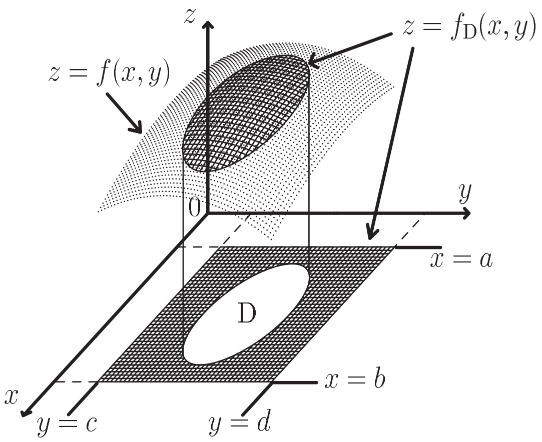
高知工科大学

2010年度版

「数学 5」

(2変数関数の微分積分)



内容

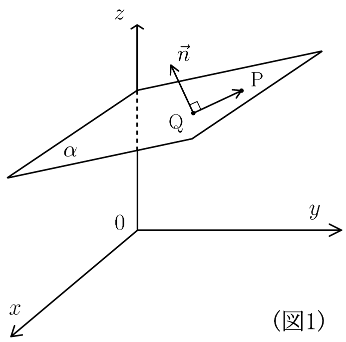
◎ 2変数関数
◎ 偏微分
◎ 極値問題
◎ 重積分
◎ 体積

井上 昌昭 著

< 平面の方程式 >

座標空間の点 $\mathrm{Q}(q_1, q_2, q_3)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面を α とする。平面 α 上の任意の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると $\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (x - q_1,\ y - q_2,\ z - q_3)$ は直交するので，内積が 0 になるから

$$(*) \qquad \boxed{a(x - q_1) + b(y - q_2) + c(z - q_3) = 0}$$



(図1)

が成立する。この式 $(*)$ を点 $\mathrm{Q}(q_1, q_2, q_3)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ に垂直な**平面の方程式**という。
また $\overrightarrow{n}$ をこの平面の**法線ベクトル**という。

$-aq_1 - bq_2 - cq_3 = d$ とおくと，$(*)$ 式は

$$(*)' \qquad \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

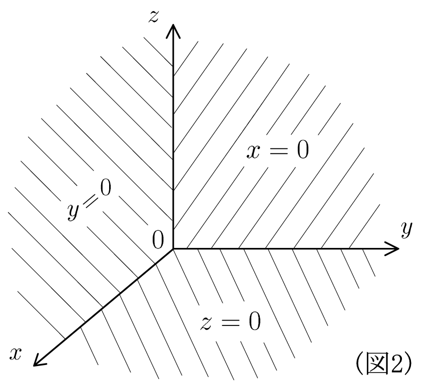
となる。よって (a, b, c, d を定数とする) x, y, z の 1 次式 $(*)'$ は平面の方程式である。

例 1　$d = 0$ の場合 $ax + by + cz = 0$ は原点 $(0, 0, 0)$ を通る平面である。特に

① 式 $z = 0$ は xy 平面を表す。

② 式 $x = 0$ は yz 平面を表す。

③ 式 $y = 0$ は xz 平面を表す。



(図2)

例 2　$c = -1$ の場合，$(*)'$ は

$(**)$　$z = ax + by + d$

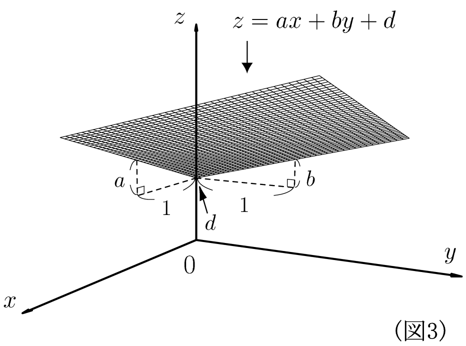
と書ける。この平面上にある点をあげる。

$x = 0,\ y = 0$ のとき $z = d$ より，点 $(0, 0, d)$ を通る。

$x = 1,\ y = 0$ のとき $z = a + d$ より，点 $(1, 0, a + d)$ を通る。

$x = 0,\ y = 1$ のとき $z = b + d$ より，点 $(0, 1, b + d)$ を通る。

a, b, d が正のとき平面 $(**)$ は図 3 のような平面である。



(図3)

問　平面 $z = -x - y + 1$ 上にある点を 3 点あげよ。

また、この平面を図示せよ。

＜ 2変数関数 ＞

例 1　① 縦 $x$cm，横 $y$cm の長方形の面積を $z$cm² とすると，$z=xy$ である。

② 底面が半径 $x$cm の円で、高さが $y$cm の円柱の体積を $z$cm³ とすると，$z=\pi x^2 y$ である。

一般に 3 つの変数 x,y,z があり，x,y のおのおのの値の組に対して、z の値がただ 1 つ定まるとき，z は x,y の**関数**であるという。このとき，x,y を**独立変数**，z を**従属変数**という。このように独立変数が 2 個の関数を **2 変数関数**という。z が x,y の関数であることを，f,g などの文字を用いて

$$z=f(x,y)\ ,\ z=g(x,y)\ ,\ \text{または}\ z=z(x,y)$$

のように書く。関数 $z=f(x,y)$ において，$x=a$, $y=b$ に対応する値を $f(a,b)$ で表す。

例 2　① $f(x,y)=\pi x^2 y$ のとき $f(1,2)=2\pi$ ，$f(3,5)=45\pi$

② $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ のとき $f(0,0)=3$ ，$f(1,1)=\sqrt{7}$ ，$f(3,0)=0$

関数 $z=f(x,y)$ において，独立変数の組 (x,y) のとり得る値の範囲を関数 f の**定義域**，従属関数 z のとり得る値の範囲を関数 f の**値域**という。定義域は特に断らない限り，$f(x,y)$ が意味をもつできるだけ広い範囲にとる。

例 3　$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ の場合、実数の範囲で考えるので、$9-x^2-y^2 \geqq 0$ より定義域は

<u>定義域：$x^2+y^2 \leqq 9$</u>

である。これは xy 平面の原点を中心とした半径 3 の円の内部である。また値域は $x=0,y=0$ のときが最大 (最大値$\sqrt{9}=3$) になるので

<u>値域：$0 \leqq z \leqq 3$</u>

である。

問　次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}$　　(2) $z=-\sqrt{16-x^2}$

＜ 2 変数関数のグラフ ＞

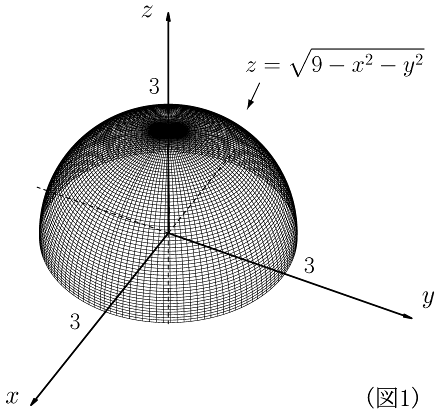
2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し，x と y の値を定めると，$z = f(x, y)$ を満たす点 (x, y, z) が決まる。定義域内で x, y を変動させると点 (x, y, z) の集合は，空間内において 1 つの図形をつくる。その図形を関数 $z = f(x, y)$ の**グラフ**という。図形が曲面のとき，それを**曲面** $z = f(x, y)$ という。また，$z = f(x, y)$ をその**曲面の方程式**という。

(注)　1 変数の場合と同様に $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$ が成り立つとき，$f(x, y)$ は点 (a, b) で**連続**であるという。$f(x, y)$ がその定義域内のすべての点で連続であるとき，$z = f(x, y)$ のグラフは曲面になる。

例 1　$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ の定義域は $x^2 + y^2 \leqq 9$ であり，値域は $0 \leqq z \leqq 3$ である。この式は

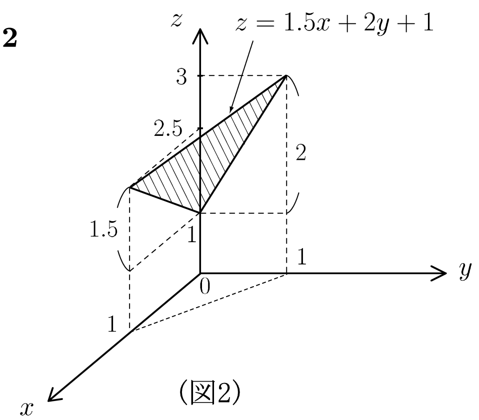
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad , \quad z \geqq 0$$

と同値であるから，グラフは原点 $(0, 0, 0)$ を中心とし，半径 3 の球面のうち $z \geqq 0$ の部分 (上半球面) である。



(図1)

例 2



(図2)

関数 $z = 1.5x + 2y + 1$ のグラフは平面を表す。

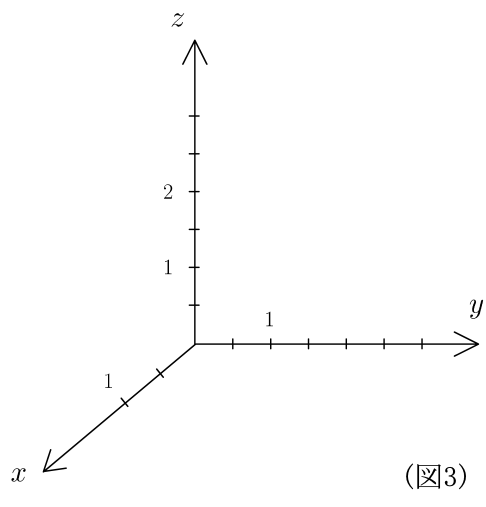
$$x \geqq 0 \quad , \quad y \geqq 0 \quad , \quad x + y \leqq 1$$

を定義域とするとき，グラフは図 2 の斜線部分の平面である。

問　$z = 2x + 1.5y + 0.5$ の定義域を

$$x \geqq 0\ ,\quad y \geqq 0\ ,\quad x + y \leqq 1$$

とするとき，グラフを図 3 に描け。



(図3)

< 偏微分 1 >

関数 $z = f(x,y)$ において，y を一定の値 b に固定すると，z は x だけの関数 $z = f(x,b)$ と考えることができる。この関数が $x = a$ において微分可能であるとき，関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) において，**x において偏微分可能**であるといい，その微分係数を $f_x(a,b)$ で表し，関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における **x についての偏微分係数**という。

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

y についての偏微分係数も同様であり，次のように表される。

$$f_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

関数 $z = f(x,y)$ が xy 平面上の領域 D 内のすべての点において x について偏微分可能であるとき，$f(x,y)$ は**領域 D で x について偏微分可能**であるという。このとき，D の各点 (x,y) に，その点における x についての偏微分係数を対応させる関数を $f(x,y)$ の **x についての偏導関数**といい，

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

と表す。また y についての偏導関数も同様に定義され，

$$f_y(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

と表す。

$f(x,y)$ が領域 D 内のすべての点で x についても y についても偏微分可能なとき，$f(x,y)$ は**領域 D で偏微分可能**という。今後考える対象とする 2 変数関数 $f(x,y)$ は常に定義域内で偏微分可能であるとする。

< 偏微分 2 >

2 変数関数 $f(x,y)$ の x についての偏導関数

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

を求めることを，$f(x,y)$ を$\boldsymbol{x}$ **について偏微分する**という。$f_x(x,y)$ を求めるためには，y を定数とみなして，$f(x,y)$ を x について微分すれば良い。

例　$f(x,y)=x^3-3x^2y+2xy^2-4y^3$ の場合

$f(x,1)=x^3-3x^2+2x-4$　より　$f_x(x,1)=(x^3-3x^2+2x-4)'=3x^2-6x+2$

$f(x,2)=x^3-6x^2+8x-32$　より　$f_x(x,2)=(x^3-6x^2+8x-32)'=3x^2-12x+8$

$f(x,y)=x^3-3x^2\times y+2x\times y^2-4y^3$ より，y を定数と考えて，x について微分すると

$$f_x(x,y)=(x^3)'-(3x^2)'\times y+(2x)'\times y^2-(4y^3)'=\boldsymbol{3x^2-6xy+2y^2}$$

(注) 定数を微分すると 0(ゼロ) になるので, x について微分すると $(4y^3)'=0$

問　$f(x,y)$ が次の各場合に，$f(x,1)$，$f(x,2)$，$f_x(x,1)$，$f_x(x,2)$，$f_x(x,y)$ を求めよ。

(1) $f(x,y)=x^3-2x^2y+xy^2+y^3$

$f(x,1)=$ 　　　　　　　, $f_x(x,1)=$

$f(x,2)=$ 　　　　　　　, $f_x(x,2)=$

$f_x(x,y)=$

(2) $f(x,y)=x^4-2x^2y^2+3xy^3-5y$

$f(x,1)=$ 　　　　　　　, $f_x(x,1)=$

$f(x,2)=$ 　　　　　　　, $f_x(x,2)=$

$f_x(x,y)=$

< 偏微分 3 >

2 変数関数 $f(x,y)$ の x についての偏導関数

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

を求めるためには，y を定数とみなして，$f(x,y)$ を x について微分すれば良い。

例　$f(x,y) = x\sin y + e^x \cos y + y^3 - 10$　　のとき

$$f_x(x,y) = (x)' \times \sin y + (e^x)' \times \cos y + \left(y^3 - 10\right)'$$

$$= 1 \times \sin y + e^x \times \cos y + 0$$

$$= \sin y + e^x \cos y$$

(注)　x について偏微分するとき，x のつかない項を偏微分すると 0 になる。

問　次の関数を x について偏微分せよ。

(1) $f(x,y) = 3x^2 - x + 2xy + 5y^2 - 6y + 4$

$f_x(x,y) =$

(2) $f(x,y) = x^5 + 5x^4y - x^3y^2 - 2x^2y^3 + 6xy^4 + 7y^6$

$f_x(x,y) =$

(3) $f(x,y) = xe^y + y^3e^{2x}$

$f_x(x,y) =$

(4) $f(x,y) = x^2\cos y + \sin x \cos y$

$f_x(x,y) =$

(5) $f(x,y) = x\log y - \dfrac{x^2}{y}$

$f_x(x,y) =$

＜ 偏微分 4 ＞

2 変数関数 $f(x,y)$ の y についての偏導関数

$$f_y(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

を求めることを，$f(x,y)$ を**y について偏微分する**という。$f_y(x,y)$ を求めるためには，x を定数とみなして，$f(x,y)$ を y について微分すれば良い。

例　$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ の場合

$f(1,y) = 1 - 3y + 2y^2 - 4y^3$　より　$f_y(1,y) = \left(1 - 3y + 2y^2 - 4y^3\right)' = -3 + 4y - 12y^2$

$f(2,y) = 8 - 12y + 4y^2 - 4y^3$　より　$f_y(2,y) = \left(8 - 12y + 4y^2 - 4y^3\right)' = -12 + 8y - 12y^2$

$f(x,y) = x^3 - \left(3x^2\right) \times y + (2x) \times y^2 - 4y^3$ より，x を定数と考えて，y について微分すると

$f_y(x,y) = \left(x^3\right)' - 3x^2 \times (y)' + (2x) \times \left(y^2\right)' - \left(4y^3\right)' = \boldsymbol{-3x^2 + 4xy - 12y^2}$

(注) x を定数と考えて，y について微分すると $\left(x^3\right)' = 0$ となる。

問　$f(x,y)$ が次の各場合に，$f(1,y)$, $f(2,y)$, $f_y(1,y)$, $f_y(2,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ。

(1) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + y^3$

$f(1,y) =$　　　　　　　　　　, $f_y(1,y) =$

$f(2,y) =$　　　　　　　　　　, $f_y(2,y) =$

$f_y(x,y) =$

(2) $f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + 3xy^3 - 5y$

$f(1,y) =$　　　　　　　　　　, $f_y(1,y) =$

$f(2,y) =$　　　　　　　　　　, $f_y(2,y) =$

$f_y(x,y) =$

＜偏微分 5＞

2 変数関数 $f(x,y)$ の y についての偏導関数

$$f_y(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

を求めるためには，x を定数とみなして，$f(x,y)$ を y について微分すれば良い。

例　$f(x,y) = x^5 + x\sin y + y^3 e^x - 10$　のとき

$$f_y(x,y) = \left(x^5\right)' + x \times (\sin y)' + \left(y^3\right)' \times e^x - (10)'$$

$$= 0 + x \times \cos y + 3y^2 \times e^x - 0$$

$$= x\cos y + 3y^2 e^x$$

(注)　y について偏微分するとき，y のつかない項を偏微分すると 0 になる。

問　次の関数を y について偏微分せよ。

(1) $f(x,y) = 3x^2 - x + 2xy + 5y^2 - 6y + 4$

$f_y(x,y) =$

(2) $f(x,y) = x^5 + 5x^4 y - x^3 y^2 - 2x^2 y^3 + 6xy^4 + 7y^6$

$f_y(x,y) =$

(3) $f(x,y) = xe^y + y^3 e^{2x}$

$f_y(x,y) =$

(4) $f(x,y) = x^2 \sin y + \sin x \cos y$

$f_y(x,y) =$

(5) $f(x,y) = x\log y - \dfrac{x^2}{y}$

$f_y(x,y) =$

＜ 偏微分 6 ＞

2 変数関数 $z = f(x,\ y)$ に対し，x に関する偏導関数を

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,\ y)$$

等の記号で表す (すべて同じ意味である)。ここで記号 ∂ は**デル**とか**ラウンドディー**などと呼ばれる。

同様にして，$z = f(x,\ y)$ の y に関する偏導関数を

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,\ y)$$

などの記号で表す。

(注) 1 変数関数 $y = f(x)$ の微分の場合は $\dfrac{dy}{dx}$ の記号を使うが，2 変数以上の関数の偏微分の場合は，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ のように，d のかわりに ∂ を用いる。

例 (1) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^n) = nx^{n-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^n) = 0$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}(y^n) = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^n) = ny^{n-1}$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\cos x \sin y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\cos x\right) \times \sin y = -\sin x \sin y$,

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\cos x \sin y) = \cos x \times \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\sin y\right) = \cos x \cos y$

(4) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right) = \sqrt{y} \times \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\dfrac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}$,

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\partial}{\partial y}\sqrt{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}$

