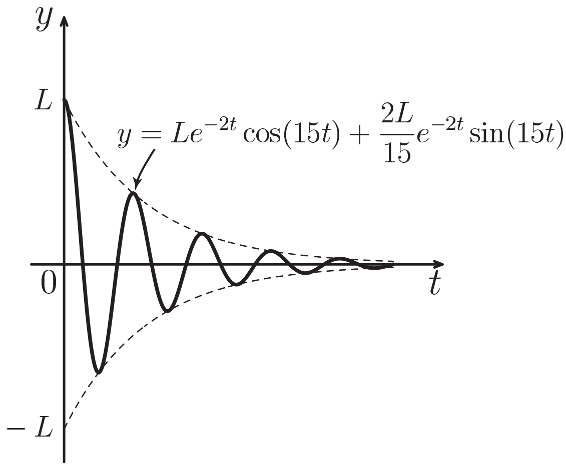
高知工科大学

Kochi University of Technology

数 学 3

（2009年度）



常微分方程式入門

（複素数，オイラーの公式，1階線形微分方程式
変数分離形，定数係数2階線形微分方程式）

井上 昌昭　著

< 複素数の定義 >

$$i^2 = -1$$

となる数を考え，この数 i を **虚数単位** という。虚数単位は $i = \sqrt{-1}$
と書く場合もある。(電気関係の本は虚数単位を j で表すことがあるが
数学や物理学の本では虚数単位は i で統一してある。)

実数 a, b に対し

$$z = a + bi$$

の形を **複素数** (*complex number*) とよび，複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$
という記号で表す。実数 a, b をそれぞれ複素数 z の **実部** (*real part*)
および **虚部** (*imaginary part*) とよび,

$$a = \mathrm{Re}(z)\ , \quad b = \mathrm{Im}(z)$$

という記号で表す。とくに

$$b = 0 \text{ のとき } \ z = a + 0i = a$$

と定める。つまり実数は虚部が 0 の特別な複素数と考える
ことにする。また $b \neq 0$ のとき、 z を **虚数** とよび、とくに

$$bi \ \ (a = 0, b \neq 0)$$

の形の虚数を **純虚数** という。

$$\text{複素数}(\boldsymbol{C}) \begin{cases} \text{実数}(\boldsymbol{R}) \\ \\ \text{虚数} \begin{cases} \text{純虚数} & \cdots \ 2i\ ,\ \frac{1}{3}i\ ,\ -\sqrt{2}i \ \text{ など} \\ \text{その他の虚数} & \cdots \ 1+2i\ ,\ -2+\sqrt{3}i \ \text{ など} \end{cases} \end{cases}$$

２つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しい場合に限り、２つの
複素数が等しいという。すなわち

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ かつ } b = d$$

$$\text{とくに } a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

例　(1) $a + bi = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{3},\ \ b = 0$

(2) $a + bi = -3i \quad \Leftrightarrow \quad a = 0,\ \ b = -3$

(3) $a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{1}{2},\ \ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問　次式をみたす実数 a, b を求めよ。

(1) $a + bi = \dfrac{1 + 3i}{2}$　　　(2) $a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{3}\ i$

< 複素数の四則演算 >

x_1, x_2, y_1, y_2 が実数のとき

① $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

② $(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

③ $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

④ $\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}+i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}$

複素数の計算では実数と同じように行い，i^2 が出てくれば -1 でおきかえれば良い。
また分数のときは，④のように分母を実数になおす。

例 (1) $2(1+4i)+5(3-2i)=(2+8i)+(15-10i)=17-2i$

(2) $(3+4i)(5+7i)=3\times5+4\times7i^2+i(3\times7+4\times5)=-13+41i$

(3) $\dfrac{4-i}{3+2i}=\dfrac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{4\times3+2i^2-i(4\times2+3\times1)}{3^2-2^2i^2}$

$$=\frac{12-2-i(8+3)}{9+4}=\frac{10}{13}-\frac{11}{13}i$$

問 次式を簡単にせよ。ただし a, b, c, d は実数とする。

(1) $3(6-2i)-4(2-i)=$

(2) $i^3=$ (3) $i^4=$ (4) $i^5=$ (5) $i^6=$

(6) $i^7=$ (7) $i^8=$ (8) $i^9=$ (9) $i^{10}=$

(10) $(4+3i)(4-3i)=$

(11) $(a+bi)(c+di)=$

(12) $\dfrac{c+di}{a+bi}=$

< 負の数の平方根 >

前のページまでの計算規則に従うと

$$(\sqrt{2}\,i)^2 = -2\,, \quad (-\sqrt{2}\,i)^2 = -2$$

となるから，-2 の平方根は $\sqrt{2}\,i$ と $-\sqrt{2}\,i$ である。
これらの数をそれぞれ

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}\,i\,, \quad -\sqrt{-2} = -\sqrt{2}\,i$$

