)	$e^{-\alpha s} F(s) \qquad (\alpha > 0)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f'''(t)$	$s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\dfrac{1}{s} F(s)$
$\dfrac{1}{t} f(t)$	$\displaystyle\int_s^\infty F(u) du$
$(f_1 * f_2)(t) = \displaystyle\int_0^t f_1(t-u) f_2(u) du$	$F_1(s) F_2(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\alpha)$	$e^{-s\alpha}$

< ラプラス変換 8 >

ラプラス変換の対応表 (a，ω，k は実定数，n は自然数)

原関数 $f(t)$	像関数 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$ $(s > a)$
t^2e^{at}	$\dfrac{2}{(s-a)^3}$ $(s > a)$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ $(s > a)$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ $(s > a)$
$t\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sinh(kt) = \dfrac{1}{2}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right)$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh(kt) = \dfrac{1}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right)$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$u(t-a) = \begin{cases} 1 & : \ t \geqq a \\ 0 & : \ t < a \end{cases}$ $(a > 0)$	$\dfrac{1}{se^{sa}}$
$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}$

< ラプラス逆変換 1 >

ラプラス変換はフーリエ変換の一種であるから，フーリエ変換と同様に反転公式が成り立つ。

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s) \quad \text{のとき}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

特に $f(t)$ が連続であるときは $f(t-0)=f(t+0)=f(t)$ より $\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ となる。

このワークブックでは連続の場合だけを扱うことにする。次の対応関係がある。

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$
$\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$	$f(\alpha t)$
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$e^{-\alpha s}F(s) \quad (\alpha > 0)$	$f(t-\alpha) \quad (t \geqq \alpha)$
$sF(s)-f(0)$	$f'(t)$
$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$f''(t)$
$s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$	$f'''(t)$
$\dfrac{1}{s}F(s)$	$\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$
$F'(s)$	$-tf(t)$
$\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$	$(-t)^nf(t)$
$F_1(s)F_2(s)$	$(f_1 * f_2)(t) = \displaystyle\int_0^t f_1(t-u)f_2(u)du$

ここで a_1，a_2，a は実数定数，α は正定数，n は自然数とする。

< ラプラス逆変換 2 >

問　次の対応表を完成させせよ。ただし，a,ω は実数の定数，α は正定数，n は自然数とする。

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$\dfrac{1}{s}$	
$\dfrac{1}{s^2}$	
$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	
$\dfrac{1}{s-a} \quad (s>a)$	
$\dfrac{1}{(s-a)^2} \quad (s>a)$	
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	
$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \quad (s>a)$	
$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \quad (s>a)$	
$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	
$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	
$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	
$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	
$\dfrac{e^{-\alpha s}}{s}$	
$e^{-\alpha\sqrt{s}}$	

< ラプラス逆変換 3 >

例 1 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}\right]$ を求めたい。$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}=\dfrac{A}{s-a}+\dfrac{B}{s-b}$ とおき右辺を

通分すると $\dfrac{(A+B)s-Ab-aB}{(s-a)(s-b)}$ となり分子が 1 となるため

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-aB=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{a-b} \quad , \quad B=-\frac{1}{a-b}$$

であるから

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right\}=\frac{1}{a-b}\left\{e^{at}-e^{bt}\right\}$$

例 2 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}e^{at}\sin(bt)$

問 次のラプラス逆変換を求めよ。

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-s-2}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4}\right]$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4s+5}\right]$

< ラプラス逆変換 4 >

例 1 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-a)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{a}{(s-a)^2}\right]=e^{at}+ate^{at}$

例 2 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-a)^2+b^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}+\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]$

$=e^{at}\cos(bt)+\dfrac{a}{b}e^{at}\sin(bt)$

問 次のラプラス逆変換を求めよ。

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{s^2-8s+16}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2-6s+9}\right]$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s^2-2s+5}\right]$

(4) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{s^2-4s+5}\right]$

< ラプラス逆変換 5 >

問 1　部分分数分解により次のラプラス逆変換を求めよ。

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s+1)(s-2)}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s-1)(s-2)}\right]$

例　$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$ より

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s-a}\right] = (e^{at} * f)(t) = \int_0^t e^{a(t-u)} f(u)du$$

問 2　$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき，次のラプラス逆変換を求めよ。(ただし $a \neq b$)

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)(s-b)}\right]$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2+b^2}\right]$

< ラプラス逆変換 6 >

問　次のラプラス逆変換を求めよ。ただし a，b，c は定数。

(1)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s^3}\right]$

(2)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a+bs}{s^2+1}\right]$

(3)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]$

(4)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-1}\right]$

(5)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-2)^2}\right]$

(6)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{(s-2)(s+4)}\right]$

(7)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(s-2)^3}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{(s-2)^2}\right)\right]$

(8)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{16}{s^4-16}\right]$

< 常微分方程式への応用 1 >

例 題　微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + x = e^t \quad (t > 0)$ を初期条件 $x(0) = 1$ の下で解け。

(解)　解を $x(t)$ とおき，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$

である。微分方程式の両辺のラプラス変換をとると

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt} + x\right] = \mathscr{L}[e^t]$$

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\Downarrow$$

$$X(s) = \frac{1 + \frac{1}{s-1}}{s+1} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