問 次の偏導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3 - x^2y^2 + 3xy^5)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3 - x^2y^2 + 3xy^5)$

$=$ $=$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) =$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) =$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\log y}{x}\right) =$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\log y}{x}\right) =$

< 偏微分 7 >

2 変数関数 f と 1 変数関数 g との合成関数

$$z = g\big(f(x,\ y)\big)$$

を偏微分する場合,

$$u = f(x,\ y) \text{ とおくと, } z = g(u)$$

より, 1 変数関数の合成関数の微分と同じように,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \times \frac{\partial u}{\partial y}$$

が成り立つ。

例　$z = \sin(x^2 + 3xy)$ の場合,

$u = x^2 + 3xy$ とおくと $z = \sin u$

となるから,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{d}{du}\sin u\right) \times \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy)\right) \\ &= \cos u \times (2x + 3y) \\ &= \cos(x^2 + 3xy) \times (2x + 3y) = (2x + 3y)\cos(x^2 + 3xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \times \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{d}{du}\sin u\right) \times \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy)\right) \\ &= \cos u \times (3x) \\ &= \cos(x^2 + 3xy) \times 3x = 3x\cos(x^2 + 3xy) \end{aligned}$$

問　次の関数を偏微分せよ。

(1)　$z = (2x + y^2)^5$　　$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(2)　$z = \sqrt{1 - 2x + 3y^2}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(3)　$z = e^{3x - y^2}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(4)　$z = \log(1 - \sin x \cos y)$　　$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

< 偏微分 8 >

偏導関数の記号に慣れる練習をする。

例 (1) $f(x,\ y) = x^3 - 5xy^2 + y^4$ のとき,

$$f_x(x,\ y) = 3x^2 - 5y^2, \qquad f_y(x,\ y) = -10xy + 4y^3$$

(2) $z = e^{x+3y}$ のとき,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+3y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{x+3y}$$

(3) $z = \log(1 + x^2 + y^4)$ のとき,

$$z_x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^4}, \qquad z_y = \frac{4y^3}{1 + x^2 + y^4}$$

問 以下の偏導関数を求めよ。

(1) $f(x,\ y) = x^5 - x^4y + 2x^2y^3 - 7y^4$ のとき

$f_x(x,\ y)$

$=$

$f_y(x,\ y)$

$=$

(2) $f(x,\ y) = \cos(5x - y^2)$ のとき

$f_x(x,\ y)$

$=$

$f_y(x,\ y)$

$=$

(3) $z = \dfrac{1}{xy - 2y^3}$ のとき

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

(4) $z = \sqrt{xy + y^2}$ のとき

$z_x =$

$z_y =$

(5) $z = e^{3y - xy^2 + y^3}$ のとき

$z_x =$

$z_y =$

＜ 2 階偏導関数 1 ＞

2 変数関数 $z = f(x,\ y)$ を x に関して 2 回偏微分したもの,

すなわち $f_x(x,\ y)$ の x に関する偏導関数を

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}z\right) = f_{xx}(x,\ y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_x(x,\ y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(f(x,\ y)\Big) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(x,\ y)$$

等の記号で表し，x に関する **2 階偏導関数**という。全て同じ意味である。

同様に，$z = f(x,\ y)$ を y に関して 2 回偏微分したもの,

すなわち $f_y(x,\ y)$ の y に関する偏導関数を

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}z\right) = f_{yy}(x,\ y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_y(x,\ y)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(f(x,\ y)\Big) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,\ y)$$

等の記号で表し，y に関する 2 階偏導関数という。全て同じ意味である。

例　(1)　$f(x,\ y) = x^5 - 4x^3y^2 + 2xy^3 - y^6$ のとき

$f_x(x,\ y) = 5x^4 - 12x^2y^2 + 2y^3$　　$,\ f_y(x,\ y) = -8x^3y + 6xy^2 - 6y^5$

より　$f_{xx}(x,\ y) = 20x^3 - 24xy^2$　　$,\ f_{yy}(x,\ y) = -8x^3 + 12xy - 30y^4$

(2)　$z = \sin(2x + 3y)$ のとき,

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x + 3y)$　　$,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x + 3y)$

より

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4\sin(2x + 3y)$　　$,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9(\sin 2x + 3y)$

問　2 変数関数が以下の場合に，次の 2 階偏導関数を求めよ。

(1)　$f(x,\ y) = x^5 - 2x^4y + 3x^2y^2 + 4y^4$

$f_{xx}(x,\ y) =$　　　　　　　　$f_{yy}(x,\ y) =$

(2)　$z = \cos(2x)\sin(y^2)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$　　　　　　　　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$

< 2 階偏導関数 2 >

2 変数関数 $z=f(x,\ y)$ に対し，x に関する偏導関数 $f_x(x,\ y)$ を

さらに y に関して偏微分したものを

$$z_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xy}(x,\ y)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(f_x(x,\ y)\Big)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\Big(f(x,\ y)\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,\ y)$$

等の記号で表す。同様に，$z=f(x,\ y)$ の y に関する偏導関数

$f_y(x,\ y)$ をさらに x に関して偏微分したものを

$$z_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yx}(x,\ y)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(f_y(x,\ y)\Big)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big(f(x,\ y)\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,\ y)$$

等の記号で表す。

(注)　$z_{xy}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xy}$ の x のように，z(または f) に近い文字が先に偏微分する変数である。

例　(1)　$f(x,\ y)=x^6-5x^4y+3x^2y^3-4y^4$ のとき

$f_x(x,\ y)=6x^5-20x^3y+6xy^3$

より　$f_{xy}(x,\ y)=-20x^3+18xy^2$

$f_y(x,\ y)=-5x^4+9x^2y^2-16y^3$

より　$f_{yx}(x,\ y)=-20x^3+18xy^2$

(2)　$z=\log(x^2+3y^2)$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+3y^2}\quad \text{より}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{12xy}{(x^2+3y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6y}{x^2+3y^2}\quad \text{より}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{12xy}{(x^2+3y^2)^2}$$

(注)　$f_{xy}(x,\ y)$ と $f_{yx}(x,\ y)$ が連続の場合には，両者は等しい。(証明は P.52)

問　2 変数関数が以下の場合に，次の偏導関数を求めよ。

(1)　$f(x,\ y)=x^5-2x^4y+3x^2y^2+4y^4$

$f_x(x,\ y)=$　　　　　　　　$f_y(x,\ y)=$

$f_{xy}(x,\ y)=$　　　　　　　　$f_{yx}(x,\ y)=$

(2)　$z=\cos(2x)\sin(y^2)$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$　　　　　　　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$　　　　　　　　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

< 偏微分係数 >

2 変数関数 $z = f(x,\ y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x,\ y)$ の $(x,\ y) = (a,\ b)$ のとき

の値 $f_x(a,\ b)$ を，**点$(a,\ b)$におけるxに関する偏微分係数**という。偏導関数の定義より

$$\boxed{f_x(a,\ b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,\ b) - f(a,\ b)}{h}}$$

である。同様に y に関する偏導関数 $f_y(x,\ y)$ の $(x,\ y)$=$(a,\ b)$ のときの値

$f_y(a,\ b)$ を, **点 $(a,\ b)$におけるyに関する偏微分係数**という。偏導関数の定義より

$$\boxed{f_y(a,\ b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,\ b+k) - f(a,\ b)}{k}}$$

となる。

例　$f(x,\ y) = x^2 - 4xy + y^3$ のとき

$$f_x(x,\ y) = 2x - 4y \ \ ,\ \ f_y(x,\ y) = -4x + 3y^2$$

より $(x,\ y) = (1,\ 3)$ における偏微分係数は,

$f_x(1,\ 3) = 2 \times 1 - 4 \times 3 = -10$,　$f_y(1,\ 3) = -4 \times 1 + 3 \times 3^2 = 23$

である。

問　2 変数関数が以下の場合に偏導関数および偏微分係数を求めよ。

(1)　$f(x,\ y) = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 3y^4$

$f_x(x,\ y) =$　　　　　　　$f_y(x,\ y) =$

$f_x(2,\ 1) =$　　　　　　　$f_y(2,\ 1) =$

(2)　$f(x,\ y) = \cos x \sin(2y)$

$f_x(x,\ y) =$　　　　　　　$f_y(x,\ y) =$

$f_x\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{4}\right) =$　　　　　　　$f_y\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{4}\right) =$

(3)　$f(x,\ y) = 2x \log(y^3)$

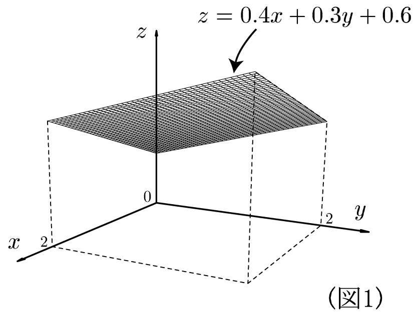
$f_x(x,\ y) =$　　　　　　　$f_y(x,\ y) =$

$f_x(1,\ 1) =$　　　　　　　$f_y(1,\ 1) =$

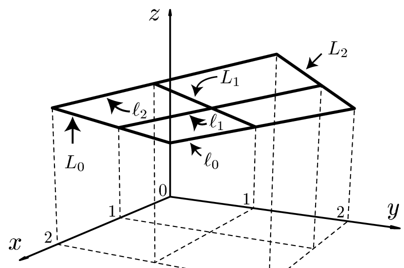
＜ 2 面の共通部分としての線 ＞

2 面の共通部分としての線を考える。

例 1　$f(x,\ y) = 0.4x + 0.3y + 0.6$ のとき，$z = f(x,\ y)$ の グラフは $\begin{matrix} 0 \leqq x \leqq 2 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{matrix}$ の範囲では図 1 のような平面である。この面と平面 $x = a$ との共通部分を直線 ℓ_a とし，平 面 $y = b$ との共通部分を直線 L_b とする。(図 2)



(図1)



(図2)

(1) $x = 0$ のとき $f(0,\ y) = 0.3y + 0.6$ より，直線 ℓ_0 の方程式は

$\underline{\ell_0\ :\ \ x = 0,\ \ z = 0.3y + 0.6}$

(2) $x = 1$ のとき $f(1,\ y) = 0.3y + 1$ より，直線 ℓ_1 の方程式は

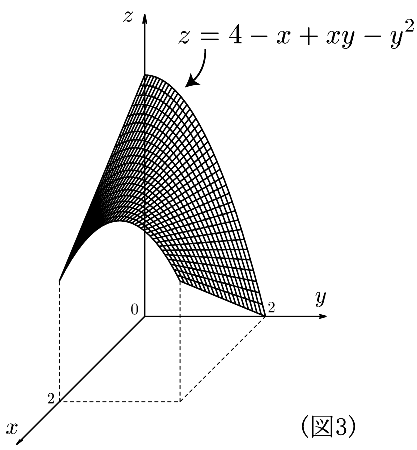
$\underline{\ell_1\ :\ \ x = 1,\ \ z = 0.3y + 1}$

(3) $y = 2$ のとき $f(x,\ 2) = 0.4x + 1.2$ より，直線 L_2 の方程式は

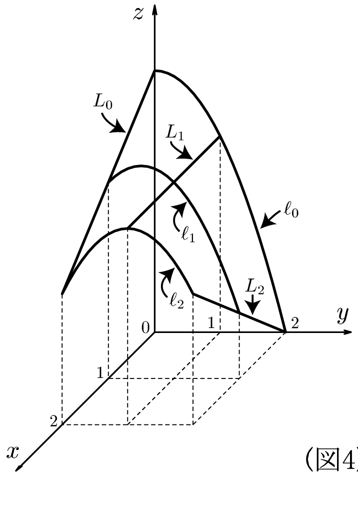
$\underline{L_2\ :\ \ y = 2,\ \ z = 0.4x + 1.2}$

問 1　この例で，直線 ℓ_2，L_0，L_1 の方程式を求めよ。

例 2　$f(x,\ y) = 4 - x + xy - y^2$ の場合，$z = f(x,\ y)$ のグラフは図 3 のような曲面である。この曲面と平面 $x = a$ との共通部分を曲線 ℓ_a とし，平面 $y = b$ との共通部分を曲線 L_b とする。(図 4)



(図3)



(図4)

(1) $x = 0$ のとき $f(0,\ y) = 4 - y^2$ より，曲線 ℓ_0 の方程式は

$\underline{\ell_0\ :\ \ x = 0,\ \ z = 4 - y^2}$

(2) $x = 1$ のとき $f(1,\ y) = 3 + y - y^2$ より，曲線 ℓ_1 の方程式は

$\underline{\ell_1\ :\ \ x = 1,\ \ z = 3 + y - y^2}$

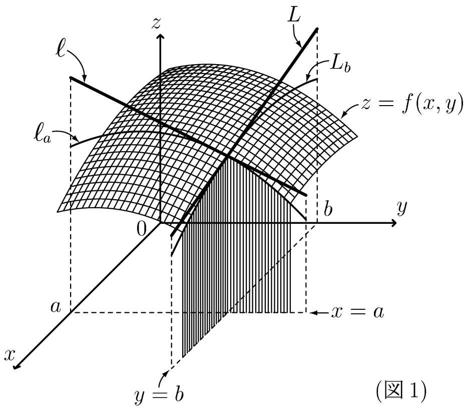
(3) $y = 0$ のとき $f(x,\ 0) = 4 - x$ より，曲線 L_0 の方程式は

$\underline{L_0\ :\ \ y = 0,\ \ z = 4 - x}$

問 2　例 2 で，曲線 ℓ_2，L_1，L_2 の方程式を求めよ。

< 偏微分係数の幾何学的意味 >

2 変数関数 $z = f(x,\ y)$ のグラフは曲面を 表す。この曲面と平面 $y = b$ との共通部分を 曲線 L_b とする (図 1)。曲線 L_b を xz 平面の 方から見ると，図 2 のような曲線になる。こ のとき，この曲線 $z = f(x,\ b)$ の $x = a$ にお ける接線 L の傾きが $f_x(a,\ b)$ である。

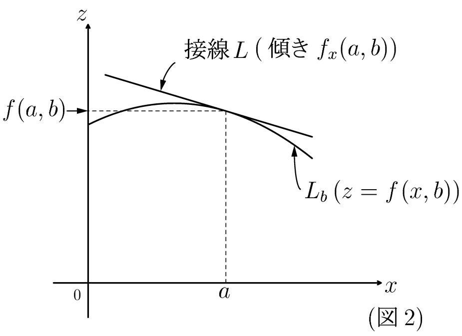


(図 1)

$\boxed{f_x(a,\ b) = \text{接線 } L \text{ の傾き}}$

接線 L の方程式
$y = b,\quad z = f_x(a,\ b)(x - a) + f(a,\ b)$

つまり $\boldsymbol{f_x(a,\ b)}$ は曲面 $z = f(x,\ y)$ の点 $(a,\ b)$ における $\boldsymbol{x}$ **軸方向の傾き** を意味する。



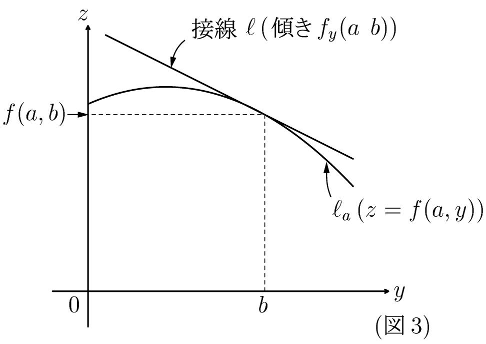
(図 2)

同様にして，この曲面と平面 $x = a$ との共通 部分を曲線 ℓ_a とする (図 1)。ℓ_a のグラフは図 3 のような曲線である。この曲線 $z = f(a,\ y)$ の $y = b$ における接線 ℓ の傾きが $f_y(a,\ b)$ である。

$\boxed{f_y(a,\ b) = \text{接線 } \ell \text{ の傾き}}$

接線 ℓ の方程式
$x = a,\quad z = f_y(a,\ b)(y - b) + f(a,\ b)$

つまり $\boldsymbol{f_y(a,\ b)}$ は曲面 $z = f(x,\ y)$ の点 $(a,\ b)$ における $\boldsymbol{y}$ **軸方向の傾き** を意味する。



(図 3)

問　$f(x,\ y) = x^2 - 3x + xy - y^2 + 2y - 4,\quad (a,\ b) = (3,\ 2)$ のとき，$f_x(x,\ y)$，$f_y(x,\ y)$，$f(a,\ b)$，$f_x(a,\ b)$，$f_y(a,\ b)$ を求め，接線 L と ℓ の方程式を求めよ。

$f_x(x,\ y) =$　　　　　　$f_y(x,\ y) =$

$f(3,\ 2) =$　　　　　　$f_x(3,\ 2) =$　　　　　　$f_y(3,\ 2) =$

$=$　　　　　　$=$　　　　　　$=$

接線 L の方程式
$y = 2$

$z =$

接線 ℓ の方程式
$x = 3$

$z =$

< 全微分可能性 >

[微分可能性]

1 変数関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは，極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lambda$$

が存在するときである。この式を書きかえると

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)-\lambda h}{h}\right|=0$$

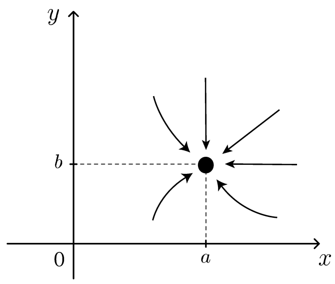
となる。この定数 λ を $x=a$ における微分係数といい，$\lambda=f'(a)$ と書く。

[全微分可能性]

2 変数関数 $f(x,\ y)$ が $(x,\ y)=(a,\ b)$ で**全微分可能**であるとは

$$(*)\quad \boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)-\lambda_1 h-\lambda_2 k|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0}$$

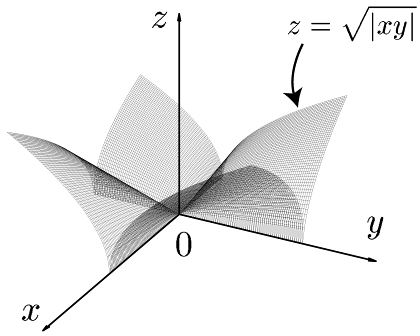
となる定数 $\lambda_1,\ \lambda_2$ が存在するときである。