のように表すことにする。一般に

$$\boxed{a > 0 \text{ のとき} \quad \sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i}$$

と定める。

例 1　$\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = \sqrt{4}\,i \times \sqrt{9}\,i = 2 \times 3 \times i^2 = -6$

（注）　$\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} \neq \sqrt{(-4) \times (-9)}$　$(= \sqrt{36} = 6)$

このように $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになるときは，普通の $\sqrt{\ }$ の
計算規則がなりたたない。$\sqrt{\ }$ の中がマイナスになる場合
は必ず虚数単位 i を用いて計算しなければならない。

例 2　$\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} = \dfrac{2}{3i} = \dfrac{2 \times i}{3i \times i} = \dfrac{2i}{-3} = -\dfrac{2}{3}i$

$$\sqrt{\frac{4}{-9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}\,i = \frac{2}{3}i$$

従って　$\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} \neq \sqrt{\dfrac{4}{-9}}$ である。

問　次式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt{(-3) \times (-4) \times (-5)}$

(2)　$\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} \times \sqrt{-5}$

(3)　$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}}$

(4)　$\sqrt{\dfrac{12}{-4}}$

< 2 次方程式 >

実数 a, b, c $(a \neq 0)$ に対し，2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

と変形できる。従って

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より解の公式

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

が求まる。ここで $\sqrt{}$ の中がマイナスになれば，答は虚数になる。
虚数解も 2 次方程式の解と考えると，2 次方程式は複素数の範囲で必ず解がある。

例　2 次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

は解の公式によって

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{6} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

問　次の 2 次方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1) $x^2 - 6x + 13 = 0$　　　$x =$

(2) $x^2 + x + 2 = 0$　　　$x =$

(3) $3x^2 - 5x + 4 = 0$　　　$x =$

< 共役複素数 >

たとえば

$$3+2i \text{ と } 3-2i\,,\qquad 1-\sqrt{3}i \text{ と } 1+\sqrt{3}i$$

のように，虚部の符号だけが違う２つの複素数を **互いに共役** (きょうやく) という。
一方は他方の **共役複素数** という。複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ で表す。
すなわち, 実数 a, b に対し,

$$\boxed{z=a+bi \quad \text{のとき} \quad \overline{z}=a-bi}$$

である。従って $\overline{z}$ の共役複素数は $\overline{\overline{z}}=a+bi$ であるから

$$\overline{\overline{z}}=z$$

である。

例 (1) $\overline{2+3i}=2-3i$, $\overline{(-1-\sqrt{2}i)}=-1+\sqrt{2}i$

(2) $\overline{4}=4$, $\overline{(-5i)}=5i$

(3) $z=3+2i$ のとき $\overline{z}=3-2i$

$$z+\overline{z}=(3+2i)+(3-2i)=6$$

$$z\overline{z}=(3+2i)(3-2i)=3^2+2^2=13$$

問 1 以下の複素数 z に対し，共役複素数 $\overline{z}$ を求めよ。

(1) $z=1$, $\overline{z}=$

(2) $z=i$, $\overline{z}=$

(3) $z=1-i$, $\overline{z}=$

(4) $z=\dfrac{1+i}{2}$, $\overline{z}=$

問 2 $z=4+3i$ に対し，次式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$

$=$

(2) $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$

$=$

(3) $z\overline{z}$

$=$

問 3 実数 a, b に対し，$z=a+bi$ とする。以下の値を a と b で表せ。

(1) $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$

$=$

(2) $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$

$=$

(3) $z\overline{z}$

$=$

< 絶対値 >

複素数 $z = a + bi$（ a , b は実数）に対し,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を z の **絶対値** という。