よって解 $x(t)$ は

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s-1)}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right\}\right] = \underline{\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t}$$

問　次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{dx}{dt} = kx\ , \quad x(0) = a$

(2)　$\dfrac{dx}{dt} + x = e^{-t}\ , \quad x(0) = 1$

< 常微分方程式への応用 2 >

例題 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+2x=e^t$ ， $x(0)=0$ ， $x'(0)=0$

(解) 解 $x(t)$ のラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right]=sX(s)-x(0)=sX(s)\ ,\quad \mathscr{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)$$

$\mathscr{L}[e^t]=\dfrac{1}{s-1}$ より，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+3sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+3s+2)(s-1)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$ より答えは

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{s+2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{s-1}\right)\right]=\underline{-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{t}}$$

問 次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-5\dfrac{dx}{dt}+6x=e^t$ ， $x(0)=0$ ， $x'(0)=0$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=0$ ， $x(0)=1$ ， $x'(0)=1$

< 常微分方程式への応用 3 >

問　次の常微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$,　$x(0) = 0$,　$x'(0) = 1$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin t$,　$x(0) = 1$,　$x'(0) = 1$

< 常微分方程式への応用 4 >

例題　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+5\dfrac{dx}{dt}+6x=f(t)$,　$x(0)=x'(0)=0$

(解)　$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$,　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ とおき，両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+5sX(s)+6X(s)=F(s)$$

$$X(s)=\frac{F(s)}{s^2+5s+6}$$

ここで $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+5s+6}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+3}\right]=e^{-2t}-e^{-3t}$ より

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2+5s+6}\right]=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)*f(t)$$

$$=\int_0^t\left\{e^{-2(t-u)}-e^{-3(t-u)}\right\}f(u)du$$

(注) この $x(t)$ が例題の解であることを確かめる計算方法については P80 を参照せよ。

問　ラプラス変換を用いて，次の常微分方程式の初期値問題を解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+2x=f(t)$,　$x(0)=x'(0)=0$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+10x=f(t)$,　$x(0)=x'(0)=0$

< 常微分方程式への応用 5 >

例題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y \\ x(0) = 0\ ,\ \ y(0) = 1 \end{cases}$$

(解)　$\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$,　$\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)\ ,\quad \mathscr{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

であるから，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} sX(s) = 2X(s) + Y(s) \\ sY(s) - 1 = -X(s) + 4Y(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 0 & \cdots ① \\ X(s) + (s-4)Y(s) = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① ×$(s-4)$+ ②より

$$\begin{array}{rll} & (s-2)(s-4)X(s) - (s-4)Y(s) & = 0 \\ +) & X(s) + (s-4)Y(s) & = 1 \\ \hline & (s^2 - 6s + 9)X(s) & = 1 \end{array}$$

よって

$$X(s) = \frac{1}{(s-3)^2}\ ,\quad Y(s) = (s-2)X(s) = \frac{(s-2)}{(s-3)^2} = \frac{s-3+1}{(s-3)^2} = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}$$

であるから

(答)　$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] = te^{3t}$

$$\underline{y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}\right] = e^{3t} + te^{3t}}$$

問　次の連立微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \\ x(0) = 0\ ,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

＜熱伝導方程式への応用 1＞

フーリエは 2 階偏微分方程式である熱伝導方程式を解くために関数を三角級数に展開する方法を考えた。

フーリエ級数，フーリエ変換，ラプラス変換の応用として熱伝導方程式の解法を説明する。

1 次元熱伝導方程式とは長さが有限 $(0 \leqq x \leqq L)$，半無限 $(0 \leqq x < \infty)$，あるいは無限 $(-\infty < x < \infty)$ の棒において，熱が伝導するときの温度分布 u の方程式である。$u(t\,,\,x)$ を時刻 t，位置 x における棒の温度とすると，$u = u(t\,,\,x)$ は式

$$\boxed{*} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad \text{(1 次元熱伝導方程式)}$$

を満たす。ここで k は正の定数である。これを **1 次元熱伝導方程式**という。
この方程式を棒の長さによって 3 通りの場合に分ける。

$\boxed{\textbf{A}}$ $\boxed{\text{棒の長さが有限 } (0 \leqq x \leqq L)}$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(0 \leqq x \leqq L)$ の範囲であるとする。この式を

[初期条件]　$u(0\,,\,x) = f(x)$　　$(A-1)$
[境界条件]　$u(t\,,\,0) = 0\ ,\quad u(t\,,\,L) = 0$　　$(A-2)$

のもとに解きたい。

＜解法＞　$u(t\,,\,x)$ が 時間の関数 $T(t)$ と 位置の関数 $X(x)$ の積として表されているとすれば，$u(t\,,\,x) = T(t)X(x)$ であり，式 $\boxed{*}$ より

$T'(t)X(x) = k^2 T(t)X''(t)$ ⇒ $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = k^2 \dfrac{X''(x)}{X(x)} = K$ (定数) とおくと

$T'(t) = KT(t)$ より $T(t) = Ae^{Kt}$ (A は定数) となる。

$X''(x) = \dfrac{K}{k^2} X(x)$

(1) $K > 0$ のとき　$X(x) = Be^{\frac{\sqrt{K}}{k}x} + Ce^{-\frac{\sqrt{K}}{k}x}$ ($B\,,\,C$ は定数) となるが，境界条件より $X(0) = X(L) = 0$ より $B = C = 0$ となり
$X(x) = 0$ ⇒ $u(t\,,\,x) = 0$ となりだめ。