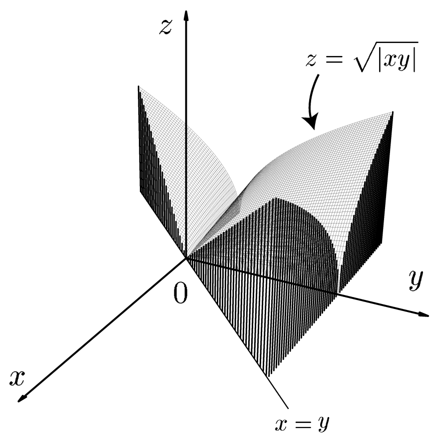


(注 1) $(a+h,\ b+k)$ が $(a,\ b)$ に近づく近づき方はいろいろである (右図参照)。どんな方向から近づいても，$(*)$ の極限値は 0 になる。すなわちどんな方向からでも微分可能になる。(どんな方向からも接線が引ける。)

(注 2) 全微分可能であれば偏微分可能であり，$\lambda_1=f_x(a,\ b),\ \lambda_2=f_y(a,\ b)$ となる。しかし，偏微分可能であっても全微分可能であるとは限らない。

例 $f(x,\ y)=\sqrt{|xy|}$ は $(x,\ y)=(0,\ 0)$ で偏微分可能だが全微分可能ではない。



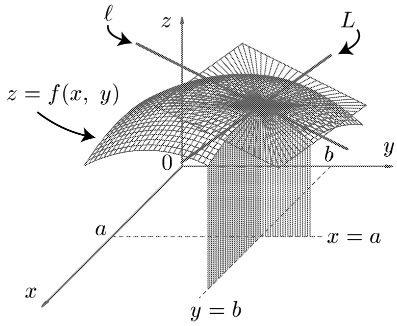


$x=y$ 方向からは接線が定まらない。

(注 3) 偏導関数 $f_x,\ f_y$ が点 $(a,\ b)$ において連続であれば，関数 $f(x,\ y)$ は点 $(a,\ b)$ において全微分可能である。(証明は P50)

(注 4) $f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で全微分可能であれば，$(a,\ b)$ で連続である。

< 接平面 >



$f(x,\ y)$ が $(x,\ y) = (a,\ b)$ で全微分可能であるとき，$h \fallingdotseq 0,\ k \fallingdotseq 0$　のとき　近似式

$$f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) - \lambda_1 h - \lambda_2 k \fallingdotseq 0$$

$\big(\lambda_1 = f_x(a,\ b),\ \lambda_2 = f_y(a,\ b)\big)$ が成り立つ。

今 $x = a+h,\ y = b+k$ とおくと近似式

$$\boxed{(x,\ y) \fallingdotseq (a,\ b) \text{ であれば } f(x,\ y) \fallingdotseq \lambda_1(x-a) + \lambda_2(y-b) + f(a,\ b)} \quad (*)$$

が成り立つ。この式の右辺

$$z = \lambda_1(x-a) + \lambda_2(y-b) + f(a,\ b) \cdots (**)$$

は平面の方程式である。従って近似式 $(*)$ は曲面 $z = f(x,\ y)$ を平面 $(**)$ で近似できることを示す。この平面を**接平面**という。その式は

$$\boxed{z = f_x(a,\ b)(x-a) + f_y(a,\ b)(y-b) + f(a,\ b)} \quad \textbf{(接平面の方程式)}$$

である。$x = a$ のとき $z = f_y(a,\ b)(y-b) + f(a,\ b)$ は直線 ℓ を表し，$y = b$ のとき $z = f_x(a,\ b)(x-a) + f(a,\ b)$ は直線 L を表す (右上図参照)。

例題　$f(x,\ y) = x^2 + xy + y$ のとき $(x,\ y) = (3,\ 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

(解)　$f_x(x,\ y) = 2x + y,\ \ f_y(x,\ y) = x + 1$ より

$f_x(3,\ 1) = 6 + 1 = 7,\ \ f_y(3,\ 1) = 3 + 1 = 4,\ \ f(3,\ 1) = 9 + 3 + 1 = 13$ だから

接平面の方程式は

$z = 7(x-3) + 4(y-1) + 13$　　　　(答) $\underline{z = 7x + 4y - 12}$

問　次の接平面の方程式を求めよ。

(1) $f(x,\ y) = x^2 - xy$ のとき $(x,\ y) = (3,\ 1)$ における接平面

(2) $f(x,\ y) = x^3 - xy + 2y^2$ のとき $(x,\ y) = (1,\ 2)$ における接平面

< 合成関数の微分法 1 >

全微分可能な 2 変数関数 $f(x,\ y)$ と微分可能な 1 変数関数 $x(t),\ y(t)$ に対し，合成関数 $z = f\big(x(t),\ y(t)\big)$ は t の関数である。この導関数を考えたい。

t の増分 Δt に対し、$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t+\Delta y) - y(t)$ とおくと ,

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \ , \qquad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

である。$f(x,\ y)$ は $(x,\ y)$ で全微分可能だから，$h = \Delta x,\ k = \Delta y$

$$\varepsilon = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) - f_x(x,\ y)\Delta x - f_y(x,\ y)\Delta y$$

とおくと，$\displaystyle \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ となる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f\big(x(t),\ y(t)\big) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\big(x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t)\big) - f\big(x(t),\ y(t)\big)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\big(x(t)+\Delta x,\ y(t)+\Delta y\big) - f\big(x(t),\ y(t)\big)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_x\big(x(t),\ y(t)\big)\Delta x + f_y\big(x(t),\ y(t)\big)\Delta y + \varepsilon}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ f_x\big(x(t), y(t)\big)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y\big(x(t), y(t)\big)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\varepsilon}{\Delta t} \right\}
\end{aligned}$$

ここで $\Delta t \to 0$ のとき $\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$，　$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to \dfrac{dx}{dt}$，　$\dfrac{\Delta y}{\Delta t} \to \dfrac{dy}{dt}$　より

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \times \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = 0 \times \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0$$

となるから

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ f_x(x(t), y(t))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t), y(t))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\varepsilon}{\Delta t} \right\} = f_x(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}$$

より

$$\boxed{\frac{d}{dt} f\big(x(t),\ y(t)\big) = f_x\big(x(t),\ y(t)\big)\frac{dx}{dt} + f_y\big(x(t),\ y(t)\big)\frac{dy}{dt}}$$

が得られる。$z = f\big(x(t),\ y(t)\big)$ とおくと

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}}$$

と書ける。

< 合成関数の微分法 2 >

2 変数合成関数 $z=f\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)$ の変数 t に関する導関数は前ページの結果より

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}f\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)=f_x(x,\ y)\frac{dx}{dt}+f_y(x,\ y)\frac{dy}{dt}$$

となる。ここで

$$f_x(x,\ y)=\frac{\partial z}{\partial x}\quad,\quad f_y(x,\ y)=\frac{\partial z}{\partial y}$$

より

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}}$$

が成り立つ。

例題　2 変数関数 $f(x,\ y)$ に対し，次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}f(1+2t,\ 4+3t)$　　(2) $\dfrac{d}{d\theta}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

(解)　(1) $x=1+2t,\ y=4+3t,\ z=f(x,\ y)$ とおくと

$$\frac{d}{dt}f(1+2t,\ 4+3t)=\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$

$$=f_x(x,\ y)\times 2+f_y(x,\ y)\times 3$$

$$=2f_x(1+2t,\ 4+3t)+3f_y(1+2t,\ 4+3t)$$

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=f(x,\ y)$ とおくと，θ に関する微分だから，r を定数とみて

$$\frac{d}{d\theta}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=\frac{dz}{d\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{d\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{d\theta}$$

$$=f_x(x,\ y)\times(-r\sin\theta)+f_y(x,\ y)\times(r\cos\theta)$$

$$=-r\sin\theta f_x(r\cos\theta,\ r\sin\theta)+r\cos\theta f_y(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

問　2 変数関数 $f(x,\ y)$ に対し，次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}f(2-3t,\ 4-5t)$

(2) $\dfrac{d}{dr}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

< 合成関数の微分法 3 >

今後，2 変数関数 $f(x,\ y)$ は何回でも偏微分可能であり，$f_{xy} = f_{yx}$ が常になりたっているとする。

例　2 変数関数 $f(x,\ y)$ と定数 $a,\ b$ に対し，$z = f(a+2t,\ b+3t)$ の導関数は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}f(a+2t,\ b+3t) = 2f_x(a+2t,\ b+3t) + 3f_y(a+2t,\ b+3t)$$

であった。2 階導関数 $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ を求めたい。f_x，f_y を t で微分すると，

$$\frac{d}{dt}f_x(a+2t,\ b+3t) = 2f_{xx}(a+2t,\ b+3t) + 3f_{xy}(a+2t,\ b+3t)$$

$$\frac{d}{dt}f_y(a+2t,\ b+3t) = 2f_{yx}(a+2t,\ b+3t) + 3f_{yy}(a+2t,\ b+3t)$$

となる。ここで $f_{xy} = f_{yx}$ より

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}f(a+2t,\ b+3t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}f(a+2t, b+3t)\right\} = \frac{d}{dt}\left\{2f_x(a+2t, b+3t) + 3f_y(a+2t, b+3t)\right\} \\ &= 2\left\{\frac{d}{dt}f_x(a+2t,\ b+3t)\right\} + 3\left\{\frac{d}{dt}f_y(a+2t,\ b+3t)\right\} \\ &= 2\left\{2f_{xx}(a+2t,\ b+3t) + 3f_{xy}(a+2t,\ b+3t)\right\} \\ &\quad +3\left\{2f_{yx}(a+2t,\ b+3t) + 3f_{yy}(a+2t,\ b+3t)\right\} \\ &= 4f_{xx}(a+2t,\ b+3t) + 12f_{xy}(a+2t,\ b+3t) + 9f_{yy}(a+2t,\ b+3t)\end{aligned}$$

問　2 変数関数 $f(x,\ y)$ と定数 $a,\ b,\ h,\ k$ に対し，次の合成関数の 2 階導関数を求めよ。

(1) $z = f(a+4t,\ b+5t)$

$$\frac{d^2z}{dt^2} =$$

(2) $z = f(a+ht,\ b+kt)$

$$\frac{d^2z}{dt^2} =$$

< 合成関数の微分法 4 >

x と y が t の関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ の場合, $z = f\big(x(t), y(t)\big)$ に対し

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}}$$

である。今 x と y が、2 変数 u, v の関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ の場合、

関数 $z = f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$ に対する偏導関数は, 次の公式

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v}}$$

で求められる。

問 1　$f(x, y) = e^x \sin y$,　$x = 2u + 3v$,　$y = u^2 v^3$ のとき

$z = f(2u + 3v, u^2 v^3) = e^{2u+3v} \sin(u^2 v^3)$ に対して偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ。

問 2　u と v の関数 z が次の各場合に, 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ。

(1) $z = e^{3u+4v} \cos(u^3 + v^2)$

(2) $z = \sqrt{2u + 3v} + \log(u^3 v^2)$

＜ 2 変数関数の近似式 ＞

2 変数関数 $f(x,\ y)$ は何回でも偏微分可能で，各偏導関数は連続であるとする。定数 a，b，h，k に対して $\varphi(t)=f(a+ht,\ b+kt)$ とおく，合成関数の微分法より

$$\varphi'(t)=f_x(a+ht,\ b+kt)h+f_y(a+ht,\ b+kt)k$$

$$\varphi''(t)=f_{xx}(a+ht,\ b+kt)h^2+2f_{xy}(a+ht,\ b+kt)hk+f_{yy}(a+ht,\ b+kt)k^2$$

となる。ここで $n=2$ の場合のテーラーの定理から

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\frac{\varphi''(\theta)}{2!}t^2 \qquad (0<\theta<t)$$

をみたす θ が存在する。$t=1$ のとき $\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\dfrac{1}{2}\varphi''(\theta)$ より

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b)+f_x(a,\ b)h+f_y(a,\ b)k +\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a',\ b')h^2+2f_{xy}(a',\ b')hk+f_{yy}(a',\ b')k^2\right\}$$

となる。ただし $a'=a+\theta h$，$b'=b+\theta k$ である。

ここで h と k を十分小さくとると $a'\fallingdotseq a$，$b'\fallingdotseq b$，$f_{xx}(a',\ b')\fallingdotseq f_{xx}(a,\ b)$

$f_{xy}(a',\ b')\fallingdotseq f_{xy}(a,\ b)$，$f_{yy}(a',\ b')\fallingdotseq f_{yy}(a,\ b)$ より次の近似式が成り立つ。

$h\fallingdotseq 0$，$k\fallingdotseq 0$ のとき

$$f(a+h,\ b+k)\fallingdotseq f(a,\ b)+f_x(a,\ b)h+f_y(a,\ b)k +\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a,\ b)h^2+2f_{xy}(a,\ b)hk+f_{yy}(a,\ b)k^2\right\}$$

が成り立つ。これを $f(x,\ y)$ の $(x,\ y)=(a,\ b)$ の近くでの **2 次近似式**という。

なお，h，k が十分 0 に近いときは h^2，hk，k^2 をほぼ 0 とおくと次の近似式が得られる。

$h\fallingdotseq 0$，$k\fallingdotseq 0$ のとき

$$f(a+h,\ b+k)\fallingdotseq f(a,\ b)+f_x(a,\ b)h+f_y(a,\ b)k$$

これを**一次近似式**という。

< 判別式 >

2 変数関数 $f(x,\ y)$ は $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つものとする (以後は特に断らない)。この関数 f の $(x,\ y) = (a,\ b)$ における 2 階偏微分係数

$$f_{xx}(a,\ b)\ \ ,\quad f_{xy}(a,\ b)\ \big(= f_{yx}(a,\ b)\big)\ \ ,\quad f_{yy}(a,\ b)$$

に対し,

$$\boxed{D(a,\ b) = \big\{f_{xy}(a,\ b)\big\}^2 - f_{xx}(a,\ b) \times f_{yy}(a,\ b)}$$

とおく。

例　$f(x,\ y) = 5x^2 - 4xy^2 + y^3$ の場合に $D(3,\ 2)$ を求めたい。

$f_x(x,\ y) = 10x - 4y^2$,　　$f_y(x,\ y) = -8xy + 3y^2$,

$f_{xx}(x,\ y) = 10$,　　$f_{xy}(x,\ y) = -8y$,　　$f_{yy}(x,\ y) = -8x + 6y$,

$f_{xx}(3,\ 2) = 10$,　　$f_{xy}(3,\ 2) = -16,$　　$f_{yy}(3,\ 2) = -24 + 12 = -12$,

より,

$$D(3,\ 2) = \{f_{xy}(3,\ 2)\}^2 - f_{xx}(3,\ 2) \times f_{yy}(3,\ 2) = (-16)^2 - 10 \times (-12) = 376$$

問　2 変数関数 $f(x,\ y)$ が以下の場合に，$D(2,\ 1)$ を求めよ。

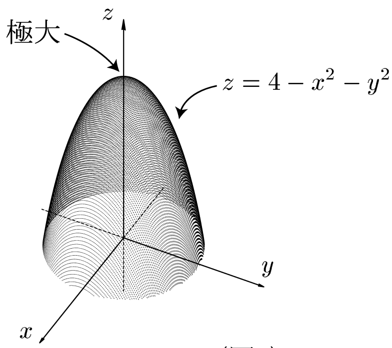
(1) $f(x,\ y) = x^2 - 3xy^2 + y^4$

(2) $f(x,\ y) = x^2y^2 - 3x + 4y - 5$

＜ 2 変数関数の極大･極小 1 ＞

2 変数関数 $f(x,\ y)$ と点 $(a,\ b)$ に対し $(a,\ b)$ の近くの $(x,\ y)$ に対し $f(a,\ b) > f(x,\ y)$ ならば，$f(x,\ y)$ は $(a,\ b)$ で**極大**という。また，$f(a,\ b) < f(x,\ y)$ ならば**極小**という。

問 1　$f(x,\ y) = 4 - x^2 - y^2$ は $(x,\ y) = (0,\ 0)$ で，極大 になる。(図 1) このとき $f(0,\ 0) = 4$ を**極大値**とい う。次の偏微分係数を求めよ。



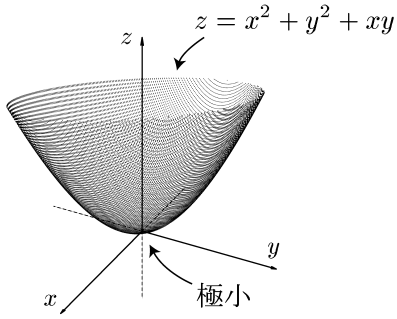
(図1)

$f_x(0,\ 0) =$ 　　　　, $f_y(0,\ 0) =$ 　　　　, $f_{xx}(0,\ 0) =$

$D(0,\ 0) = \{f_{xy}(0,\ 0)\}^2 - f_{xx}(0,\ 0) \times f_{yy}(0,\ 0)$

$=$

問 2　$f(x,\ y) = x^2 + y^2 + xy$ は $(x,\ y) = (0,\ 0)$ で，極小 になる。(図 2) このとき $f(0,\ 0) = 0$ を**極小値**とい う。次の偏微分係数を求めよ。



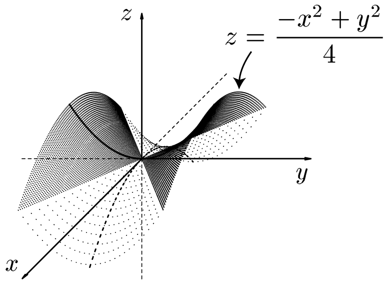
(図2)

$f_x(0,\ 0) =$ 　　　　, $f_y(0,\ 0) =$ 　　　　, $f_{xx}(0,\ 0) =$

$D(0,\ 0) = \{f_{xy}(0,\ 0)\}^2 - f_{xx}(0,\ 0) \times f_{yy}(0,\ 0)$

$=$

問 3　$f(x,\ y) = \dfrac{-x^2 + y^2}{4}$ のグラフは図 3 のようになり，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときは極大でも極小でもない。このグラ フの原点のような場合を **鞍点**(あんてん) または **峠点**(とうげてん) という。次の偏微分係数を求めよ。