例　$z = 3 + 2i$ のとき

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

問 1　複素数 z が以下の場合に絶対値 $|z|$ を求めよ。

(1) $z = -1$　　(2) $z = 7i$　　(3) $z = 3 + 4i$　　(4) $z = \dfrac{1+i}{2}$

$|z| =$　　$|z| =$　　$|z| =$　　$|z| =$

前ページの結果より複素数 $z = a + bi$ に対して

$$\boxed{z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

が成り立つ。

例 2　$z = 2 + 3i$ のとき

$$|z|^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i - 3^2 = -5 + 12i$$

$$|z^2| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

問 2　以下の複素数 z に対して, $|z|^2$, z^2 , $|z^2|$ を求めよ。

(1) $z = 4 - 3i$　　(2) $z = 1 + i$

$|z|^2 =$　　$|z|^2 =$

$z^2 =$　　$z^2 =$

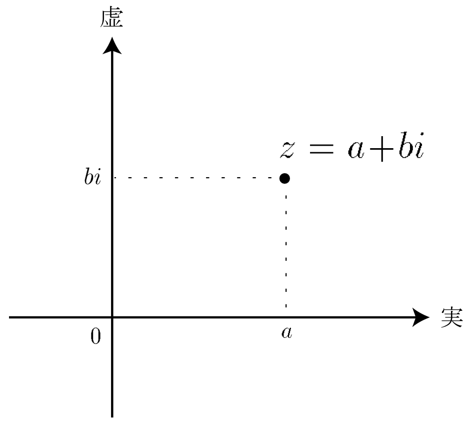
$|z^2| =$　　$|z^2| =$

< 複素平面 >

実数が数直線上の点で表されたように，複素数を平面上の点として表現する。実数 a, b に対し，複素数

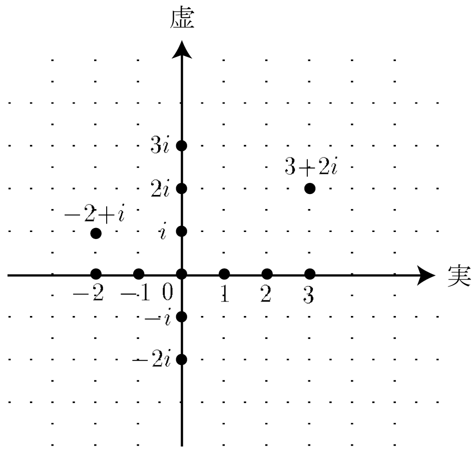
$$z = a + bi$$

を，右図のように，横軸上の目もりが a, 縦軸上の目もりが b である平面上の点として表す。この平面を **複素平面** または **ガウス平面** という。



例 1　右図のように

実数 $-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ は全て横軸上に並んでいる。この横軸を **実軸** という。
純虚数 $-2i, -i,\ i,\ 2i,\ 3i$ は全て縦軸上に並んでいる。この縦軸を **虚軸** という。



問 1　例 1 の右図の中に以下の複素数を図示せよ。

(1) $1+i$,　　(2) $2-2i$,　　(3) $-3+3i$,　　(4) $-2-3i$

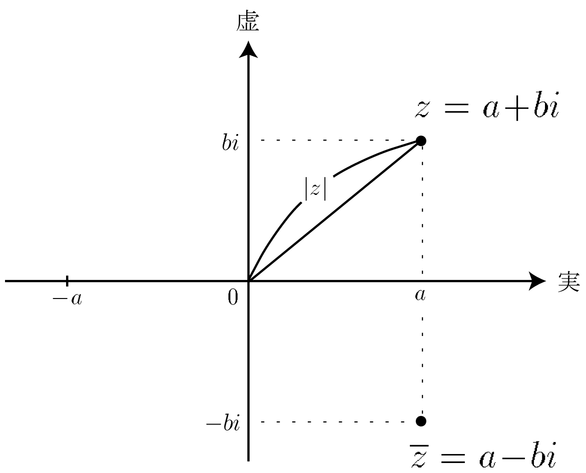
例 2　a, b を正の数とすると
複素数 $z = a+bi$ は右図の位置にあり，共役複素数