(2) $K = 0$ のとき　$X(x) = Bx + C$ ($B\,,\,C$ は定数) となるが，やはり境界条件より　$X(x) = 0$　となってだめ。

< 熱伝導方程式への応用 2 >

〈 $\boxed{\mathbf{A}}$ (棒有限) の解法の続き 〉

(3) $K<0$ のとき　$K=-q^2$　とおくと，

$$X(x)=B\cos\left(\frac{q}{k}x\right)+C\sin\left(\frac{q}{k}x\right)\qquad (B\ ,\ C\ は定数)$$

となる。境界条件 $X(0)=0$　より　$B=0\ \Rightarrow\ X(x)=C\sin\left(\frac{q}{k}x\right)$

$X(L)=0\ \Rightarrow\ \dfrac{q}{k}=\dfrac{n\pi}{L}\ \ (n=0\ ,1\ ,2\ ,\cdots)$　であるから，

$$X_n(x)=C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\quad ,\quad T_n(t)=A_ne^{-q^2t}=A_ne^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2t}$$

とおくと，$u(t\ ,x)=T_n(t)X_n(x)$　は $\boxed{*}$ の解であり，その和

$$u(t\ ,x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t\ ,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nC_ne^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

も $\boxed{*}$ の解である。初期条件より

$$u(0\ ,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nC_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x)$$

である。これは $f(x)$ のフーリエ級数の形をしている。x は $(0\leqq x\leqq L)$ の範囲であるが，$f(-x)=-f(x)$ と定めると，$f(x)$ は $(-L\leqq x\leqq L)$ で定義された奇関数である。周期 $2L$ の奇関数のフーリエ係数は

$$A_nC_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{L}\int_0^Lf(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

となる。よって求める解は

$$u(t\ ,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nC_ne^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$
$$=\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^Lf(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

となる。これが 熱伝導方程式 $\boxed{*}$ を 初期条件 $(A-1)$，境界条件 $(A-2)$　のもとで解いた解である。このように x の範囲が有限の場合はフーリエ級数によって $\boxed{*}$ は解くことができる。

＜熱伝導方程式への応用 3＞

B 棒の長さが無限 $(-\infty < x < \infty)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(-\infty < x < \infty)$ の範囲であるとする。この式を

［初期条件］　$u(0\,,\,x) = f(x)$　　$(B-1)$

［境界条件］　$u(t\,,\,-\infty) = \lim_{x\to-\infty} u(t\,,\,x) = 0$　　$(B-2)$

$u(t\,,\,+\infty) = \lim_{x\to+\infty} u(t\,,\,x) = 0$　　$(B-3)$

のもとで解く。

＜解法＞　未知関数 $u = u(t\,,\,x)$ は t をパラメータとし，x の関数と考えて，x に関するフーリエ変換を

$$\mathscr{F}[u(t\,,\,x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t\,,\,x)e^{-i\omega x}dx = U(t\,,\,\omega)$$

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)$$

とおく。$\mathscr{F}\left[\dfrac{d^2u}{dx^2}\right] = (i\omega)^2\,U(t\,,\,\omega) = -\omega^2\,U(t\,,\,\omega)$　より，$\boxed{*}$ のフーリエ変換をすると

$$\frac{d}{dt}U(t\,,\,\omega) = -k^2\omega^2\,U(t\,,\,\omega)$$

よって

$$U(t\,,\,\omega) = Ae^{-k^2\omega^2 t}$$

ここで A は変数 t に関しては定数であるが，ω の値によっては変わるかもしれないので $A = A(\omega)$ とおく。$t = 0$ とおくと初期条件より

$$u(0\,,\,x) = f(x) \quad \overset{\text{フーリエ変換}}{\longrightarrow} \quad U(0\,,\,\omega) = F(\omega) = A(\omega)$$

よって　$U(t\,,\,\omega) = F(\omega)e^{-k^2\omega^2 t}$

一方　$\mathscr{F}^{-1}[e^{-k^2t\omega^2}] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t\omega^2}e^{i\omega x}d\omega = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}}e^{-\frac{x^2}{4k^2t}} = g(x)$

よって　$u(t\,,\,x) = \mathscr{F}^{-1}[U(t\,,\,\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)e^{-k^2\omega^2 t}] = (f * g)(x)$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4k^2t}}d\tau}$$

これが $\boxed{*}$ の $(B-1)$，$(B-2)$，$(B-3)$ をみたす解である。このような無限区間 $(-\infty < x < \infty)$ ではフーリエ変換を用いる。

< 熱伝導方程式への応用 4 >

C 棒の長さが半無限 $(0 \leqq x < \infty)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(0 \leqq x < \infty)$ の範囲であるとする。この式を

[初期条件] $u(0\,,\,x) = 0$ $(C-1)$

[境界条件] $u(t\,,\,0) = g(t)\,,\quad u(t\,,\,+\infty) = \lim_{x\to+\infty} u(t\,,\,x) = 0$ $(C-2)$

