

< 関数の 2 次近似 >

テーラーの定理で, $n = 3$, $b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3 \quad (a < c < x)$$

をみたす c が存在する。ここで $f'''(c)$ が大きくない場合, x が a に十分近い

と $\frac{f'''(c)}{3}(x-a)^3$ は小さいので, 次の近似式が成り立つ。

$$(*) \quad \boxed{x \rightleftharpoons a \text{ のとき } f(x) \rightleftharpoons f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2} \quad (2 \text{ 次近似式})$$

これを $f(x)$ の $x = a$ の近くでの **2 次近似式** という。

(注) $f(x)$ が $x < a$ でも定義されている場合は, 2 次近似式 (*) は $x < a$ のときも成り立つ。

例 $f(x) = x^5$ のとき $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$ より x^5 の 2 次近似式は

$$\underline{x \rightleftharpoons a \text{ のとき } \quad x^5 \rightleftharpoons a^5 + 5a^4(x-a) + 10a^3(x-a)^2}$$

問 $f(x)$ が次の関数の場合に $x = a$ の近くでの 2 次近似式を求めよ。ただし $n \geq 2$ とする。

(1) $f(x) = x^n$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

(3) $f(x) = \log x$

(4) $f(x) = \sin x$

(5) $f(x) = \cos x$

(6) $f(x) = e^x$