$$\overline{z} = a - bi$$

は実軸に関して対称な位置にある。
また，絶対値

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

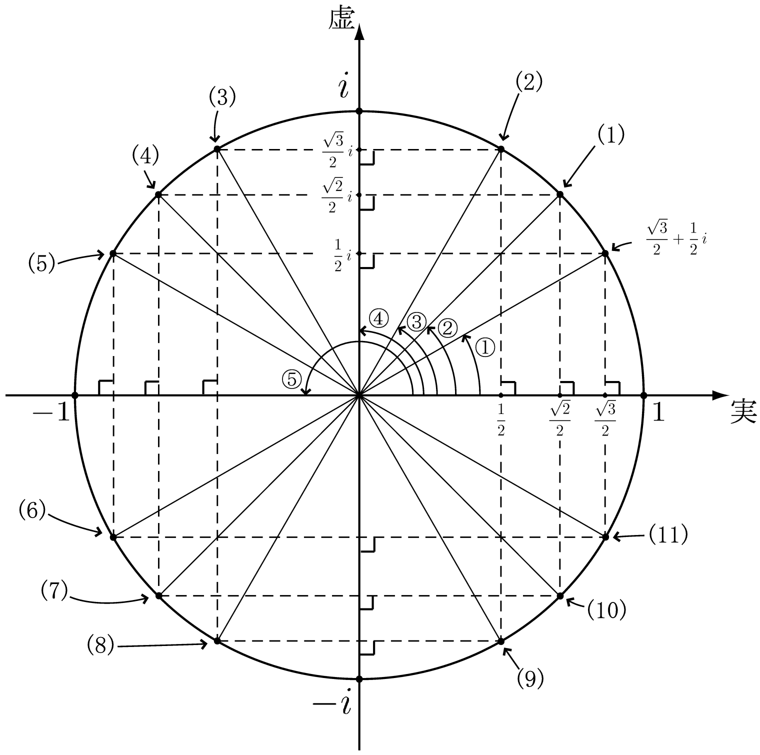
は原点からの距離を表す。



問 2　例 2 の右図上に $-z$ および $-\overline{z}$ を図示せよ。

＜ 絶対値 1 の複素数 ＞

問 1　右図の複素平面上の点 (1)〜(11) を表す複素数を求めよ。



(1)　　　　(2)

(3)　　　　(4)

(5)　　　　(6)

(7)　　　　(8)

(9)　　　　(10)

(11)

問 2　右の図の角度①〜⑤を弧度法で表せ。

①　　　　②

③　　　　④　　　　⑤

例　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6},\quad -i=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

問 3　次の複素数を $\cos\theta+i\sin\theta$ の形にせよ。角度 θ は弧度法で表せ。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　　(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(3) i　　(4) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(5) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　　(6) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

(7) -1　　(8) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

(9) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　　(10) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(11) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　(12) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

(13) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$　　(14) 1

< 極形式 1 >

複素数 $z = x + yi$ に対し，

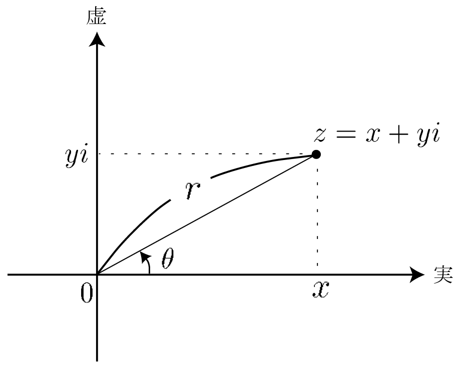
$$|z| = r$$

で，右図のように x 軸の正の部分からの角度が θ であるとき

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta$$

となる。従って

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)} \quad \text{（極形式）}$$



と表される。これを z の**極形式**という。このとき角 θ は複素数 z の**偏角** という。

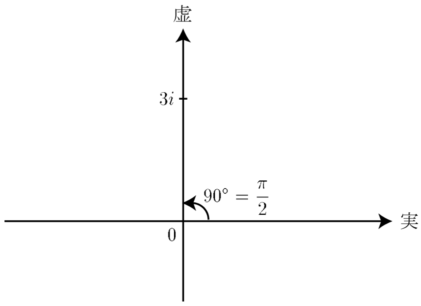
(注）$r = |z|$(z の**絶対値**) より $r \geqq 0$ である。