のもとで解く。

< 解法 > x をパラメータとみなし，$u(t\,,\,x)$ の t に関するラプラス変換を

$$\mathscr{L}[u(t\,,\,x)] = \int_0^\infty u(t\,,\,x)e^{-st}dt = U(s\,,\,x)$$

とおく。この両辺を x で 2 回微分すると，$\mathscr{L}[u_{xx}] = U_{xx}(s\,,\,x)$ である。

また $\mathscr{L}\left[\dfrac{du}{dt}\right] = sU(s\,,\,x) - u(0\,,\,x) = sU(s\,,\,x)$ である。よって $\boxed{*}$ の

ラプラス変換は $sU(s\,,\,x) = k^2U_{xx}(s\,,\,x)$ より $\dfrac{d^2U}{dx^2} = \dfrac{s}{k^2}U$

だから $U(s\,,\,x) = Ae^{\frac{\sqrt{s}}{k}x} + Be^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

境界条件より $U(s\,,\,+\infty) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0\,,\quad U(s\,,\,x) = Be^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

$U(s\,,\,0) = \mathscr{L}[u(t\,,\,0)] = \mathscr{L}[g(t)] = G(s)$ より $B = G(s)$

よって $U(s\,,\,x) = G(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

一方 $\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}] = \dfrac{\frac{x}{k}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{4t}} = \dfrac{x}{2k\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4tk^2}} = \gamma(t)$

とおくと

$$u(t\,,\,x) = \mathscr{L}^{-1}[U(s\,,\,x)] = \mathscr{L}^{-1}[G(s)e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}]$$
$$= (g*\gamma)(t) = \underline{\int_0^t \frac{x}{2k\sqrt{\pi}}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)k^2}}g(\tau)d\tau}$$

これが $\boxed{*}$ の $(C-1)$，$(C-2)$ をみたす解である。このような半無限区間 $(0 \leqq x < \infty)$ ではラプラス変換を用いる。

研究課題 $f(x)$ は絶対可積分な連続関数とする。この $f(x)$ に対して

$$u(t\,,\,x) = \int_{-\infty}^\infty f(\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4t}}d\tau$$

とおく。

(1) $u(t\,,\,x)$ は熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0, -\infty < x < \infty)$$

を満たすことを示せ。

(2) 初期条件

$$\lim_{t\to+0} u(t\,,\,x) = f(x)$$

を満たすことを示せ。

< 付録１: 区分的に連続な関数の積分可能性 >

[定理]　$\boxed{\text{区間 } [a,\ b] \text{ で区分的に連続な関数 } f(t) \text{ は (リーマン) 積分可能である。}}$

(証明)　$f(t)$ の不連続点を $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_l$ $(t_0 = a \leqq t_1 < t_2 < \cdots t_l < b = t_{l+1})$

とする。

$$F_i(t) = \begin{cases} f(t_{i+1} - 0) : t = t_{i+1} \\ f(t) \qquad\quad : t_i < t < t_{i+1} \qquad (0 \leqq i \leqq l) \\ f(t_i + 0) \quad : t = t_i \end{cases}$$

とおくと, $F_i(t)$ は部分区間 $[t_i,\ t_{i+1}]$ で連続だから, $[t_i,\ t_{i+1}]$

で有界かつ一様連続である。従って $f(t)$ は $[t_i,\ t_{i+1}]$ で有界である。

よって $f(t)$ は区間 $[a,\ b]$ で有界であり $M = \sup\{f(t) \ : \ a \leqq t \leqq b\}$,

$m = \inf\{f(t) \ : \ a \leqq t \leqq b\}$ とおくと $m \leqq f(t) \leqq M$ $(a \leqq t \leqq b)$ である。

また $F_i(t)$ が $(t_i,\ t_{i+1})$ で一様連続だから $f(t)$ も $(t_i,\ t_{i+1})$ で一様連続より

$$\varphi_i(\delta) = \sup\{|f(t) - f(t')| \ : \ |t - t'| < \delta, \quad t, t' \in (t_i, t_{i+1})\}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \varphi_i(\delta) = 0$ $(1 \leqq i \leqq l)$ が成り立つ。

従って $\displaystyle\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \max_{1\leqq i\leqq l} \varphi_i(\delta) = 0$ が成り立つ。

$[a,\ b]$ の分割 $\Delta \ : \ a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ に対し,

$K = \{k \ : \ 1 \leqq k \leqq n,$ ある i $(0 \leqq i \leqq l)$ が存在し, $[s_{k-1},\ s_k] \subset (t_i,\ t_{i+1})\}$

$J = \{k \ : \ 1 \leqq k \leqq n,\ k \notin K\}$, $\displaystyle |\Delta| = \max_{1\leqq k\leqq n} |s_k - s_{k-1}|$

とおくと J の要素は高々l 個である。ここで分割 Δ に対し

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{k=1}^{n} m_k(s_k - s_{k-1}) \quad , \quad \bar{S}_\Delta = \sum_{k=1}^{n} M_k(s_k - s_{k-1})$$

$m_k = \inf\{f(t) \ : \ s_{k-1} \leqq t \leqq s_k\}$, $M_k = \sup\{f(t) \ : \ s_{k-1} \leqq t \leqq s_k\}$

