< 全微分可能性 >

[微分可能性]

1 変数関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは，極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lambda$$

が存在するときである。この式を書きかえると

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)-\lambda h}{h}\right|=0$$

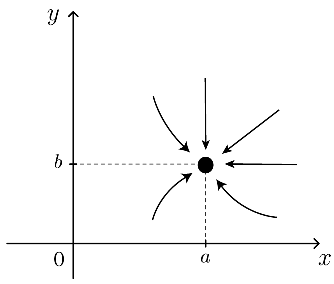
となる。この定数 λ を $x=a$ における微分係数といい，$\lambda=f'(a)$ と書く。

[全微分可能性]

2 変数関数 $f(x,\ y)$ が $(x,\ y)=(a,\ b)$ で**全微分可能**であるとは

$$(*)\quad \boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)-\lambda_1 h-\lambda_2 k|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0}$$

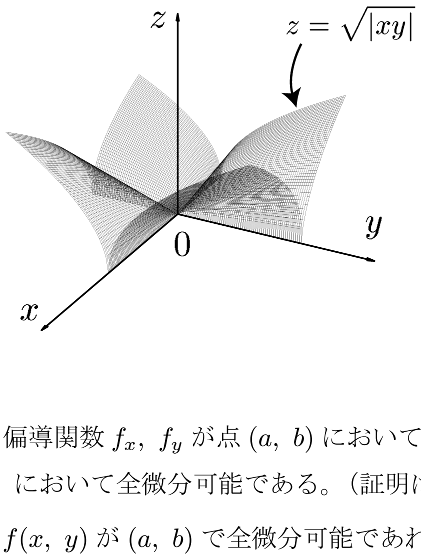
となる定数 $\lambda_1,\ \lambda_2$ が存在するときである。

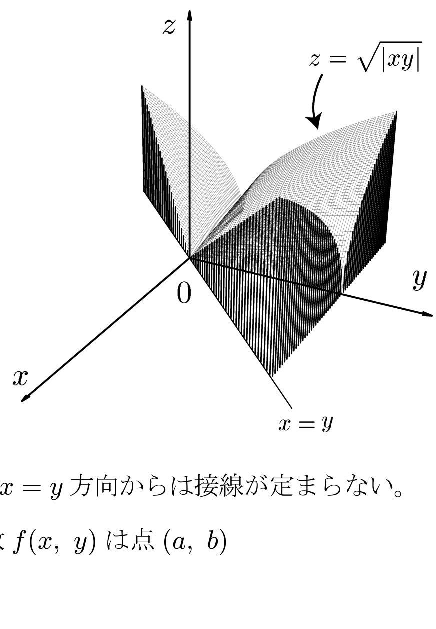


(注 1) $(a+h,\ b+k)$ が $(a,\ b)$ に近づく近づき方はいろいろである (右図参照)。どんな方向から近づいても，$(*)$ の極限値は 0 になる。すなわちどんな方向からでも微分可能になる。(どんな方向からも接線が引ける。)

(注 2) 全微分可能であれば偏微分可能であり，$\lambda_1=f_x(a,\ b)$，$\lambda_2=f_y(a,\ b)$ となる。しかし，偏微分可能であっても全微分可能であるとは限らない。

例 $f(x,\ y)=\sqrt{|xy|}$ は $(x,\ y)=(0,\ 0)$ で偏微分可能だが全微分可能ではない。





$x=y$ 方向からは接線が定まらない。

(注 3) 偏導関数 $f_x,\ f_y$ が点 $(a,\ b)$ において連続であれば，関数 $f(x,\ y)$ は点 $(a,\ b)$ において全微分可能である。(証明は P50)

(注 4) $f(x,\ y)$ が $(a,\ b)$ で全微分可能であれば，$(a,\ b)$ で連続である。