例　(1) $z = 3i$ のとき右図より

$$r = |z| = 3,\ \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

だから

$$3i = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

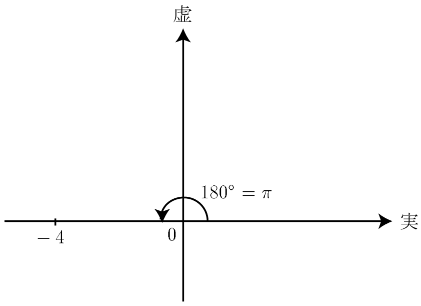


(2) $z = -4$ のとき右図より

$$r = |z| = 4,\ \theta = 180^\circ = \pi$$

だから

$$-4 = 4\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$

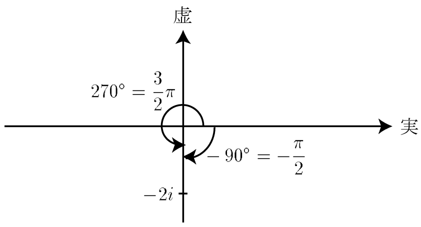


(3) $z = -2i$ のとき右図より

$$r = |z| = 2,\ \theta = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$$

だから

$$-2i = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$$



(注 1) 270° の位置と -90° の位置は同じだから

$$-2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ としてもよい。}$$

(注 2) 例 (3) で $-2i = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ としてはいけない。

極形式として表す場合には $r = |z|$ は負ではない ($r \geqq 0$) から。

問　次の複素数を極形式になおせ。

(1)　$4i$　　　　(2)　-2

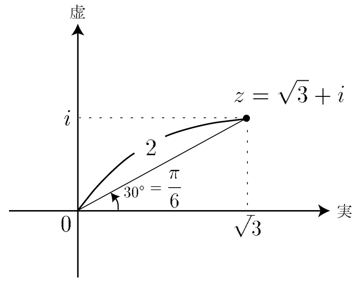
(3)　$-\sqrt{2}i$

< 極形式 2 >

例 (1) $z = \sqrt{3} + i$ に対し，$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ で

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$ ， $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ だから

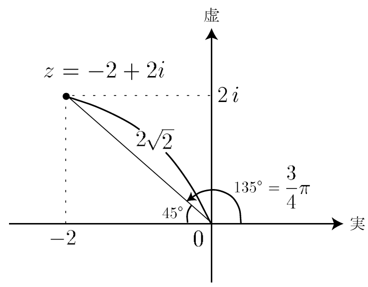
$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



(2) $z = -2 + 2i$ に対し，$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$ より

$$z = 2\sqrt{2}\left(\frac{-2+2i}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

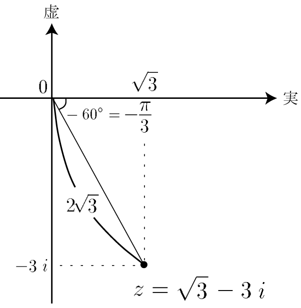
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$



(3) $z = \sqrt{3} - 3i$ に対し，$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}$ より

$$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3} - 3i}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$



(注) $z = x + yi$ に対し，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ を計算し，$\dfrac{x}{r} = \cos\theta$,
$\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ を満たす角 θ を求めれば良い。なお角 θ は必ず弧度法
(ラジアン) で表す。また例 (3) の偏角 θ は $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$ のどちらでもよい。

問 以下の複素数を極形式で表せ。

(1) $z = 1 + i$

(2) $z = -1 + \sqrt{3}i$

(3) $z = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i$

(4) $z = -3 - \sqrt{3}i$

(5) $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

＜ 複素数の積と商 ＞

三角関数の加法定理より

$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2),$

$$\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} = \cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)$$

となるから次式が成立する。

① $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

② $\dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

①において $r_1 = r_2 = 1,\ \theta_1 = \theta_2 = \theta$ のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

となる。一般に

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

が成り立つ。これをド・モアブル (A. de Moivre) の公式という。
この公式は $n = -1,\ -2,\ \cdots$ に対しても成り立つ。

問 1　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，次の複素数を極形式で表せ。

(1)　i

(2)　iz

問 2　$(\sqrt{3} + i)^6$ を簡単にせよ。

< オイラーの公式 >

複素数 z に対し e の z 乗をマクローリン展開

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad (= \exp(z))$$

によって定義する。これを $e^z = \exp(z)$ と書く場合もある。

今 $z = x + iy$ (x,y は定数) のとき，(詳しい計算は省略するが)

$$e^{x+iy} = 1 + (x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \frac{(x+iy)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots\right) \times \left(1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= e^x \times e^{iy}$$

が成立する。ここで三角関数のマクローリン展開の結果から

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$= \cos y + i \sin y$　であるから次の式が成立する。