とするとき

$$\begin{aligned} \bar{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta &= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k\in K}(M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) + \sum_{k\in J}(M_k - m_k)(s_k - s_{k-1}) \\ &\leqq (b-a)\max_{1\leqq i\leqq l}\varphi_i(|\Delta|) + (M-m)l|\Delta| \ \to \ 0 \ (|\Delta| \to 0) \end{aligned}$$

すなわち $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}(\bar{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta) = 0$ より $f(t)$ は $[a,\ b]$ で (リーマン) 積分可能である。(証明終了)

< 付録 2：関数空間 >

関数空間 X

区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された連続でかつ区分的になめらかである関数 $f(t)$ の集合を X とする。$f,g\in X$ と実数 k に対して $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ と $(kf)(t)=kf(t)$ はともに区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された連続でかつ区分的になめらかである関数だから、$f+g\in X,\ \ kf\in X$ である。また恒等的に $f(t)=0$ である定数関数 f を $\mathbf{0}$ で表すことにすると、集合 X は $\mathbf{0}$ を零ベクトルとする**ベクトル空間（線形空間）**になる。

内積

$f,g\in X$ に対して、記号 $f\cdot g$ を $f\cdot g=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt$ と定めると、次の性質が成り立つ。

(1) $f\cdot f\geqq 0$,　　$f\cdot f=0\Longrightarrow f=0$

(2) $f\cdot g=g\cdot f$

(3) $(f_1+f_2)\cdot g=f_1\cdot g+f_2\cdot g$

(4) $(kf)\cdot g=k(f\cdot g)$　 (ただし f は実数定数)

この (1)∼(4) を満たすとき、記号 $f\cdot g$ は「f と g の**内積**」と呼ばれる。$f,\ g\in X$ に対して、$f\cdot g=0$ であるとき、f と g は「**直交**している」と言う。また同じ関数との内積の平方根を

$$\sqrt{f\cdot f}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}=||f||$$

という記号で表し、f の**ノルム**をいう。ノルムはベクトルの絶対値を一般化したものである。

直交系

8 ページの結果より、関数列

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \cos 3t,\ \sin 3t,\ \ldots$$

の中の任意の二つの関数は直交していることがわかる。このようなときこの関数列は**直交系**と言う。この関数列に対して

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \ \varphi_1(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \ \varphi_2(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \ \varphi_3(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,$$

$$\varphi_4(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t,\ \ \varphi_5(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 3t,\ \ \varphi_6(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 3t,\ \ \cdots$$

と置くと、関数列 $\{\varphi_k\}$ は直交系であり、さらに $||\varphi_k||=1(k=0,1,2,\cdots)$ を満たす。このようなとき関数列 $\{\varphi_k\}$ は「**正規直交系**である」という。関数列 $\{\varphi_k\ :\ k=0,1,2,\cdots\}$ は一次独立なベクトルの集まりである。

正規直交基底

X の任意の要素 f に対して、$x_k=f\cdot\varphi_k=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\varphi_k(t)dt$ とおくと、フーリエ係数 $a_0,\ a_k,\ b_k$ に対して、等式

$$x_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\sqrt{2\pi}a_0\ \ ,\qquad x_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt=\sqrt{\pi}a_k\ \ ,$$

$$x_{2k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt=\sqrt{\pi}b_k\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ。各点収束の結果から

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k\varphi_k(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(f\cdot\varphi_k)\varphi_k(t)$$

が成立する。この結果から、正規直交系 $\{\varphi_k\}$ はベクトル空間 X の**基底**と呼ばれる。

また等式 $||f||^2=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}x_k^2$ が成り立つ。この等式をパーセバルの等式という。

< 付録3 : ロピタルの定理 >

[1]　$f(x),\ g(x)$ は $x=a$ の近くで連続，a 以外で微分可能で $g'(x)\neq 0$ かつ $f(a)=g(a)=0$ とする。そのとき極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\big(f(x),\ g(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ ならば同じことがいえる。$\big)$

[2]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=0$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[3]　$x\to a+0$(右極限) のとき $f(x)\to+\infty,\ g(x)\to+\infty$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[4]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=+\infty$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明の概略)

[1] は $Cauchy$ の平均値の定理 $\displaystyle\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\quad(a<c<x)$ より従う。

[2] は $F(x)=f(\frac{1}{x}),\ G(x)=g(\frac{1}{x})$ に対して [1] の結果を使う。

[3] は $a<x<x_1$ に対しコーシーの平均値定理より

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad(x<c<x_1)$$

と表されるので

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\times\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

と変形されることにより従う。

[4] は $F(x)=f(\frac{1}{x}),\ G(x)=g(\frac{1}{x})$ とおいて [3] の結果 を使う。

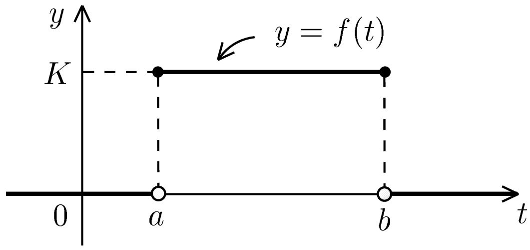
＜付録 4：単関数のフーリエ逆変数＞

p.43 の補題 (1) から次が成り立つ。

補題 $$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{x}\,dx = \mathrm{sgn}(\lambda) = \begin{cases} 1 & : \ \lambda > 0 \\ 0 & : \ \lambda = 0 \\ -1 & : \ \lambda < 0 \end{cases}$$