(図3)

$f_x(0,\ 0) =$ 　　　　, $f_y(0,\ 0) =$ 　　　　, $f_{xx}(0,\ 0) =$

$D(0,\ 0) = \{f_{xy}(0,\ 0)\}^2 - f_{xx}(0,\ 0) \times f_{yy}(0,\ 0)$

$=$

$<$ 2 変数関数の極大 · 極小 2 $>$

2 変数関数 $z = f(x,\ y)$ が $(x,\ y) = (a,\ b)$ で極値 (極大値又は極小値) をとる場合，そこでの x 軸方向の傾きと y 軸方向の傾きは共に 0 (ゼロ)，すなわち

$$f_x(a,\ b) = 0, \quad f_y(a,\ b) = 0 \cdots \text{(条件 1)}$$

である。これを条件 1 とする。ただし，条件 1 が成り立っても，鞍点 (峠点) のように極値にならない場合がある。これから極値をとる詳しい条件を調べる。

23 ページの 2 次近似式より，$h \fallingdotseq 0,\ k \fallingdotseq 0$ のとき

$$f(a+h,\ b+k) \fallingdotseq f(a,\ b) + f_x(a,\ b)hx + f_y(a,\ b)k + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a,\ b)h^2 + 2f_{xy}(a,\ b)hk + f_{yy}(a,\ b)k^2\right\}$$

である。ここで条件 1 から $f_x(a,\ b) = f_y(a,\ b) = 0$ であるので

$$f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) \fallingdotseq \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a,\ b)h^2 + 2f_{xy}(a,\ b)hk + f_{yy}(a,\ b)k^2\right\} = \varDelta f$$

とおく。今

$$A = f_{xx}(a,\ b)\ ,\quad B = f_{xy}(a,\ b)\ ,\quad C = f_{yy}(a,\ b)\ ,\quad D = B^2 - AC$$

とおくと

$$\varDelta f = \frac{1}{2}\left\{Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right\}$$

となる。P53 より，$\varDelta f$ の正負は次のようになる。

(1) $D < 0$ で $A > 0$ または $C > 0$ のとき，$(h,\ k) \neq (0,\ 0)$ なる $(h,\ k)$ に対し常に $\varDelta f > 0$

(2) $D < 0$ で $A < 0$ または $C < 0$ のとき，$(h,\ k) \neq (0,\ 0)$ なる $(h,\ k)$ に対し常に $\varDelta f < 0$

(3) $D > 0$ のとき　$\varDelta f$ は正負両方の値をもつ。

(注 1) $D = B^2 - AC < 0$ のとき A と C は同符号である。

(注 2) $(h,\ k) \neq (0,\ 0)$ なる十分小さい $h,\ k$ に対し $\varDelta f > 0$ ならば $f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) > 0$

であるから $f(x,\ y)$ は $(x,\ y) = (a,\ b)$ で極小になる。すなわち，

$f_x(a,\ b) = f_y(a,\ b) = 0$，$D(a,\ b) < 0$ で $f_{xx}(a,\ b) > 0$(または $f_{yy}(a,\ b) > 0$) のとき

$f(x,\ y)$ は $a,\ b$ で極小になる。

問　$f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で極大になるための条件を $f_x(a,\ b)$，$f_y(a,\ b)$，$f_{xx}(a,\ b)$，$f_{yy}(a,\ b)$，$D(a,\ b)$ を用いて表せ。

< 2 変数関数の極大 · 極小 3 >

2 変数関数の極値の判定条件は，前ページの結果より

(1) $f_x(a,\ b) = f_y(a,\ b) = 0$ ， $D(a,\ b) < 0$ ， $f_{xx}(a,\ b) > 0$ ならば 極小

(2) $f_x(a,\ b) = f_y(a,\ b) = 0$ ， $D(a,\ b) < 0$ ， $f_{xx}(a,\ b) < 0$ ならば 極大

である。厳密な証明は P54。

(注) 2 変数関数 $f(x,\ y)$ に対して，$f_x(a,\ b) = f_y(a,\ b) = 0$ となる点 $(a,\ b)$ を f の**停留点**という。

例題 $f(x,\ y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 4y - 4x$ の極値を調べよ。

(解) $f_x(x,\ y) = 4x + 2y - 4$ ， $f_y(x,\ y) = 2y + 2x - 4$

$f_{xx}(x,\ y) = 4$ ， $f_{xy}(x,\ y) = 2$ ， $f_{yy}(x,\ y) = 2$

である。そこで $f_x(a,\ b) = f_y(a,\ b) = 0$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} f_x(a,\ b) &= 4a + 2b - 4 = 0 \\ f_y(a,\ b) &= 2a + 2b - 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

この連立方程式を解くと，$a = 0,\ b = 2$ となる。従って停留点は $(a,\ b) = (0,\ 2)$ である。

このとき

$$D(0,\ 2) = \{f_{xy}(0,\ 2)\}^2 - f_{xx}(0,\ 2) \times f_{yy}(0,\ 2) = 2^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$$

$$f_{xx}(0,\ 2) = 4 > 0 \qquad \text{より　極小}$$

(答) $(x,\ y) = (0,\ 2)$ のとき　極小値　$f(0,\ 2) = -4$　をとる。

問 $f(x,\ y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 2y$ の極値を調べよ。

< 2 変数関数の極大 · 極小 4 >

2 変数関数 $f(x,\ y)$ の極値を調べるときは，停留点 ($f_x = f_y = 0$ となる点) を求めて，そのときの $D(a,\ b)$ が負 (マイナス) ならば，$f_{xx} > 0$ のとき極小，$f_{xx} < 0$ のとき極大であった。実は

「 $D > 0$ のときは鞍点になる」

事が分かっている。証明は P55。従ってこのとき極値をとらない。

又，$D = 0$ のときは (極値を取る場合と取らない場合の両方があって) 判定できない。

例題　$f(x,\ y) = -x^3 - y^3 + 3xy$ の極値を調べよ。

(解)　　$f_x = -3x^2 + 3y$ ，$f_y = -3y^2 + 3x$

$f_{xx} = -6x$ ，$f_{xy} = 3$ ，$f_{yy} = -6y$

である。 $f_x = f_y = 0$ とおいて，連立方程式

$$\begin{cases} -3x^2 + 3y = 0 \\ -3y^2 + 3x = 0 \end{cases}$$

を解くと，停留点は $(x,\ y) = (0,\ 0)$ と $(x,\ y) = (1,\ 1)$ の 2 点である。

(1)　$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき

$D(0,\ 0) = \{f_{xy}(0,\ 0)\}^2 - f_{xx}(0,\ 0) \times f_{yy}(0,\ 0) = 3^2 - 0 \times 0 = 9 > 0$

よりこのとき，極値をとらない。

(2)　$(x,\ y) = (1,\ 1)$ のとき

$D(1,\ 1) = \{f_{xy}(1,\ 1)\}^2 - f_{xx}(1,\ 1) \times f_{yy}(1,\ 1) = 3^2 - (-6) \times (-6) = -27 < 0$

$f_{xx}(1,\ 1) = -6 \times 1 = -6 < 0$ より，このとき極大

(答)　$(x,\ y) = (1,\ 1)$ のとき 極大値 $f(1,\ 1) = 1$ をとる。

問　$f(x,\ y) = -2x^3 - 3x^2 - y^2$ の極値を調べよ。

< 2 変数関数の最大 · 最小 1 >

2 変数関数 $f(x,\ y)$ の定義域を D とする。

① D 内の全ての点 $(x,\ y)$ に対し，$f(x,\ y) \leqq f(a,\ b)$ を満たす D 内の点 $(a,\ b)$ が存在するとき，f は点 $(a,\ b)$ で**最大**になるといい，そのときの $f(a,\ b)$ の値を**最大値**という。

② D 内の全ての点 $(x,\ y)$ に対し，$f(x,\ y) \geqq f(a,\ b)$ を満たす D 内の点 $(a,\ b)$ が存在するとき，f は点 $(a,\ b)$ で**最小**になるといい，そのときの $f(a,\ b)$ の値を**最小値**という。

2 変数関数 $f(x,\ y)$ が高々**2 次の多項式**であるとは，ある定数 $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ があって

$$f(x,\ y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

と書けているときをいう。

定理

高々2 次の多項式 $f(x,\ y)$ に対して，$f(x,\ y)$ の停留点が 1 点 $(a,\ b)$ だけのとき，

① 点 $(a,\ b)$ で極大 $(D < 0,\ f_{xx} < 0)$ であれば，f は $(a,\ b)$ で最大になる。

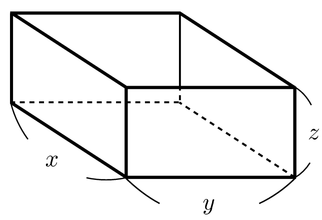
② 点 $(a,\ b)$ で極小 $(D < 0,\ f_{xx} > 0)$ であれば，f は $(a,\ b)$ で最小になる。

証明は研究課題とする。

問 平面 $z = -2x + 3y + 6$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ と原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ との距離 OP が最小になるときの点 P の座標と最小距離 OP を求めたい。距離の 2 乗 OP^2 を x と y の関数 $f(x,\ y)$ とおき，$f(x,\ y)$ の最小値を求めることによって最小距離 $\mathrm{OP} = \sqrt{f(x,\ y)}$ と点 P の座標を求めよ。

$<$ 2 変数関数の最大 · 最小 2 $>$

問　2 辺の長さが x, y の長方形を底面とする高さ z のマス (枡) を作る。



このマスの容積 $xyz = V$ が一定という条件で，マスの表面積 S

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

の最小値を求めたい。$z = \dfrac{V}{xy}$ とおくと

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

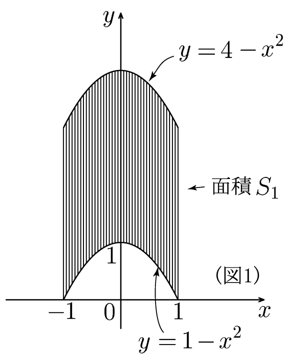
となる。この S を $f(x,\ y)$ とおき，$x > 0$，$y > 0$ の範囲で $f(x,\ y)$ の極小値を求めよ。またそのときの x, y, z の比を求めよ。

(注)　この問題の場合，極小値が最小値になる。

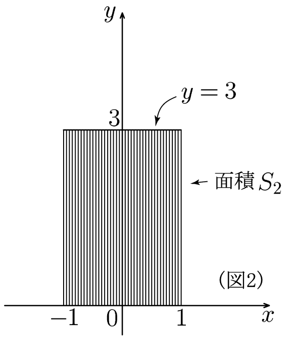
< 体積 1 >

[1]「線を集めると面になる」

問 1　図 1 のように 2 つの放物線 $y=4-x^2$ と $y=1-x^2$ および 2 直線 $x=1$ と $x=-1$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。また図 2 のように直線 $y=3$ と x 軸および 2 直線 $x=\pm 1$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 を求めよ。



(図1)



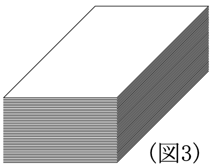
(図2)

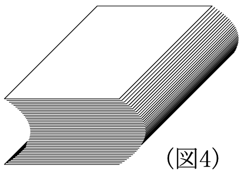
$S_1=$

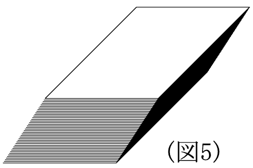
$S_2=$

[2]「面を集めると立体になる」

例　図 3 はトランプのような長方形のカードをまっすぐに重ねた立体であり，図 4 と図 5 はそれを横にずらした立体である。3 つの立体の体積は等しい。


(図3)

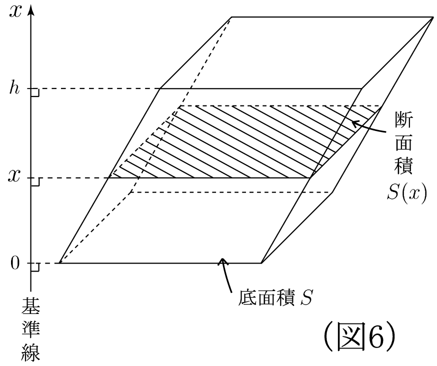

(図4)


(図5)

問 2　図 6 のような底面積 S で高さ h の平行六面体の体積 V を求めたい。底面に垂直な直線を基準線 (x 軸) にとる。x 軸の目盛りは底面からの高さとする。

(1)　高さ x である平面で切り取った断面の面積 $S(x)$ を求めよ。

(2)　平面六面体の体積 V を求めよ。



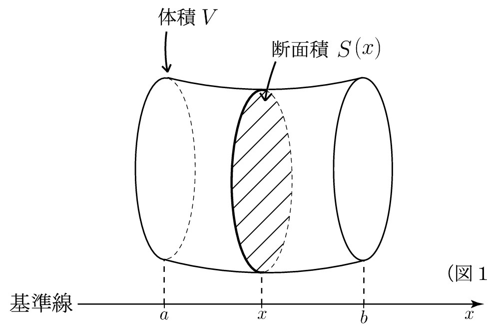
(図6)

< 体積 2 >

ある立体が図 1 のように基準線 (x 軸) に**垂直な断面**の集まりとみなされるとき，$a \leqq x \leqq b$ の範囲の各 x に対して断面積 $S(x)$ がわかっていれば，図 1 の立体の体積 V は

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

で求められる。



（図 1）

< 証明の概略 >

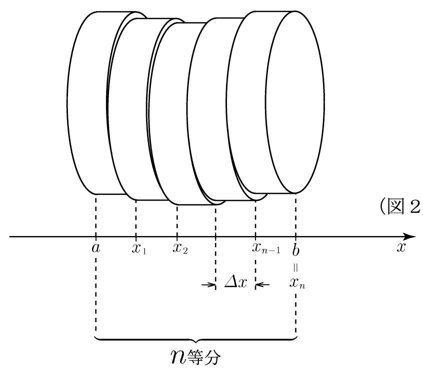
a から b までを n 等分し，その分点を $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n = b$ $(x_k = a + k\Delta x,\ \Delta x = \frac{b-a}{n})$ とおく。各分点 $x_1, \cdots, x_n$ を通る x 軸に垂直な平面で立体をきると，立体は n 個に分かれる。第 k 番目の部分は図 3 のような立体 (体積 $S(x_k) \times \Delta x$) で近似できるから，それを $k = 1$ から $k = n$ まで加えたもの

$$S(x_1) \times \Delta x + S(x_2) \times \Delta x + \cdots + S(x_n) \times \Delta x = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

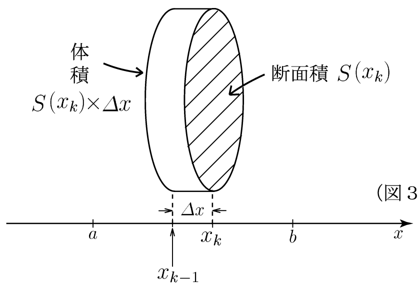
は図 2 の立体の体積を表す。ここで n を限りなく大きくすると図 2 の立体は元の図 1 の立体に近づくので

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)dx$$

となる。

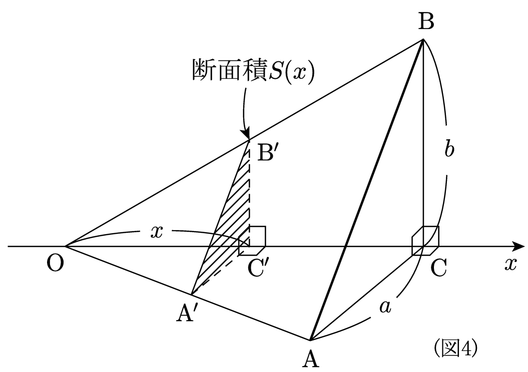


（図 2）



（図 3）

問　底面が直角三角形 ABC で，高さが $h(\mathrm{OC} = h)$ である図 4 の三角錐 OABC の体積 V を求めたい。



(図4)

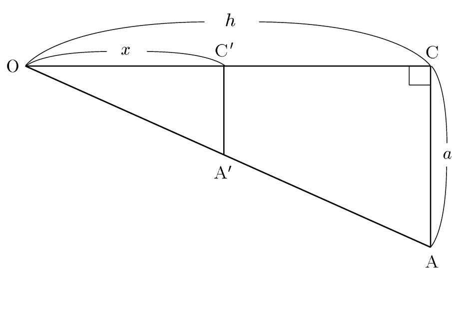
(1)　$\mathrm{OC}' = x$ とする。$\mathrm{A'C'}$ と $\mathrm{B'C'}$ を $x,\ h,\ a,\ b$ で表せ。

$\mathrm{A'C'} =$ 　　　　　　　，$\mathrm{B'C'} =$

(2)　断面積 $S(x)$ を求めよ。

$S(x) =$

(3)　体積 V を求めよ。



（図 5）

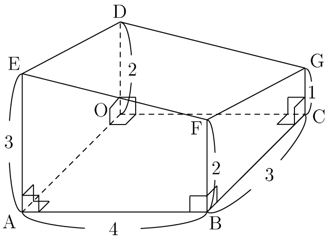
< 体積 3 >

例 図 1 の立体は底面が長方形 ABCO である四角柱を平面 DEFG で切り取った立体である。各辺の長さは

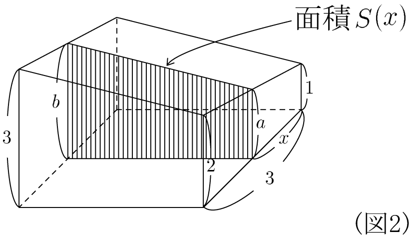
$$AB = OC = 4,\ OA = BC = 3$$

$$BF = DO = 2,\ AE = 3,\ CG = 1$$

である。この立体の体積 V を求めたい。図 2 のように平面 CGDO からの距離が x である平面で切り取った断面の面積を $S(x)$ とする。この断面は図 3 のような台形である。



(図1)



(図2)

