

< リーマン・ルベークの補題 >

$f(t)$ を区間 $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ で 2 乗可積分 $\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty\right)$ とする。

$f(t)$ の複素フーリエ係数 $c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt$ ($\omega = \frac{2\pi}{L}$) と実フーリエ係数

$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) dt$, $a_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt$, $b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt$ の間には

$c_0 = a_0$, $c_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}i$, $c_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}i$ ($1 \leq k \leq n$) という関係があった。

この関係から $|c_0| = |a_0|$, $|c_k|^2 = \frac{1}{4}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$ より前ページの不等式は

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt \quad (n \geq 1)$$

と表わされる。ここで n は任意の自然数であるから、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると左辺は単調増大数列で収束するので

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt$$

が成り立つ。この不等式を**ベッセルの不等式**という。このとき次式が成り立つ。

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \qquad \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$$

(証明) ①を背理法で示す。

もし①が成り立たないと仮定すると、ある正定数 $\varepsilon(>0)$

とある自然数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $|a_{n_k}| \geq \varepsilon$ が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^2 = +\infty$$

これはベッセルの不等式 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq 2 \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty$ に反する。

従って $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ でなければならない。②も同様である。(証明終)

$$\frac{L}{2} a_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad \frac{L}{2} b_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad \text{だから}$$

上記の①, ②より、次式が従う。

$f(t)$ が $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ で 2 乗可積分であれば

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = 0, \qquad \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt = 0$$

この結果をリーマン・ルベークの補題という。