例 定数 a, b, K ($a < b,\ K > 0$) に対し、関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t > b \\ K & : \quad a \leqq t \leqq b \\ 0 & : \quad t < a \end{cases}$$



のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}\left[f(t)\right] = \int_a^b K e^{-ixt}\,dt = \frac{K}{ix}\left\{e^{-ixa} - e^{-ixb}\right\}$$

である。 これのフーリエ逆変換を補題を用いて求める。

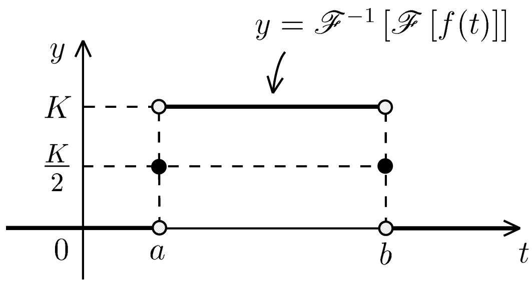
$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f(t)]] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{ix}\{e^{-ixa} - e^{-ixb}\}e^{ixt}\,dx$$

$$= \frac{K}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{ix(t-a)}}{x} - \frac{e^{ix(t-b)}}{x}\right\}dx$$

$$= \frac{K}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\cos(t-a)x}{x} + i\,\frac{\sin(t-a)x}{x} - \frac{\cos(t-b)x}{x} - i\,\frac{\sin(t-b)x}{x}\right\}dx$$

$$= \frac{K}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin(t-a)x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin(t-b)x}{x}\,dx\right\} = \frac{K}{2}\left\{\mathrm{sgn}(t-a) - \mathrm{sgn}(t-b)\right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & : \quad b < t \\ \frac{K}{2} & : \quad t = b \\ K & : \quad a < t < b \\ \frac{K}{2} & : \quad t = a \\ 0 & : \quad t < a \end{cases}$$



< 付録 5 : 合成積の微分 >

補題　2 変数関数 $\varphi(t,u)$ が連続で偏微分可能であり，偏導関数 $\varphi_t(t,u)$ が連続であれば

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t,u)du = \varphi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)du$$

(証明) $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t,u)du = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h} \varphi(t+h,u)du - \int_0^t \varphi(t,u)du\right\}$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\int_0^{t+h} \frac{\varphi(t+h,u)-\varphi(t,u)}{h}du + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varphi(t,u)du\right\}$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)du + \varphi(t,t)$$ (証明終)

例　P70 例題の $x(t) = \displaystyle\int_0^t \left\{e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\right\} f(u)du$ が解であることを確かめる。

$g(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ とおくと $g(t)$ は同次微分方程式の解である。つまり

$$g''(t) + 5g'(t) + 6g(t) = 0$$

が成立する。また

$$x(t) = \int_0^t g(t-u)f(u)du = (g*f)(t)$$

である。$g(0) = 0$ と補題から

$$x'(t) = g(0)f(t) + \int_0^t g'(t-u)f(u)du = \int_0^t g'(t-u)f(u)du$$

となる。$g'(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t}$ より $g'(0) = 1$ から

$$x''(t) = g'(0)f(t) + \int_0^t g''(t-u)f(u)du = f(t) + \int_0^t g''(t-u)f(u)du$$

よって

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t)$$
$$= f(t) + \int_0^t \{g''(t-u) + 5g'(t-u) + 6g(t-u)\} f(u)du = f(t)$$

でかつ $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ より $x(t)$ が例題の解であることが確かめられた。

< 問題の解答 $No.1$ >

P.53 (ラプラス変換)

(1) $\mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{s}$ (2) $\mathscr{L}[e^{-t}] = \dfrac{1}{s+1}$ (3) $\mathscr{L}[e^{it}] = \dfrac{1}{s-i}$

P.54

(1) $\mathscr{L}[\sin(kt)] = \dfrac{k}{s^2+k^2}$, (2) $\mathscr{L}[e^{(\alpha+ki)t}] = \dfrac{1}{s-\alpha-ki}$

(3) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}\cos(kt)] = \dfrac{1}{2}\Big\{\mathscr{L}[e^{(\alpha+ki)t}] + \mathscr{L}[e^{(\alpha-ki)t}]\Big\} = \dfrac{1}{2}\Big\{\dfrac{1}{s-\alpha-ki} + \dfrac{1}{s-\alpha+ki}\Big\} = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+k^2}$

(4) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}\sin(kt)] = \dfrac{i}{2}\Big\{\mathscr{L}[e^{(\alpha-ki)t}] - \mathscr{L}[e^{(\alpha+ki)t}]\Big\} = \dfrac{i}{2}\Big\{\dfrac{1}{s-\alpha+ki} - \dfrac{1}{s-\alpha-ki}\Big\} = \dfrac{k}{(s-\alpha)^2+k^2}$

P.55

(1) $\mathscr{L}[t^2] = -\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}[t] = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2}\right) = \dfrac{2}{s^3}$, (2) $\mathscr{L}[t^3] = -\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}[t^2] = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{2}{s^3}\right) = \dfrac{6}{s^4}$

(3) $\mathscr{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, (4) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \dfrac{1}{s-a}$, (5) $\mathscr{L}[te^{\alpha t}] = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s-\alpha}\right) = \dfrac{1}{(s-\alpha)^2}$