問 1 図 4 を参考にして a の長さを x で表せ。

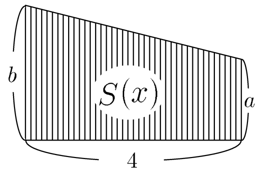
$a =$

問 2 図 5 を参考にして b の長さを x で表せ。

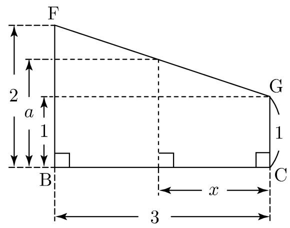
$b =$

問 3 図 3 の面積 $S(x)$ を求めよ。

$S(x) =$



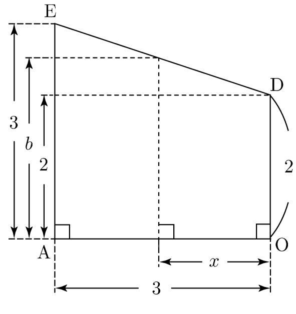
(図3)



(図4)

問 4 $S(x)$ を積分することによって図 1 の立体の体積 V を求めよ。

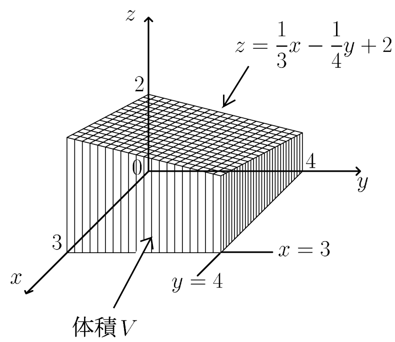
$$V = \int_0^3 S(x)dx$$



(図5)

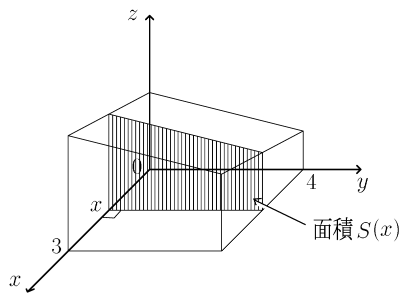
＜体積 4＞

例　平面 $z=\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y+2$ と xy 平面，yz 平面，xz 平面及び平面 $x=3$ と平面 $y=4$ で囲まれた立体の体積 V を求めたい。



(図 1)

図 2 のように，x 軸の座標が x である平面で切り取った断面の面積を $S(x)$ とすると，$S(x)$ は図 3 の斜線部分の面積であるから，x を定数と考えて，図 3 の横軸変数 y で積分すれば求まる。すなわち



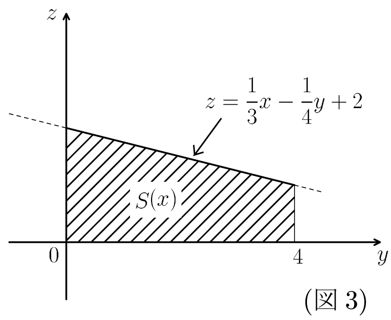
(図 2)

$$S(x)=\int_0^4\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y+2\right)dy$$

$$=\left[\frac{1}{3}xy-\frac{1}{8}y^2+2y\right]_{y=0}^{y=4}$$

$$=\frac{4}{3}x-\frac{4^2}{8}+2\times4-0=\frac{4}{3}x+6$$

である。よって体積 V は



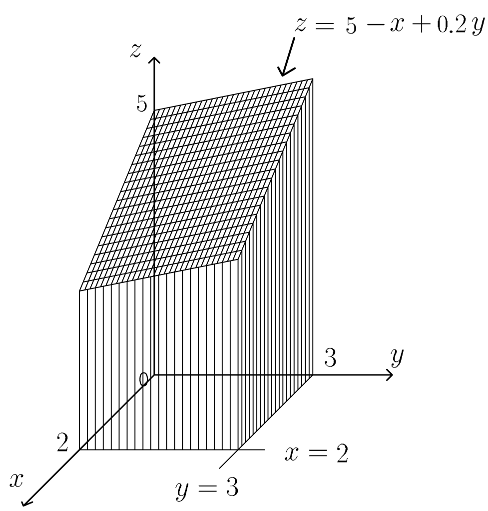
(図 3)

$$V=\int_0^3 S(x)\,dx$$

$$=\int_0^3\left(\frac{4}{3}x+6\right)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^2+6x\right]_0^3=24$$

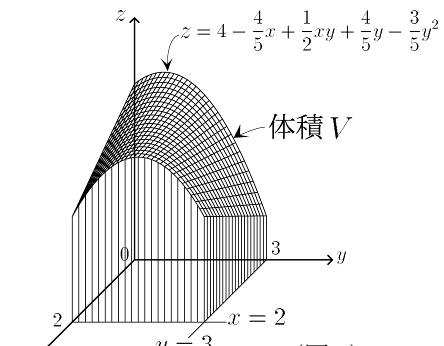
(注)　図 1 の立体は前ページと同じ立体である。

問　平面 $z=5-x+0.2y$ と xy 平面，yz 平面，xz 平面及び平面 $x=2$ と平面 $y=3$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ。



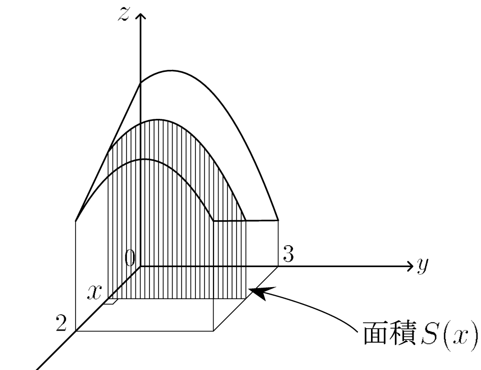
＜ 体積 5 ＞

例 曲面 $z = 4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2$ と xy 平面，yz 平面，xz 平面および平面 $x = 2$ と平面 $y = 3$ とで囲まれた立体の体積 V を求めたい。



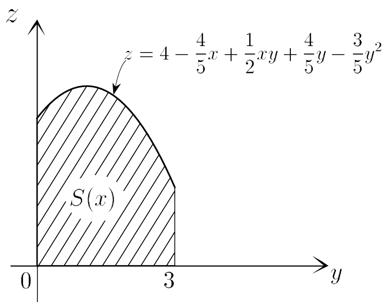
(図 1)

図 2 のように，x 軸の座標が x である平面で切り取った断面の面積を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は図 3 の斜線部分の面積であるから，x を定数と考えて，図 3 の横軸変数 y で積分すれば求まる。すなわち



(図 2)

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^3 \left(4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2\right) dy \\
&= \left[4y - \frac{4}{5}xy + \frac{1}{4}xy^2 + \frac{2}{5}y^2 - \frac{1}{5}y^3\right]_{y=0}^{y=3} \\
&= 12 - \frac{12}{5}x + \frac{9}{4}x + \frac{18}{5} - \frac{27}{5} - 0 \\
&= \frac{51}{5} - \frac{3}{20}x
\end{aligned}
$$

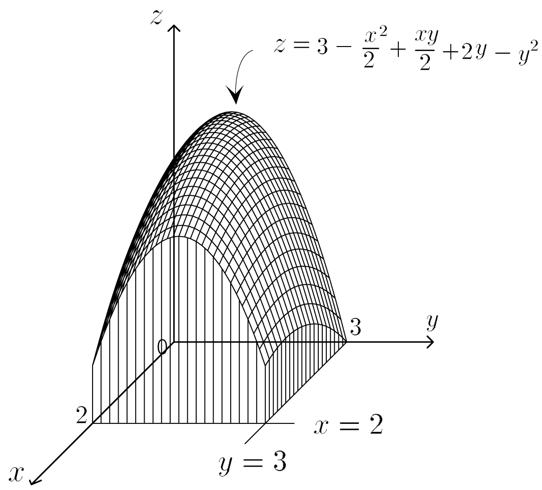


(図 3)

である。よって体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 S(x)dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{51}{5} - \frac{3}{20}x\right) dx = \left[\frac{51}{5}x - \frac{3}{40}x^2\right]_0^2 = \frac{201}{10}
\end{aligned}
$$

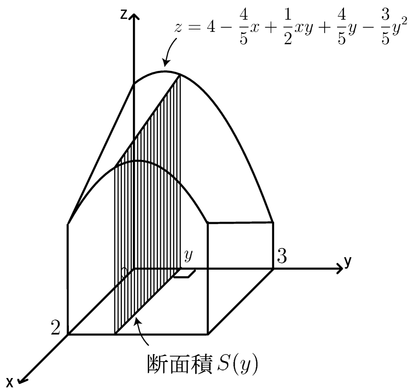
問 曲面 $z = 3 - \frac{x^2}{2} + \frac{xy}{2} + 2y - y^2$ と xy 平面，yz 平面，xz 平面および平面 $x = 2$ と平面 $y = 3$ とで囲まれた立体の体積 V を求めよ。



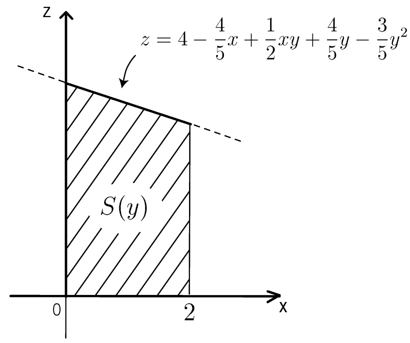
< 体積 6 >

例 立体の体積 V を求めるのに，前ページでは，x 軸に垂直な平面で切りとった断面積を x について積分して，V を求めた。

前ページと同じ立体の体積 V を求めるのに，今度は y 軸に垂直な平面で切りとった断面積を使う。



y 軸の座標が y である平面で切りとった断面の面積を $S(y)$ とすると，$S(y)$ は右図のような斜線部分の面積だから，y を定数と考えて，x で積分すれば，



$$S(y) = \int_0^2 \left(4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}xy + \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}y^2\right) dx$$

$$= \left[4x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{4}x^2y + \frac{4}{5}yx - \frac{3}{5}y^2x\right]_{x=0}^{x=2}$$

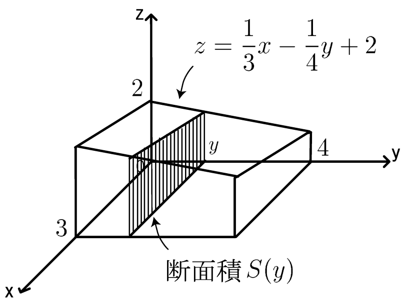
$$= 8 - \frac{8}{5} + y + \frac{8}{5}y - \frac{6}{5}y^2 - 0 = \frac{32}{5} + \frac{13}{5}y - \frac{6}{5}y^2$$

となる。よって体積 V は

$$V = \int_0^3 S(y)dy = \int_0^3 \left(\frac{32}{5} + \frac{13}{5}y - \frac{6}{5}y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{32}{5}y + \frac{13}{10}y^2 - \frac{2}{5}y^3\right]_0^3 = \frac{96}{5} + \frac{117}{10} - \frac{54}{5} - 0 = \frac{201}{10}$$

問 34 ページの例と同じ立体の体積 V を求めたい。y 軸に垂直な平面で切りとった断面の面積 $S(y)$ を求め，V を $S(y)$ を積分することによって求めよ。



$S(y) =$

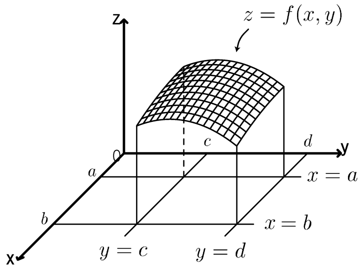
$V =$

< 累次積分 1 >

2 変数関数 $f(x,\ y)$ が

$$a \leqq x \leqq b,\ \ c \leqq y \leqq d$$

の範囲で正 (プラス) であるとき，曲面 $z = f(x,\ y)$ と xy 平面，および平面 $x = a$，$x = b$，$y = c$，$y = d$ で囲まれた部分の体積を V とする。図 2 より

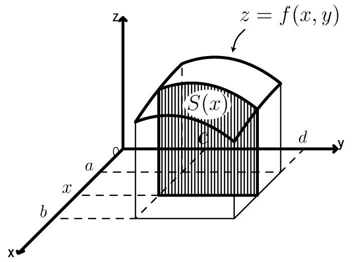


(図 1)

$$V = \int_a^b S(x)dx\ ,\ \ S(x) = \int_c^d f(x,\ y)dy$$

だから

$$V = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,\ y)dy \right\} dx$$



(図 2)

となる。この種の積分を **累次**（るいじ）**積分**または **逐次**（ちくじ）**積分**という。

この積分を計算するには，まず x を定数と思って y に関する定積分を計算して，x の関数 $S(x)$ が得られたら，この関数を x で積分すればよい。

例 $\displaystyle \int_1^2 \left\{ \int_2^3 (4 - x + xy + y^2)dy \right\} dx$

$$= \int_1^2 \left\{ \left[(4-x)y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=2}^{y=3} \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ \left((4-x) \times 3 + \frac{9}{2}x + \frac{27}{3} \right) - \left((4-x) \times 2 + \frac{4}{2}x + \frac{8}{3} \right) \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ \frac{31}{3} + \frac{3}{2}x \right\} dx = \left[\frac{31}{3}x + \frac{3}{4}x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{151}{12}$$

問 次の累次積分を計算せよ。

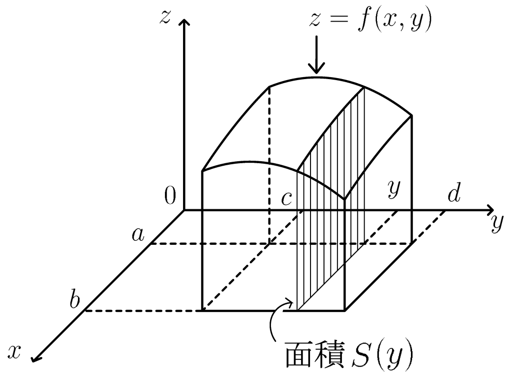
$$\int_1^2 \left\{ \int_1^3 \left(x^2 - xy + 1 \right) dy \right\} dx$$

< 累次積分 2 >

$f(x,\ y) > 0$ のとき，曲面 $z = f(x,\ y)$ と xy 平面及び平面 $x = a$，$x = b$，$y = c$，$y = d$ で囲まれた部分の体積 V は，前ページより

$$V = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,\ y)dy \right\} dx$$

であった。一方，右図より



$$V = \int_c^b S(y)dy,\ S(y) = \int_a^b f(x,\ y)dx$$

だから，

$$V = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,\ y)dx \right\} dy$$

である。よって

$$\boxed{\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,\ y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,\ y)dx \right\} dy}$$

が成り立つ。これを累次積分の**順序交換可能性**という

(注)　この順序交換可能性は $f(x,\ y) > 0$ でなくても成立する。

例　$\displaystyle \int_2^3 \left\{ \int_1^2 \left(4 - x + xy + y^2\right) dx \right\} dy = \int_2^3 \left\{ \int_1^2 \left(4 + y^2 + (y-1)x\right) dx \right\} dy$

$$= \int_2^3 \left\{ \left[\left(4 + y^2\right) x + (y-1) \times \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=1}^{x=2} \right\} dy$$

$$= \int_2^3 \left\{ \left(\left(4 + y^2\right) \times 2 + (y-1) \times \frac{4}{2} \right) - \left(\left(4 + y^2\right) + (y-1) \times \frac{1}{2} \right) \right\} dy$$

$$= \int_2^3 \left\{ y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \right\} dy = \left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{5}{2}y \right]_{y=2}^{y=3} = \frac{151}{12}$$

(注)　この例は前ページの例の累次積分の積分順序を交換した場合である。

問　次の累次積分を計算せよ。

$$\int_1^3 \left\{ \int_1^2 \left(x^2 - xy + 1\right) dx \right\} dy$$

< 長方形領域の 2 重積分 1 >

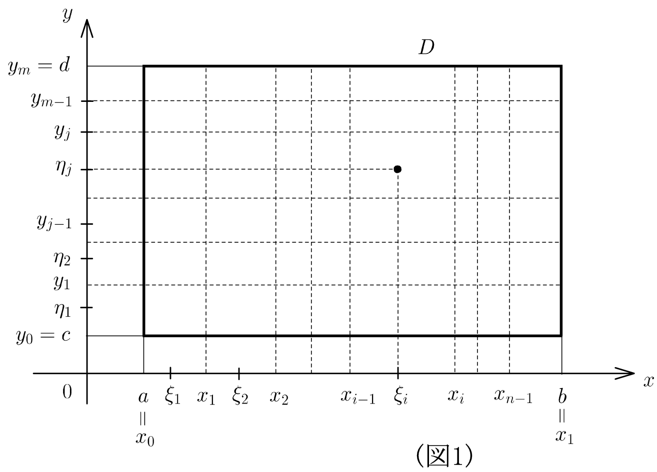
xy 平面上の長方形領域 $D = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b\ ,\quad c \leqq y \leqq d\}$ における 2 変数関数 $f(x, y)$ の 2 重積分は，1 変数関数のリーマン積分と同様に定義する。$[a, b]$ および $[c, d]$ の小区間への分割を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\ ,\quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$$

とし，各小区間の代表値 ξ_i $(x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i)$, η_j $(y_{j-1} \leqq \eta_j \leqq y_j)$ に対するリーマン和を

$$\Re_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

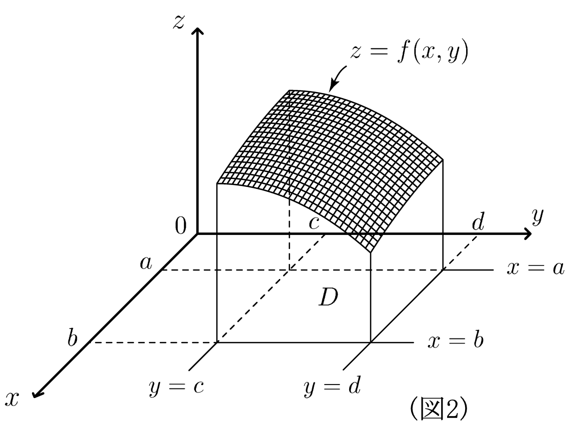
とおく。ただし $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ である。ここで $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i \to 0$ となるように n, m を大きくし，分割を限りなく細かくするとき，点 (ξ_i, η_j) のとり方に関係なく，和 $\Re_{nm}$ がある一定の値に限りなく近づくならば，この極限値を $f(x, y)$ の D における **2 重積分**といい，