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)} \qquad (x \text{ と } y \text{ は実数})$$

この式を**オイラーの公式**という。特に $x = 0$ のときは $\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$ となる。

例　$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$,　　$e^{2+\pi i} = e^2(\cos\pi + i \sin\pi) = -e^2$

問　次の複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{2\pi i} =$

(2) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$

(3) $e^{\frac{\pi}{3}i}$

(4) $e^{\frac{3\pi}{4}i}$

(5) $e^{\frac{7\pi}{6}i}$

(6) $e^{\frac{5\pi}{3}i}$

(7) $e^{-1+\frac{\pi}{4}i}$

(8) $e^{\frac{1}{2}-\frac{3\pi}{2}i}$

< 複素数の指数表示 >

絶対値が 1 の複素数 z は，偏角が θ であるとき

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

と表される。

例 1　$\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = e^{\frac{5\pi}{3}i}$　$\left(= e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)$

問 1　次の複素数を指数の形にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$　　(2) i

(3) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　　(4) -1

(5) $-i$　　(6) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

例 2　絶対値が 1，偏角が θ_1 と θ_2 の複素数の積は
$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$
となる。これを指数表示で表すと

$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

となる。

問 2　ド・モアブルの定理
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
を指数表示で表せ。

問 3　次式を計算し，$x + iy$（x，y は実数）の形にせよ。

(1) $e^{\frac{3\pi}{2}i} \times e^{\frac{\pi}{2}i}$　　(2) $e^{\frac{4\pi}{3}i} \div e^{\frac{\pi}{6}i}$

(3) $\left(e^{\frac{\pi}{8}i}\right)^4$　　(4) $\left(e^{\frac{\pi}{48}i}\right)^{12}$

< 指数法則 >

２つの複素数

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (x_1 \;,\; y_1 \;,\; x_2 \;,\; y_2 \text{ は実数})$$

に対し，

$$\begin{aligned} e^{z_1} \times e^{z_2} &= \left(e^{x_1} \times e^{iy_1}\right) \times \left(e^{x_2} \times e^{iy_2}\right) = \left(e^{x_1} \times e^{x_2}\right) \times \left(e^{iy_1} \times e^{iy_2}\right) \\ &= e^{x_1+x_2}\; e^{i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

である。同様に計算すると，以下の指数法則が導ける。

(1) $e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$	(2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{\boxed{}}$
(3) $\left(e^{z}\right)^n = e^{\boxed{}}$ （ド・モアブルの定理）	$\left(\begin{array}{c} z_1 \;,\; z_2 \;,\; z \text{ は複素数} \\ n \text{ は整数} \end{array}\right)$

問 1　上の $\boxed{}$ 内に適当な式を記入せよ。

例 1　$e^{2+3i} \times e^{2-3i} = e^4 \quad , \quad e^{4+\pi i} \div e^{3-\pi i} = e^{1+2\pi i} = e$

$$\left(e^{1+\frac{\pi}{6}i}\right)^8 = e^{8+\frac{4}{3}\pi i} = e^8\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = e^8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{e^8}{2} - \frac{\sqrt{3}e^8}{2}i$$

問 2　次式を計算せよ。

(1)　$e^{5+\pi i} \times e^{-1+\pi i}$

(2)　$e^{2+\frac{\pi}{2}i} \div e^{4+\frac{\pi}{6}i}$

(3)　$\left(e^{\frac{1}{8}-\frac{\pi}{16}i}\right)^4$

例 2

$$\frac{\left(e^{\frac{\pi}{10}i}\right)^5 \times \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^8}{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i} \times e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{3}{2}\pi i}} = e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)\pi i} = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

問 3　次式を計算せよ。

$$\frac{\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^8 \times \left(e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^4}{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6}$$

< 微分積分の復習 >

[微分の復習]

関数 $f(x)$ の定義内の変数 x に対し，極限 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき，その関数 $f(x)$ は定義内で**微分可能**であるといい，その極限を

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

等で表し，$f(x)$ の**導関数**という。導関数を求めることを「**微分する**」という。

次の公式が成り立つ。

(1) $\dfrac{d}{dx}K=0$	(2) $\dfrac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$	(3) $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$
(4) $\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$	(5) $\dfrac{d}{dx}\tan x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	(6) $\dfrac{d}{dx}e^x=e^x$
(7) $\dfrac{d}{dx}a^x=a^x\log a$	(8) $\dfrac{d}{dx}\log\lvert x\rvert=\dfrac{1}{x}$	(9) $\dfrac{d}{dx}\log_a\lvert x\rvert=\dfrac{1}{x}\log_a e$
(10) $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(11) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(12) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x=\dfrac{1}{1+x^2}$