(6) $\mathscr{L}[t\cos(kt)] = -\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}[\cos(kt)] = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+k^2}\right) = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

(7) $\mathscr{L}[t\sin(kt)] = -\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}[\sin(kt)] = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{k}{s^2+k^2}\right) = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

(8) $\mathscr{L}[\sinh(kt)] = \mathscr{L}\Big[\dfrac{1}{2}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right)\Big] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-k} - \dfrac{1}{s+k}\right) = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

(9) $\mathscr{L}[\cosh(kt)] = \mathscr{L}\Big[\dfrac{1}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)\Big] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-k} + \dfrac{1}{s+k}\right) = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

P.56

問の解 $\mathscr{L}\big[f'''(t)\big] = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

P.62 (ラプラス逆変換 2)

$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$	1	t	t^n	e^{at}	te^{at}	$\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$	$e^{at}\sin(\omega t)$	$e^{at}\cos(\omega t)$

$F(s)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\frac{1}{s}e^{-\alpha s}$	$e^{-\alpha\sqrt{s}}$
$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$	$t\sin(\omega t)$	$t\cos(\omega t)$	$\sinh(\omega t)$	$\cosh(\omega t)$	$f(t) = \begin{cases} 1 : t \geqq \alpha \\ 0 : t < \alpha \end{cases}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$

P.63

(1) $\mathscr{L}^{-1}\Big[\dfrac{1}{s^2-s-2}\Big] = \mathscr{L}^{-1}\Big[\dfrac{1}{3}\Big\{\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s+1}\Big\}\Big] = \dfrac{1}{3}\left(e^{2t}-e^{-t}\right)$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\Big[\dfrac{1}{s^2-4}\Big] = \mathscr{L}^{-1}\Big[\dfrac{1}{4}\Big\{\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s+2}\Big\}\Big] = \dfrac{1}{4}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\Big[\dfrac{1}{s^2-4s+5}\Big] = \mathscr{L}^{-1}\Big[\dfrac{1}{(s-2)^2+1}\Big] = e^{2t}\sin t$

< 問題の解答 $No.2$ >

P.64 (ラプラス逆変換 4)

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{s^2-8s+16}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-4+1}{(s-4)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-4}+\dfrac{1}{(s-4)^2}\right]=e^{4t}+te^{4t}$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2-6s+9}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3+4}{(s-3)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-3}+4\times\dfrac{1}{(s-3)^2}\right]=e^{3t}+4te^{3t}$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s^2-2s+5}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1+3}{(s-1)^2+4}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-1)^2+2^2}+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{(s-1)^2+2^2}\right]=e^t\cos(2t)+\dfrac{3}{2}e^t\sin(2t)$

(4) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{s^2-4s+5}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2(s-2)+4}{(s-2)^2+1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[2\times\dfrac{s-2}{(s-2)^2+1}+4\times\dfrac{1}{(s-2)^2+1}\right]=2e^{2t}\cos t+4e^{2t}\sin t$

P.65

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2}\right]=\left(te^{at}\right)*f(t)=\displaystyle\int_0^t(t-u)e^{a(t-u)}f(u)du$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)(s-b)}\right]=\left\{\dfrac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)\right\}*f(t)=\dfrac{1}{a-b}\displaystyle\int_0^t\left(e^{a(t-u)}-e^{b(t-u)}\right)f(u)du$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2+b^2}\right]=\left\{\dfrac{1}{b}e^{at}\sin(bt)\right\}*f(t)=\dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^t e^{a(t-u)}\sin\left(b(t-u)\right)f(u)du$

P.66 (ラプラス逆変換 6)

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s^3}\right]=a+bt+\dfrac{c}{2}t^2$　　(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a+bs}{s^2+1}\right]=a\sin t+b\cos t$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]=\cos(2t)$　　(4) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)$

(5) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-2)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-2+1}{(s-2)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{1}{(s-2)^2}\right]=e^{2t}+te^{2t}$

(6) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{(s-2)(s+4)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\frac{7}{6}}{s+4}-\dfrac{\frac{1}{6}}{s-2}\right]=\dfrac{7}{6}e^{-4t}-\dfrac{1}{6}e^{2t}$

(7) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(s-2)^3}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{(s-2)^2}\right)\right]=-t\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-2)^2}\right]=-t^2e^{2t}$

(8) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{16}{s^4-16}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s+2}\right)-\dfrac{2}{s^2+4}\right]=\dfrac{1}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}-\sin(2t)$

P.67 (常微分方程式への応用 1)

(1) $\dfrac{dx}{dt}=kx$, $x(0)=a$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおく。

$\mathscr{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right]=sX(s)-x(0)=sX(s)-a$, $\mathscr{L}[kx]=kX(s)$　より (1) 式の

両辺をラプラス変換すると

$sX(s)-a=kX(s)\ \Rightarrow\ X(s)=\dfrac{a}{s-k}$

$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s-k}\right]=ae^{kt}$

(答) $x(t)=ae^{kt}$

< 問題の解答 $No.3$ >

<u>P.67</u> (常微分方程式への応用 1)