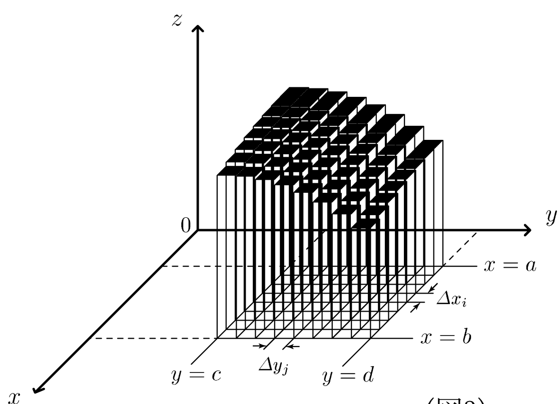
(図1)

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0,\ \Delta y_j \to 0 \\ n \to \infty,\ m \to \infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i \Delta y_j} \quad (*)$$

という記号で表す。このとき 2 変数関数 $f(x, y)$ は領域 D で**積分可能**であるという。1 変数関数の場合と同様に，2 変数関数 $f(x, y)$ が連続であれば，積分可能である。以後は積分可能な関数だけを考える。$f > 0$ ならば $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の値は曲面 $z = f(x, y)$ と xy 平面および平面 $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ で囲まれた立体 (図 2) の体積を表す。$(*)$ の右辺は小長方体の体積の和の極限である。これは図 2 の立体の体積を図 3 の立体の体積の極限として求めていることになる。



(図2)



(図3)

＜長方形領域の 2 重積分 2 ＞

長方形領域 $D = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$
における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の定義から，
$f > 0$ のときは曲面 $z = f(x, y)$ と xy 平面および平面
$x = a$，$x = b$，$y = c$，$y = d$ で囲まれた立体の体積を表す
(図 1)。　この体積は累次積分

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)dy \right\} dx \qquad (図 2)$$

または

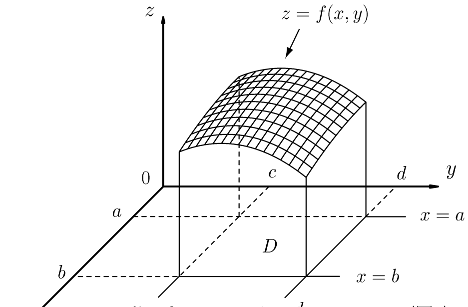
$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)dx \right\} dy \qquad (図 3)$$

によっても得られる。

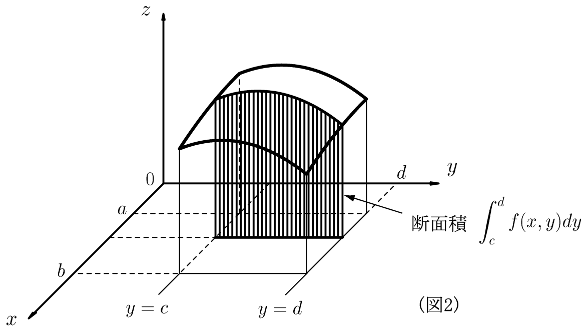
よって長方形領域

$$D = \{(x, y) : a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\}$$

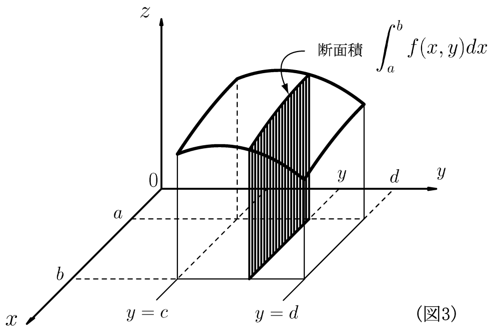
における 2 重積分は累次積分



(図1)



(図2)



(図3)

$$(*) \quad \boxed{\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)dx \right\} dy}$$

で計算できる。

(注) この式 $(*)$ は $f > 0$ でなくても成立する。

例　$D = \{(x, y) : 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 3\}$ のとき

$$\iint_D (1 + 2xy)dxdy = \int_1^2 \left\{ \int_0^3 (1 + 2xy)dy \right\} dx = \int_1^2 \left\{ \left[y + xy^2 \right]_{y=0}^{y=3} \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \{(3 + 9x) - 0\} dx = \left[3x + \frac{9}{2}x^2 \right]_1^2 = (6 + 18) - \left(3 + \frac{9}{2} \right) = \frac{33}{2}$$

問　$D = \{(x, y) : -1 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$ のとき，次の 2 重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \left(2x - 3y^2 \right) dxdy$$

< 長方形領域の 2 重積分 3 >

例　$D = \left\{(x,y)\ :\ 1 \leqq x \leqq 4\ ,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ のとき

$$\iint_D x^2 \cos y\ dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_1^4 x^2 \cos y\ dx\right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\left[\frac{x^3}{3}\cos y\right]_{x=1}^{x=4}\right\} dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{64}{3}\cos y - \frac{1}{3}\cos y\right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{21\cos y\} dy = \Big[21 \sin y\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = 21$$

（別解）

$$\iint_D x^2 \times \cos y\, dxdy = \int_1^4 x^2\ dx \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\ dy = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^{x=4} \times \Big[\sin y\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = 21 \times 1 = 21$$

この例のように 2 変数関数 $f(x,y)$ が x の関数 $g(x)$ と y の関数 $k(y)$ との積 $f(x,y) = g(x) \times k(y)$ となっているとき，長方形領域における 2 重積分は,（ x に関する定積分）×（ y に関する定積分）になる。すなわち

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\iint_D g(x)k(y)\ dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right) \times \left(\int_c^d k(y)dy\right) \\[2em] \text{ただし}\qquad D = \{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\ c \leqq y \leqq d\} \end{array}}$$

となる。

問　次の 2 重積分の値を求めよ。

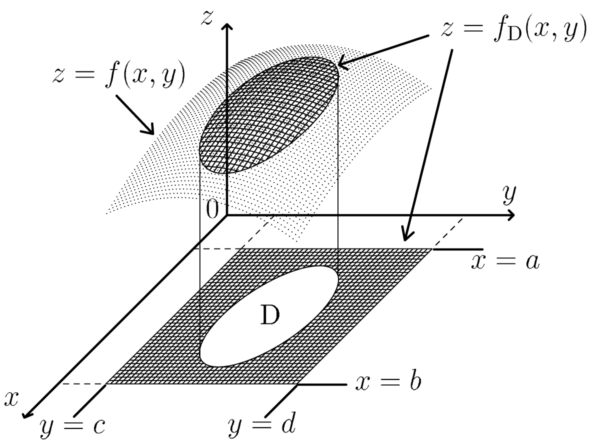
(1) $\displaystyle\iint_D x^3 \sin(2y) dxdy$

$D = \left\{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 2\ ,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{2x-y} dxdy$

$D = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1\ ,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$

＜一般領域の２重積分１＞



xy 平面上の有界領域 D に対し，D が領域 $\{(x, y) : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ に含まれる様に定数 $a,\ b,\ c,\ d$ をとる。

一般の２変数関数 $f(x, y)$ に対して，領域 D における２重積分を次式で定義する。

$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x, y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f_{\mathrm{D}}(x, y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f_{\mathrm{D}}(x, y)dx \right\} dy}$$

ただし，

$$f_{\mathrm{D}}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & : (x, y) \text{ が D の点} \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases}$$

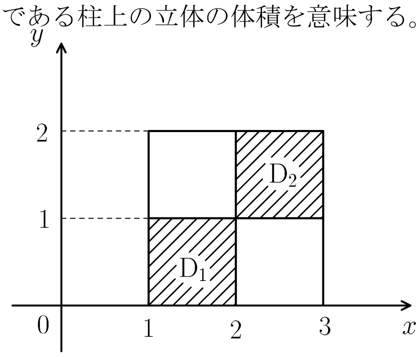
である。右上図では，上部の曲面が $z = f(x, y)$ を表し，D 以外で 0 になっている濃い曲面が $z = f_{\mathrm{D}}(x, y)$ である。 $f > 0$ のとき， D における２重積分の値は，底面が D である柱上の立体の体積を意味する。

例　右図の斜線部分を領域 D とする。今,

$\mathrm{D}_1 = \{ (x, y) : 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1 \}$

$\mathrm{D}_2 = \{ (x, y) : 2 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2 \}$

と置くと， D は D_1 と D_2 の和集合であるから，２重積分の定義より，



$$\iint_{\mathrm{D}} (x + y)dxdy = \iint_{\mathrm{D}_1} (x + y)dxdy + \iint_{\mathrm{D}_2} (x + y)dxdy$$

が成り立つ。

問　例の計算を完成せよ。

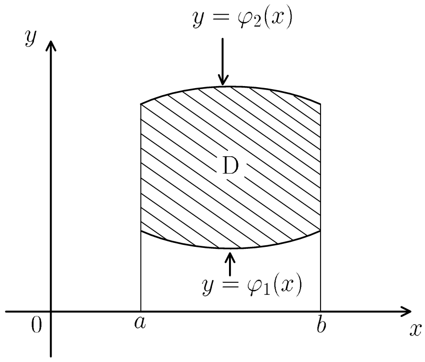
$$\iint_{\mathrm{D}} (x + y)dxdy =$$

＜一般領域の２重積分２＞

xy 平面上の領域 D が，２つの曲線 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$ と２つの直線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれているとき，すなわち

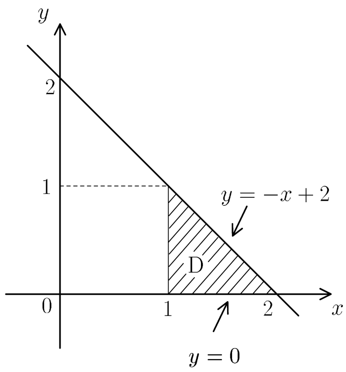
$\mathrm{D}=\{\ (x,y)\ :\ a\leqq x\leqq b\ ,\ \varphi_1(x)\leqq y\leqq\varphi_2(x)\ \}$

となっているとき，２変数関数 $f(x,y)$ の D における重積分は，累次積分



$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right\}dx}$$

によって計算される。



例　領域 D が，右図の斜線部分であるとき，D は，

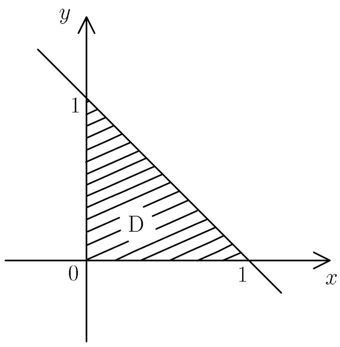
$\mathrm{D}=\{\ (x,y)\ :\ 1\leqq x\leqq 2\ ,\ 0\leqq y\leqq -x+2\}$ と表されるから，

$$\iint_{\mathrm{D}}(x+y)dxdy=\int_1^2\left\{\int_0^{-x+2}(x+y)dy\right\}dx$$

$$=\int_1^2\left\{\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=-x+2}\right\}dx=\int_1^2\left\{x(-x+2)+\frac{1}{2}(-x+2)^2-0\right\}dx$$

$$=\int_1^2\left\{-\frac{1}{2}x^2+2\right\}dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+2x\right]_{x=1}^{x=2}=\frac{5}{6}$$

問　D が右図の斜線部分であるとき，２重積分 $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}}(2x+y)\,dxdy$ の値を求めよ。



< 一般領域の２重積分３ >

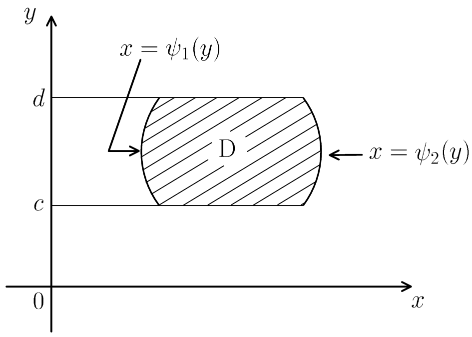
xy 平面上の領域 D が

$\mathrm{D} = \{\ (x,y)\ :\ c \leqq y \leqq d\ ,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$

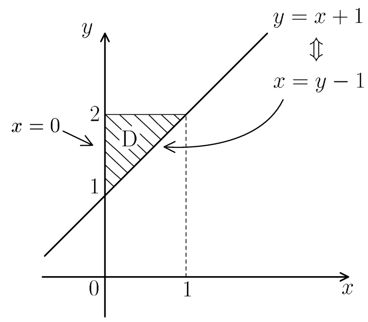
と表されているとき、２変数関数 $f(x,y)$ の D における重積分は、累次積分

$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy}$$

によって計算される。



例　領域D が右図の斜線の部分であるとき、 D は $\mathrm{D}\ =\ \{(x,y)\ :\ 1 \leqq y \leqq 2\ ,\ 0 \leqq x \leqq y-1\ \}$ と表されるから、



$$\iint_{\mathrm{D}} \left(x^2+y\right) dxdy = \int_1^2 \left\{ \int_0^{y-1} \left(x^2+y\right) dx \right\} dy$$

$$= \int_1^2 \left\{ \left[\frac{1}{3}x^3 + xy \right]_{x=0}^{x=y-1} \right\} dy = \int_1^2 \left\{ \frac{1}{3}(y-1)^3 + y^2 - y \right\} dy$$

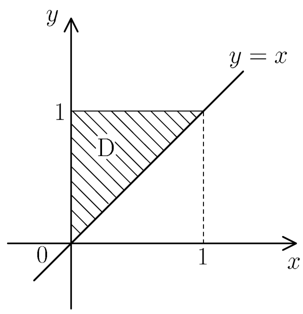
$$= \left[\frac{1}{12}(y-1)^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=1}^{y=2} = \left(\frac{1}{12} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{12}$$

(注)　$\mathrm{D} = \{\ (x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1\ ,\ x+1 \leqq y \leqq 2\ \}$　と考えて

$$\iint_{\mathrm{D}} \left(x^2+y\right) dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{x+1}^2 \left(x^2+y\right) dy \right\} dx$$

を計算しても同じ答が出るが、この場合は例の様にやる方が累次積分の計算が楽になる。

問　D が右図の斜線部分であるとき、２重積分 $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} (xy-y)dxdy$　の値を求めよ。



＜変数変換における面積比＞

問 1 ベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1\cos\alpha \\ r_1\sin\alpha \end{pmatrix}$,

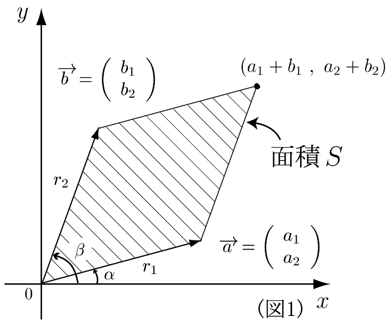
$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2\cos\beta \\ r_2\sin\beta \end{pmatrix}$ に対し，

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る平行四辺形 (右図斜線部分)

の面積を S とすると

$$S = r_1 r_2 \sin(\beta - \alpha)$$

となる。S を a_1，a_2，b_1，b_2 で表せ。(ヒント 三角関数の加法定理)



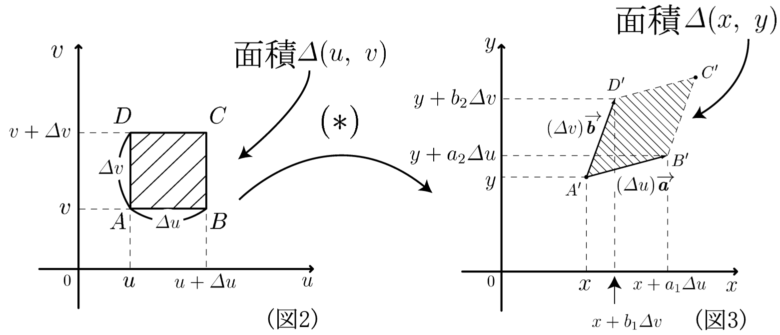
(図1)

問 2 定数 a_1，a_2，b_1，b_2 に対して，$(u,\ v)$ から $(x,\ y)$ への

1 次変換

$$(*)\ \begin{cases} x = a_1 u + b_1 v \\ y = a_2 u + b_2 v \end{cases}$$

によって図 2 の斜線部分が 図 3 の斜線部分に移ったとす る。図 2 の斜線部分の面積 を $\varDelta(u,\ v)$，図 3 の斜線部分 の面積を $\varDelta(x,\ y)$



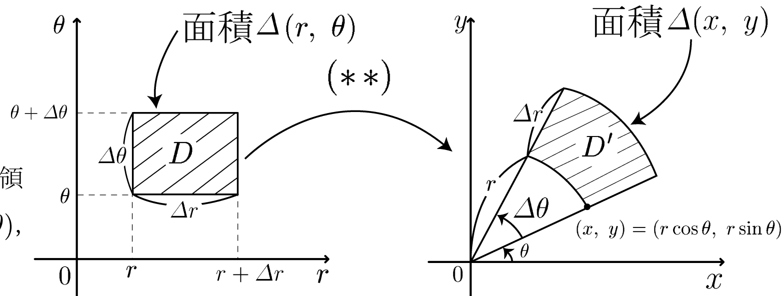
(図2) (図3)

とする。 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し，$(\varDelta u)\overrightarrow{a}$ と $(\varDelta v)\overrightarrow{b}$ の作る平行四辺形の 面積 $\varDelta(x, y)$ を求め，面積比 $\dfrac{\varDelta(x,\ y)}{\varDelta(u,\ v)}$ を求めよ。

問 3 極座標変換

$$(**)\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

によって図 4 の長方形領域 D が 図 5 の領域 D' に移る。領域 D の 面積を $\varDelta(r,\ \theta)$，領域 D' の面積を $\varDelta(x,\ y)$ とする。



(図4) (図5)

(1) 面積比 $\dfrac{\varDelta(x,\ y)}{\varDelta(r,\ \theta)}$ を求めよ。 $\left(\text{ヒント：中心角}\varDelta\theta,\ \text{半径 } r \text{ の扇形の面積は}\dfrac{1}{2}(\varDelta\theta)r^2\right)$