(2) $\dfrac{dx}{dt}+x=e^{-t}$, $x(0)=1$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおく。(2) 式の両辺をラプラス変換すると

$$sX(s)-1+X(s)=\frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad X(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}\Big]=e^{-t}+te^{-t} \quad \underline{(答)\ x(t)=e^{-t}+te^{-t}}$$

<u>P.68</u> (常微分方程式への応用 2)

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-5\dfrac{dx}{dt}+6x=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおく。

$$\mathscr{L}\Big[\frac{dx}{dt}\Big]=sX(s)-x(0)=sX(s)\ ,\ \mathscr{L}\Big[\frac{d^2x}{dt^2}\Big]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)\ ,\ \mathscr{L}\big[e^t\big]=\frac{1}{s-1}$$

より (1) の式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)-5sX(s)+6X(s)=\frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad X(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}=\frac{\frac{1}{2}}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{\frac{1}{2}}{s-3}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{\frac{1}{2}}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{\frac{1}{2}}{s-3}\Big]=\frac{1}{2}e^t-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$$

$$\underline{(答)\ x(t)=\frac{1}{2}\left(e^t-2e^{2t}+e^{3t}\right)}$$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおく。

$$\mathscr{L}\Big[\frac{dx}{dt}\Big]=sX(s)-x(0)=sX(s)-1\ ,\ \mathscr{L}\Big[\frac{d^2x}{dt^2}\Big]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-s-1$$

より (2) の式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)-s-1-4\left(sX(s)-1\right)+4X(s)=0 \ \Rightarrow\ (s^2-4s+4)X(s)=s-3$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{s-3}{s^2-4s+4}=\frac{s-2-1}{(s-2)^2}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\Rightarrow x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}\Big]=e^{2t}-te^{2t} \quad \underline{(答)\ x(t)=e^{2t}-te^{2t}}$$

<u>P.69</u> (常微分方程式への応用 3)

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+5x=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\Big[\frac{dx}{dt}\Big]=sX(s)-x(0)=sX(s)\ ,\ \mathscr{L}\Big[\frac{d^2x}{dt^2}\Big]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-1 \ \text{より}$$

(1) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s)-1-2sX(s)+5X(s)=0 \quad \Rightarrow \quad X(s)=\frac{1}{s^2-2s+5}=\frac{1}{(s-1)^2+4}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s-1)^2+4}\Big]=\frac{1}{2}e^t\sin(2t) \quad \underline{(答)\ x(t)=\frac{1}{2}e^t\sin(2t)}$$

< 問題の解答 $No.4$ >

P.69 (常微分方程式への応用 3)

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=2\sin t$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$

(解) 解を $x(t)$ とし，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおく。

$\mathscr{L}\Big[\dfrac{d^2x}{dt^2}\Big]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-s-1$ より (2) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s)-s-1+4X(s)=\frac{2}{s^2+1}\quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{s+1}{s^2+4}+\frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$X(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{s^2+4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{s^2+1}\quad\Rightarrow\quad \underline{(答)\ x(t)=\cos(2t)+\frac{1}{6}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin t}$$

P.70 (常微分方程式への応用 4)

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+2x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0$

(解) $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ とおき (1) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s)-3sX(s)+2X(s)=F(s)\quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{F(s)}{s^2-3s+2}=\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}\right)F(s)$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\Big[\Big(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}\Big)F(s)\Big]=\big(e^{2t}-e^{t}\big)*f(t)=\underline{\int_0^t\big\{e^{2(t-u)}-e^{t-u}\big\}f(u)du}$$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+10x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0$

(解) $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ とおき (2) 式をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+6sX(s)+10X(s)=F(s)\quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{F(s)}{s^2+6s+10}=\frac{1}{(s+3)^2+1}\times F(s)$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s+3)^2+1}F(s)\Big]=\big(e^{-3t}\sin t\big)*f(t)=\underline{\int_0^t e^{-3(t-u)}\sin(t-u)f(u)du}$$

P.71 (常微分方程式への応用 5)

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y\\ \frac{dy}{dt}=-x+3y\\ x(0)=0\ ,\ y(0)=1\end{cases}$$

(解) $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$ とおく。

$$\mathscr{L}\Big[\frac{dx}{dt}\Big]=sX(s)-x(0)=sX(s)\ ,\ \mathscr{L}\Big[\frac{dy}{dt}\Big]=sY(s)-y(0)=sY(s)-1$$

より微分方程式をラプラス変換すると

$$\left(\begin{cases}sX(s)=X(s)+Y(s) & \Rightarrow\ (s-1)X(s)-Y(s)=0\\ sY(s)-1=-X(s)+3Y(s) & \Rightarrow\ X(s)+(s-3)Y(s)=1\end{cases}\right)\Rightarrow\quad \begin{array}{lr}(s-3)(s-1)X(s)-(s-3)Y(s) & =0\\ +)\qquad\qquad X(s)+(s-3)Y(s) & =1\\ \hline (s^2-4s+4)X(s) & =1\end{array}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s-2)^2}\ ,\ Y(s)=\frac{s-1}{(s-2)^2}=\frac{s-2+1}{(s-2)^2}=\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s-2)^2)}\Big]=te^{2t},y(t)=\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}\Big]=e^{2t}+te^{2t}$$

$$(答)\begin{cases}x(t)=te^{2t}\\ y(t)=e^{2t}+te^{2t}\end{cases}$$