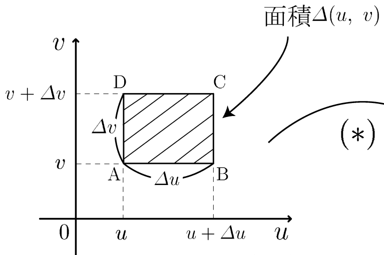
(2) $\varDelta r \to 0,\ \varDelta\theta \to 0$ のとき極限値 $\displaystyle\lim_{\substack{\varDelta\theta\to 0 \\ \varDelta r\to 0}} \frac{\varDelta(x,\ y)}{\varDelta(r,\ \theta)}$ を求めよ。

＜ヤコビアン＞

$(u,\ v)$ 平面から $(x,\ y)$ 平面への変換

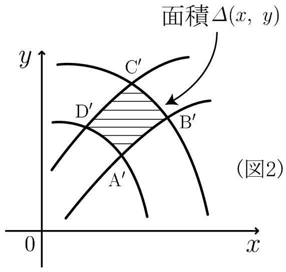
$$(*)\ \begin{cases} x = \varphi(u,\ v) \\ y = \psi(u,\ v) \end{cases}$$

によって図 1 の長方形領域 ABCD が図 2 の領域 A′B′C′D′ に移ったとする。



(図1)

$(*)$



(図2)

面積をそれぞれ $\Delta(u,\ v)$, $\Delta(x,\ y)$ とすると，$\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ のとき面積比の極限は

$$\boxed{\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \frac{\Delta(x,\ y)}{\Delta(u,\ v)} = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|}$$

となる。ここで $\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}$ を**ヤコビアン**といい，$\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$ と表す。

(証明の概略)　A$(u,\ v)$, B$(u+\Delta u,\ v)$, D$(u,\ v+\Delta v)$ に対し，移った先の座標は A′$\big(\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v)\big)$, B′$\big(\varphi(u+\Delta u,\ v),\ \psi(u+\Delta u,\ v)\big)$, D′$\big(\varphi(u,\ v+\Delta v),\ \psi(u,\ v+\Delta v)\big)$ である。

Δu, Δv が十分小さいとき面積 $\Delta(x,\ y)$ は $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A'D'}}$ が作る平行四辺形の面積で近似できる。 $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{A'D'}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$\varphi(u,\ v)$, $\psi(u,\ v)$ に関する 1 次近似式より

$$a_1 = \varphi(u+\Delta u,\ v) - \varphi(u,\ v) \fallingdotseq \varphi_u(u,\ v)\Delta u$$

$$a_2 = \psi(u+\Delta u,\ v) - \psi(u,\ v) \fallingdotseq \psi_u(u,\ v)\Delta u$$

$$b_1 = \varphi(u,\ v+\Delta v) - \varphi(u,\ v) \fallingdotseq \varphi_v(u,\ v)\Delta v$$

$$b_2 = \psi(u,\ v+\Delta v) - \psi(u,\ v) \fallingdotseq \psi_v(u,\ v)\Delta v$$

よって

$$\frac{\Delta(x,\ y)}{\Delta(u,\ v)} \fallingdotseq \left|\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\Delta u\Delta v}\right| \fallingdotseq \left|\frac{\varphi_u\Delta u \times \psi_v\Delta v - \psi_u\Delta u \times \varphi_v\Delta v}{\Delta u\Delta v}\right| = |\varphi_u\psi_v - \psi_u\varphi_v| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right|$$

問　次の変換に対してヤコビアンを求めよ。

(1) $\begin{cases} x = a_1u + a_2v \\ y = b_1u + b_2v \end{cases}$

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=$$

(2) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$=$$

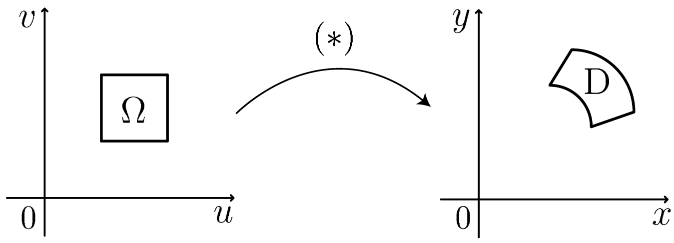
< 重積分の変数変換 1 >

2 変数関数 $f(x,\ y)$ の重積分を考える。

変換

$$(*)\quad \begin{cases} x = \varphi(u,\ v) \\ y = \psi(u,\ v) \end{cases}$$

で，uv 平面上の領域 Ω が xy 平面上の 領域 D に移されるとする。このとき



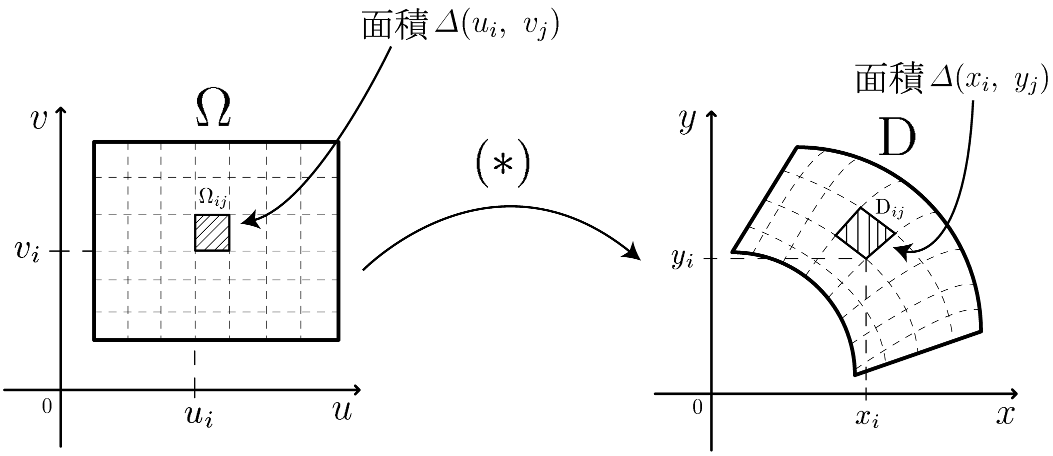
$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,\ y)dxdy = \iint_{\Omega} f\big(\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v)\big)\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| dudv}$$

が成り立つ。ここで $\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}$ はヤコビアンである。

(注) ヤコビアンに絶対値を付けるのは，1 変数の場合と違い，積分領域に「向き」を考えないからである。

(証明の概略)

領域 Ω を微小領域 $\Omega_{ij}(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m)$ に分割し，変換 $(*)$ によって Ω_{ij} が D_{ij} に移されたとする。Ω_{ij} の面積を $\mathit{\Delta}(u_i,\ v_j)$，$\mathrm{D}_{ij}$ の面積を $\mathit{\Delta}(x_i,\ y_j)$ とする。



ヤコビアンを $\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u} = J(u,\ v)$ とおくと $\dfrac{\Delta(x_i,\ y_j)}{\Delta(u_i,\ v_j)} \fallingdotseq |J(u_i,\ v_j)|$

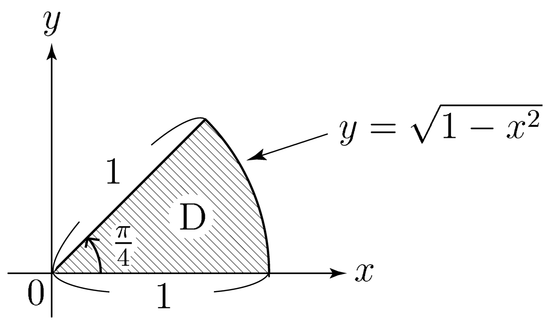
より

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{D}} f(x,\ y)dxdy &\fallingdotseq \sum_i \sum_j f(x_i,\ y_j)\mathit{\Delta}(x_i,\ y_j) \\ &\fallingdotseq \sum_i \sum_j f\big(\varphi(u_i,\ v_j),\ \psi(u_i,\ v_j)\big)|J(u_i,\ v_j)|\mathit{\Delta}(u_i,\ v_j) \\ &\fallingdotseq \iint_{\Omega} f\big(\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v)\big)|J(u,\ v)|dudv\end{aligned}$$

< 重積分の変数変換 2 >

例題 領域 D が右図の場合に

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$ を求めよ。



(解) 極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

によって $r\theta$ 平面の長方形領域

$$\Omega = \left\{(r,\theta)\ :\ 0 \leqq r \leqq 1\ ,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right\} \left(\begin{array}{l} \text{半径 } r \text{ は 0 から 1 まで} \\ \text{角}\theta\text{は 0 から}\dfrac{\pi}{4}\text{まで} \end{array}\right)$$

は xy 平面上の領域 D に移される。46 ページより極座標変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

であるから

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{\Omega} e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta$$

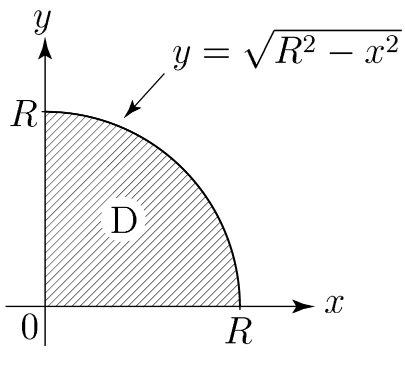
$$= \iint_{\Omega} e^{-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right\}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=1}\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^0\right\}d\theta = \frac{1}{2}(-e^{-1}+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta = \frac{1}{2}(1-e^{-1})\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}(1-e^{-1})$$

問 $\mathrm{D} = \{(x,\ y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq R^2\}$ の場合に

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

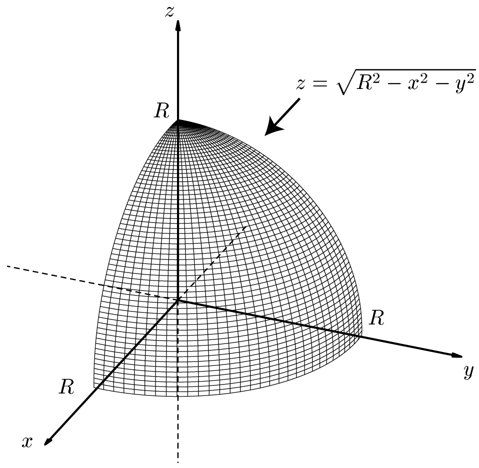
を求めよ。



＜ 重積分の変数変換 3 ＞

問 1　R を正の定数とし，$\mathrm{D} = \{(x,\ y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ とおく。
次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_{\mathrm{D}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$



問 2　半径 R の球の体積を求めよ。

< 付録 1 : 全微分可能性 >

[定理] $f_x(x,\ y)$, $f_y(x,\ y)$ が存在し，そのどちらかが連続であれば，$f(x,\ y)$ は全微分可能である。

（証明） $f_x(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で連続だとして，$f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で全微分可能

であることを示す。 平均値の定理から

$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b+k)=hf_x(a+\theta h,\ b+k) \quad (0<\theta<1)$

をみたす θ が存在する。そこで

$$\varepsilon_1=f_x(a+\theta h,\ b+k)-f_x(a,\ b)$$

とおくと，f_x の $(a,\ b)$ での連続性から $(h,\ k)\to(0,\ 0)$ のとき $\varepsilon_1\to 0$

となる。一方

$$\varepsilon_2=\frac{f(a,\ b+k)-f(a,\ b)}{k}-f_y(a,\ b)$$

とおくと，$f(a,\ y)$ の $y=b$ における微分可能性から $k\to 0$ のとき $\varepsilon_2\to 0$

となる。そこで

$$\varepsilon(h,\ k)=\frac{|h\varepsilon_1|}{\sqrt{h^2+k^2}}+\frac{|k\varepsilon_2|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくと $(h,\ k)\to(0,\ 0)$ のとき $\varepsilon(h,\ k)\to 0$ となる。

$$\frac{|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)-f_x(a,\ b)h-f_y(a,\ b)k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big|\{f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b+k)\}+\{f(a,\ b+k)-f(a,\ b)\}$$

$$-f_x(a,\ b)h-f_y(a,\ b)k\Big|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big|h\{f_x(a,\ b)+\varepsilon_1\}+k\{f_y(a,\ b)+\varepsilon_2\}-f_x(a,\ b)h-f_y(a,\ b)k\Big|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big|h\varepsilon_1+k\varepsilon_2\Big|\leqq\varepsilon(h,\ k)\to 0 \qquad \big((h,\ k)\to(0,\ 0)\big)$$

より $f(x,\ y)$ は $(a,\ b)$ で全微分可能である。

< 付録 2 : 反例 >

例 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$

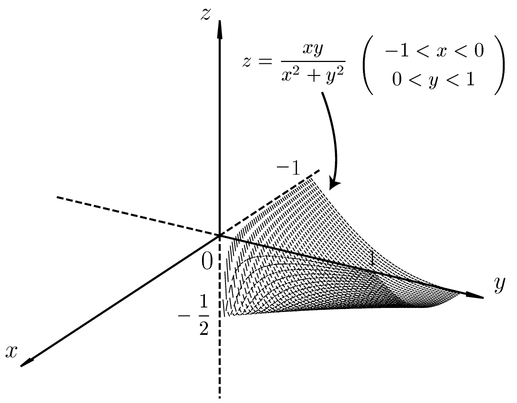
と定めると, $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ 以外で何回でも偏微分可能であり, その偏導関数は連続である。従って $(0,0)$ 以外で全微分可能である。$(x,y)=(0,0)$ では偏微分可能であり, その偏微分係数は

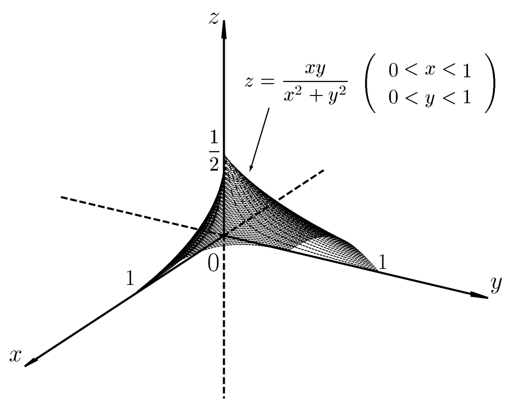
$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad , \quad f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

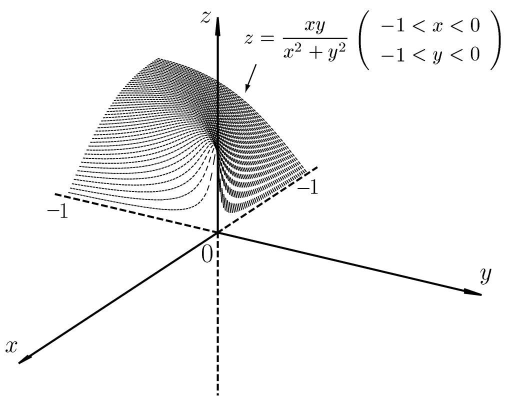
である。ところが $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能ではない。実は $(0,0)$ で連続ではない。直線 $y=mx$ にそって (x,y) が $(0,0)$ に近づくとき, $f(x,y)$ は

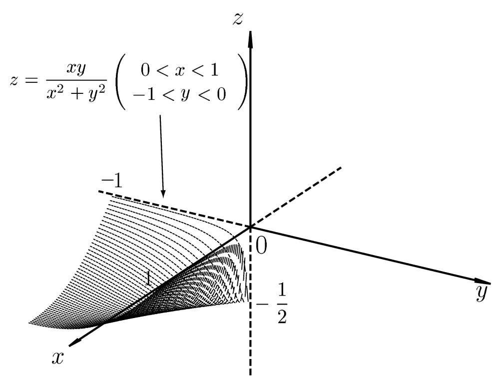
$f(x,mx) = \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$ となり, 傾き m によって値が変わる。

すなわち $(x,y)\to(0,0)$ のときの $f(x,y)$ の極限値が定まらないので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。従って全微分可能ではない。









< 付録 3 : 偏微分の交換可能性 >

[定理] $f(x,y)$ に対し, f_x, f_y, f_{xy} が存在し, かつ (x_0,y_0) で $f_{xy}(x,y)$ が連続であれば, $f_{yx}(x_0,y_0)$ も存在し, $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$ が成り立つ。

[証明] $\Delta_x f(x,y) = f(x+h,y) - f(x,y),\ \Delta_y f(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y)$ とおく。

$$\begin{aligned}
&\Delta_x\Delta_y f(x,y) = \Delta_x \{f(x,y+k) - f(x,y)\} \\
&= \{f(x+h,y+k) - f(x+h,y)\} - \{f(x,y+k) - f(x,y)\} \\
&= \{f(x+h,y+k) - f(x,y+k)\} - \{f(x+h,y) - f(x,y)\} \\
&= \Delta_y \{f(x+h,y) - f(x,y)\} = \Delta_y\Delta_x f(x,y)
\end{aligned}$$

一方 (x_0,y_0) の近くで, 平均値の定理より

$$\begin{aligned}
&\Delta_x\Delta_y f(x_0,y_0) = \{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0)\} - \{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)\} \\
&= \{f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0+\theta_1 h, y_0)\} h = f_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)hk
\end{aligned}$$

をみたす $\theta_1, \theta_2\ (0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$ が存在する。ここで $f_{xy}(x,y)$ は (x_0,y_0) の近くで連続であるから

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\Delta_x\Delta_y f(x_0,y_0)}{hk} = f_{xy}(x_0,y_0)$$

が成り立つ。すなわち, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, ある正数 $\delta > 0$ がとれて, $|h| < \delta, |k| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Delta_x\Delta_y f(x_0,y_0)}{hk} - f_{xy}(x_0,y_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0)}{k} - \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}\right\} - f_{xy}(x_0,y_0)\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $k \to 0$ の極限をとると, $|h| < \delta$ なる h に対して

$$\left|\frac{1}{h}\{f_y(x_0+h,y_0) - f_y(x_0,y_0)\} - f_{xy}(x_0,y_0)\right| \leqq \varepsilon$$

が成り立つ。これは

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_y(x_0+h,y_0) - f_y(x_0,y_0)}{h} = f_{xy}(x_0,y_0)$$

を意味する。左辺は $f_{yx}(x_0,y_0)$ であるから定理が証明された。　(証明終)

< 付録 4：2 次式の正負の判別 >

[定理]

> 定数 $A,\ B,\ C$ に対し, h と k の 2 次式
>
> $$F(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$
>
> の正, 負は次のようになる。ただし $D = B^2 - AC$ である。
>
> (1) $(h,k) \neq (0,0)$ のとき 常に $F(h,k) > 0 \iff A > 0,\ C > 0,\ D < 0$
>
> (2) $(h,k) \neq (0,0)$ のとき 常に $F(h,k) < 0 \iff A < 0,\ C < 0,\ D < 0$
>
> (3) $F(h,k)$ が正負両方の値をもつ $\iff D > 0$

[証明] (1) $(\Rightarrow)$ $F(1,0) = A > 0,\ F(0,1) = C > 0$

$h + \dfrac{B}{A}k = 0, k \neq 0$ なる h,k に対し $F(h,k) = -\dfrac{D}{A}k^2 > 0$ より $D < 0$

$(\Leftarrow)$ $F(h,k) = A\left(h + \dfrac{B}{A}k\right)^2 - \dfrac{D}{A}k^2$ より, $(h,k) \neq 0$ であれば

常に $F(h,k) > 0$

(2) $(\Rightarrow)$ $F(1,0) = A < 0,\ F(0,1) = C < 0,\ h + \dfrac{B}{A}k = 0, k \neq 0$

なる h,k に対し $F(h,k) = -\dfrac{D}{A}k^2 < 0$ より $D < 0$

$(\Leftarrow)$ $F(h,k) = A\left(h + \dfrac{B}{A}k\right)^2 - \dfrac{D}{A}k^2$ より明らか。

(3) $(\Rightarrow)$ (ア) $A \neq 0$ のとき, $I = \left(h + \dfrac{B}{A}k\right)^2 - \dfrac{D}{A^2}k^2$ とおくと

$$F(h,k) = A\left\{\left(h + \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{D}{A^2}k^2\right\} = AI$$

より $F(h,k)$ が正負両方の値をとるならば I も正負両方の値をとる。もし $D \leqq 0$ と仮定すると $I \geqq 0$ となり, I が正負両方の値をとることに反する。よって $D > 0$ である。

(イ) $A = 0$ のとき $D = B^2$, もし $B = 0$ と仮定すると

$F(h,k) = Ck^2$ となり, $F(h,k)$ が正負両方の値をとることに反する。よって $B \neq 0$ だから $D = B^2 > 0$ である。

$(\Leftarrow)$ 2 次式 $F(x,1) = Ax^2 + 2Bx + C$ の判別式は $D = B^2 - AC$ であり, $D > 0$ であれば 2 次式 $F(x,1)$ は正負両方の値をとる。 (証明終)

(注) $D = B^2 - AC < 0$ のときは $AC > 0$ である。つまり A と C は同符号であり, 片方が正であれば もう一方も正になる。

< 付録5 : 極値を取る十分条件 >

[定理]

> $f(x,y)$ は 2 回までの偏導関数が存在して, 各偏導関数が連続とする。
>
> $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0,\ D(a,b)=\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)\times f_{yy}(a,b)<0$ のとき
>
> (1) $f_{xx}(a,b)>0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極小になる。
>
> (2) $f_{xx}(a,b)<0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極大になる。

[証明]　P.23 の式より

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a,b)h+f_y(a,b)k$$
$$+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a',b')h^2+2f_{xy}(a',b')hk+f_{yy}(a',b')k^2\right\}$$

が成り立つ。ここで $a'=a+\theta h,\ b'=b+\theta k\ (0<\theta<1)$ である。

$$A'=f_{xx}(a',b'),\ B'=f_{xy}(a',b'),\ C'=f_{yy}(a',b'),\ D'=(B')^2-A'C'$$

$$A=f_{xx}(a,b),\ B=f_{xy}(a,b),\ C=f_{yy}(a,b),\ D=B^2-AC$$

とおくと $(h,k)\to(0,0)$ のとき $(a',b')\to(a,b)$ より $A'\to A,\ B'\to B,\ C'\to C,\ D'\to D$ である。

$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ より

$$\Delta f=f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}\left\{A'h^2+2B'hk+C'k^2\right\}$$

である。

(1) $D<0,\ A>0$ のとき $|h|,|k|$ を十分小さくとれば $D'<0,\ A'>0$ となる。

すなわち, ある正数 $\delta>0$ が存在して $|h|<\delta,|k|<\delta$ ならば $D'<0,A'>0$ である。

このとき $\Delta f=\dfrac{1}{2}\left\{A'\left(h+\dfrac{B'}{A'}k\right)^2-\dfrac{D'}{A'}k^2\right\}>0\quad(0<|h|<\delta\ ,\ 0<|k|<\delta)$

だから $(0<|h|<\delta\ ,\ 0<|k|<\delta)$ の範囲で $\Delta f=f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$ より

$f(a+h,b+k)>f(a,b)$ が成り立つ。従って (a,b) で $f(x,y)$ は極小になる。

(2) $D<0,\ A<0$ のとき ある正数 $\delta>0$ が存在して $|h|<\delta,|k|<\delta$ ならば

$D'<0,\ A'<0$ となる。$0<|h|<\delta,\ 0<|k|<\delta$ の範囲で

$$\Delta f=\frac{1}{2}\left\{A'\left(h+\frac{B'}{A'}k\right)^2-\frac{D'}{A'}k^2\right\}<0$$

より, この範囲で $f(a+h,b+k)<f(a,b)$ が成り立つ。従って

(a,b) で $f(x,y)$ は極大になる。　(証明終)

< 付録6 : 鞍点になる十分条件 >

[定理]

> $f(x,y)$ は 2 回までの偏導関数が存在して, 各偏導関数が連続とする。
>
> $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ でかつ $D(a,b)=\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)>0$ ならば
>
> $f(x,y)$ は (a,b) で鞍点になる。

[証明] 前ページの証明と同じ記号を用いる。

$$\Delta f=f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}\left\{A'h^2+B'hk+C'k^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{A'\left(h+\frac{B'}{A'}k\right)^2-\frac{D'}{A'}k^2\right\}$$

(1) $A=f_{xx}(a,b)>0$ のとき $|h|,\ |k|$ を十分小さくとれば $A'>0$, $D'>0$

① $k=0$ のとき $\Delta f=\dfrac{A'}{2}h^2>0$, ② $h+\dfrac{B'}{A'}k=0$ のとき $\Delta f=-\dfrac{D'}{2A'}k^2<0$

よって直線 $k=0$ のと方向では極小になり, 直線 $h=-\dfrac{B}{A}k$ の方向では極大になるから, 鞍点になる。

(2) $A=f_{xx}(a,b)<0$ のとき $|h|,\ |k|$ を十分小さくとると $A'<0$, $D'>0$

① $k=0$ のとき $\Delta f=\dfrac{A'}{2}h^2<0$, ② $h+\dfrac{B'}{A'}k=0$ のとき $\Delta f=-\dfrac{D'}{2A'}k^2>0$

より (1) と同様に鞍点になる。

(3) $A=f_{xx}(a,b)=0$ のとき $D=B^2>0$ より $B\neq 0$

(ア) $C=f_{yy}(a,b)>0$ のとき $|h|,\ |k|$ を十分小さくとれば $C'>0$, $D'>0$

$$\Delta f=\frac{1}{2}\left\{C'k^2+2B'hk\right\}=\frac{1}{2}\left\{C'\left(k+\frac{B'}{C'}h\right)^2-\frac{D'}{C'}h^2\right\}$$

① $h=0$ のとき $\Delta f=\dfrac{C'}{2}k^2>0$, ② $k+\dfrac{B'}{C'}h=0$ のとき $\Delta f=-\dfrac{D'}{2C'}h^2<0$

よって直線 $h=0$ のと方向では極小になり, 直線 $k=-\dfrac{B}{C}h$ の方向では極大になるから鞍点になる。

(イ) $C=f_{yy}(a,b)<0$ のとき $|h|,\ |k|$ を十分小さくとれば $C'<0$, $D'>0$

① $h=0$ のとき $\Delta f=\dfrac{C'}{2}k^2<0$, ② $k+\dfrac{B'}{C'}h=0$ のとき $\Delta f=-\dfrac{D'}{2C'}h^2>0$

より (ア) と同様に鞍点になる。

(ウ) $C=f_{yy}(a,b)=0$ のとき

$$\Delta f=B'hk$$

$|h|,|k|$ が十分小さければ B' の符号は B の符号と同じ。

① 直線 $k=h$ の方向では $\Delta f=B'h^2(\fallingdotseq Bh^2)$

② 直線 $k=-h$ の方向では $\Delta f=-B'h^2(\fallingdotseq -Bh^2)$

①, ②の Δf の符号がちがうので, 鞍点になる。 (証明終)

< 付録7 : 最大・最小について >

1.　2 変数関数 $f(x,y)$ の定義域 D が有限な範囲 $(a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d)$ の 中に含まれていて，D はその境界も含むときを考える。$f(x,y)$ が D で連続であれば，D で最大値 および最小値をとる。最大値または最小値をとる点は D の境界か，または内部の停留点である。従って，D で $f(x,y)$ の最大値 (または最小値) を求めようとするときは，まず停留点 (x_0,y_0) をさがし，その値 $f(x_0,y_0)$ と，境界での $f(x,y)$ の値を比較してみれば良い。

2.　P.30 の問題の場合，$a = \sqrt[3]{2V}$ とおくと

$$f(x,y) = xy + \frac{a^3}{y} + \frac{a^3}{x} \qquad\qquad (x > 0,\ y > 0)$$

と表される。この関数が $(x,y) = (a,a)$ のとき極小になることは f_x, f_y, f_{xx}, D 等を計算すればわかる。実は $(x,y) = (a,a)$ のとき最小になることが次のようにしてわかる。

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(xy + \frac{a^3}{y}\right) + \frac{a^3}{x} \\ &= \left(\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{a^3}{y}}\right)^2 + 2\sqrt{xa^3} + \frac{a^3}{x} \cdots (*) \end{aligned}$$

より　$g(x) = 2\sqrt{xa^3} + \dfrac{a^3}{x}$

とおくと　$g'(x) = \sqrt{\dfrac{a^3}{x}} - \dfrac{a^3}{x^2} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})}{x^2}$ より増減表は下のようになるから

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
y'	$\times$	$-$	0	$+$
y	$\times$	$\searrow$	$3a^2$	$\nearrow$

①　$g(x) \geqq 3a^2$　(等式は $x = a$ のとき)

がわかる。また，$(*)$ 式より

②　$f(x,g) \geqq g(x)$　(等号は $xy = \frac{a^3}{y}$ のとき)

がわかる。①, ②より $x > 0,\ y > 0$ に対して

$$\boxed{f(x,y) \geqq 3a^2 \qquad (\text{等号は } x = y = a \text{ のとき})}$$

が得られる。

< 付録 8 : 陰関数の定理 >

関数 $y = f(x)$ では，x の値に対し y の値が対応している。一方，2 つの変数 x, y の間に，ある関数式 $g(x, y) = 0$ が成り立っているとする。x の値を与えれば，この関係式を y の方程式と考えて，y について解くことにより，y の値が求められる場合がある。このようにして y は x の関数とみなすことができる。これを関係式 $g(x, y) = 0$ の定める**陰関数**という。
一般的に n 変数の関係式 $g(x_1, \cdots, x_n) = 0$ に対し，x_n が $n-1$ 変数 $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ の関数 $x_n = \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1})$ と考えられるとき，これを関係式 $g(x_1, \cdots, x_n) = 0$ の定める陰関数という。次の定理が成り立つ。

〔定理〕 (陰関数の定理)

正定数 $\alpha (> 0)$ と実数定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し，

$$D_\alpha = \big\{(x_1, \cdots, x_n) \ : \ |x_i - a_i| < \alpha \ \ (i = 1, \cdots, n)\big\}$$

とおく。D_α を定義域とする n 変数関数 $g(x_1, \cdots, x_n)$ は D_α 内で連続で偏微分可能であり，

各偏導関数 $g_{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} g$ も連続であり，

$$g(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n) = 0 \quad , \quad g_{x_n}(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n) \neq 0$$

をみたすとする。このときある正定数 $\alpha_1 (0 < \alpha_1 \leqq \alpha)$ が存在して，D_{α_1} 上で $g_{x_n} \neq 0$ であり，

$$g(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = 0 \qquad \big((x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \in D_{\alpha_1}\big)$$

をみたす $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ は一意的に $x_n = \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1})$ の形に解ける。

ここで $\varphi(x_1, \cdots, x_{n-1})$ は $\varphi(a_1, \cdots, a_{n-1}) = a_n$ をみたす

$$D' = \big\{(x_1, \cdots, x_{n-1}) : |a_i - x_i| < \alpha_1 \ (i = 1, \cdots, n-1)\big\}$$

上の連続関数で，偏微分可能であり，次式が成り立つ。

$$(*) \ \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1}) = -\frac{g_{x_i}(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)}{g_{x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

(注)$(*)$ 式は $g\big(x_1, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1})\big) = 0$ を x_i で偏微分すると $g_{x_i} + g_{x_n} \cdot \varphi_{x_i} = 0$ から得られる。

< 付録9：条件つき極値問題 >

n 変数関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ と $g(x_1,\cdots,x_n)$ が与えられていて，

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|g_{x_i}|\neq 0$　とする。　条件

$$g(x_1,\cdots,x_n)=0 \quad \cdots \ (*)$$

のもとで，$f(x_1,\cdots,x_n)$ の極値を求める問題を**条件つき極値問題**という。

$|g_{x_n}|\neq 0$ のとき，この問題は方程式 $g=0$ によって定まる陰関数 $x_n=\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})$

のグラフの上で $F(x_1,\cdots.x_{n-1})=f\big(x_1,\cdots,x_{n-1},\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})\big)$ の極値を求める

問題とみなすことができる。

$(x_1,\cdots,x_n)=(a_1,\cdots,a_n)\quad \big(a_n=\varphi(a_1,\cdots,a_{n-1})\big)$ で極値をとるとすると

$\dfrac{\partial}{\partial x_i}F(a_1,\cdots,a_{n-1})=0\quad (i=1,\cdots,n-1)$ より

$$f_{x_i}\big(a_1,\cdots,a_{n-1},\varphi(a_1,\cdots,a_{n-1})\big)+f_{x_n}\big(a_1,\cdots,a_{n-1},\varphi(a_1,\cdots,a_{n-1})\big)\cdot\varphi_{x_i}(a_1,\cdots,a_{n-1})=0$$

である。前ページの陰関数の定理から

$$f_{x_i}+f_{x_n}\times\big(-\frac{g_{x_i}}{g_{x_n}}\big)=0$$

ここで $\dfrac{f_{x_n}}{g_{x_n}}=-\lambda$ とおくと

$$f_{x_i}+\lambda g_{x_i}=0 \qquad\qquad (i=1,\cdots,n-1,n)$$

が成り立つ。よって次の定理が成り立つ。

定理　n 変数関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，$g(x_1,\cdots,x_n)$ は偏微分可能で各偏導関数

は連続であり，$\sum_{i=1}^{n}|\frac{\partial}{\partial x_i}g(x_1,\cdots,x_n)|\neq 0$ とする。

$f(x_1,\cdots,x_n)$ を条件

$(*)\qquad \boxed{g(x_1,\cdots,x_n)=0}$

に制限したとき，$(x_1,\cdots,x_n)=(a_1,\cdots,a_n)$ で f が極値を取るならば

$$(**)\quad \begin{cases} f_{x_i}(a_1,\cdots,a_n)+\lambda g_{x_i}(a_1,\cdots,a_n)=0 & (i=1,2,\cdots,n)\\ g(a_1,\cdots,a_n)=0 \end{cases}$$

を満たす定数 λ が存在する。この λ を**ラグランジュの乗数**という。

＜付録 10：ラグランジュの乗数法＞

前ページの定理を**ラグランジュの乗数法**という。

例 P30 の問題をラグランジュの乗数法によって調べる。

マスの縦，横，高さを x, y, z ， V を正の定数,

$g(x,\ y,\ z) = xyz - V$ ：マスの容積 $-V$

$f(x,\ y,\ z) = xy + 2xz + 2yz$ ：マスの表面積

とおく。$g = 0$ の条件の下で f の極値を求めたい。

$(x,\ y,\ z) = (a,\ b,\ c) \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$ で極値をとるとすると,

ラグランジュの乗数法より

$$\begin{cases} f_x(a,\ b,\ c) + \lambda g_x(a,\ b,\ c) = b + 2c + \lambda bc = 0 & \cdots ① \\ f_y(a,\ b,\ c) + \lambda g_y(a,\ b,\ c) = a + 2c + \lambda ac = 0 & \cdots ② \\ f_z(a,\ b,\ c) + \lambda g_z(a,\ b,\ c) = 2a + 2b + \lambda ab = 0 & \cdots ③ \\ g(a,\ b,\ c) = abc - V = 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

をみたす λ が存在する。

① $\times a -$ ③ $\times c$

$$\begin{array}{rl} & ab + 2ac + \lambda abc = 0 \\ -) & \underline{2ac + 2bc + \lambda abc = 0} \\ & ab - 2bc = 0 \ \cdots ⑤ \end{array}$$

② $\times b -$ ③ $\times c$

$$\begin{array}{rl} & ab + 2bc + \lambda abc = 0 \\ -) & \underline{2ac + 2bc + \lambda abc = 0} \\ & ab - 2ac = 0 \ \cdots ⑥ \end{array}$$

⑤ $-$ ⑥より　$2ac - 2bc = 0 \Rightarrow 2c(a-b) = 0 \Rightarrow c > 0$ より $a = b \cdots ⑦$

③より $\lambda = -\dfrac{2a+2b}{ab} = -\dfrac{4}{a}$

②より $a + 2c - \frac{4}{a} \times ac = 0 \Rightarrow a = 2c$

⑦より　$a = b = 2c$ を④に代入

$$4c^3 = V \Rightarrow c = \sqrt[3]{\tfrac{V}{4}}\ , \qquad a = b = 2c = \sqrt[3]{2V}$$

よって　$\underline{a = \sqrt[3]{2V},\ b = \sqrt[3]{2V},\ c = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}}$　$\left(a : b : c = 1 : 1 : \dfrac{1}{2}\right)$ となる。

(注) ラグランジュの乗数法は極値をとるための必要条件である。

これだけでは極小値であることは言えないが，極値の候補を

簡単な計算で探すことができる。