ここで K は定数，$e=\lim_{k\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=2.718\cdots$ はネピアの数，$\log x=\log_e x$ は自然対数（底が e の対数），n は任意の実数，a は 1 以外の正の実数である。

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ および定数 K に対して次の性質が成り立つ。

(1)$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$	(4)$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
(2)$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$	(5)$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g'(x)\}^2}$
(3)$\{Kf(x)\}'=Kf'(x)$	(6)$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\times g'(x)$

[積分の復習]

$F'(x)=f(x)$ であるとき，微分して $f(x)$ になる関数は全て $F(x)+C$（C は定数）の形をしている。

この $F(x)+C$ を $f(x)$ の不定積分といい

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$$

という記号で表す。$\int$ はインテグラル（integral）と言う。微分の公式より以下の式が従う。

(1) $\displaystyle\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\quad(n\neq -1)$		(2) $\displaystyle\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\log\lvert x\rvert+C$
(3) $\displaystyle\int\cos x dx=\sin x+C$	(4) $\displaystyle\int\sin x dx=-\cos x+C$	(5) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$
(6) $\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$	(7) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C$	(8) $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$

また微分の性質から次の積分の性質が従う。

(1) $\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

(3) $\displaystyle\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$

(ただし K は定数)

(4) $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

(5) $\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)dx$　　($u=g(x)$ とおく)

$\displaystyle=\int f'(u)\frac{du}{dx}dx=\int f'(u)du=f(u)+C$

$=f(g(x))+C$

< 複素数値関数の微分 >

実変数 t の複素数値関数 $Z(t)$ に対し、導関数を

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{Z(t+h)-Z(t)}{h}$$

と定める。この定義から次の性質が分かる。

1.	$\dfrac{d}{dt}\{Z_1(t)+Z_2(t)\} = \dfrac{d}{dt}Z_1(t) + \dfrac{d}{dt}Z_2(t)$
2.	$\dfrac{d}{dt}\{KZ_1(t)\} = K\dfrac{d}{dt}Z_1(t)$ (K は任意の複素数定数)

実数値関数 $x(t), y(t)$ に対し、$Z(t) = x(t) + iy(t)$ と表されているときは

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt}\{x(t)+iy(t)\} = \frac{d}{dt}x(t) + i\frac{d}{dt}y(t)$$

が成り立つ。

例　実数定数 a, b に対し、指数関数 $e^{(a+bi)t}$ の導関数は

$$\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} = \frac{d}{dt}\left\{e^{at}\cos(bt) + ie^{at}\sin(bt)\right\} = \frac{d}{dt}\left\{e^{at}\cos(bt)\right\} + i\frac{d}{dt}\left\{e^{at}\sin(bt)\right\}$$

$$= ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\sin(bt) + i\left\{ae^{at}\sin(bt) + be^{at}\cos(bt)\right\}$$

$$= e^{at}\left\{(a+bi)\cos(bt) + (-b+ai)\sin(bt)\right\} \qquad (i^2=-1)$$

$$= e^{at}\left\{(a+bi)\cos(bt) + i(ib+a)\sin(bt)\right\} = e^{at}(a+bi)\left\{\cos(bt)+i\sin(bt)\right\}$$

$$= (a+bi)e^{at}\times e^{ibt} = (a+bi)e^{(a+bi)t}$$

問　次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}e^{2t}$

(2) $\dfrac{d}{dt}\cos(3t)$

(3) $\dfrac{d}{dt}\left\{te^{3t}\right\}$

(4) $\dfrac{d}{dt}\left\{t^2\sin(3t)\right\}$

(5) $\dfrac{d}{dt}\left\{e^{2t}\cos(4t)\right\}$

(6) $\dfrac{d}{dt}\log\left|\dfrac{t}{t-1}\right|$

(7) $\dfrac{d}{dt}e^{3ti}$

(8) $\dfrac{d}{dt}e^{(2+3i)t}$

(9) $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}\right\}$

< 複素数値関数の積分 >

実変数 t の複素数値関数 $z(t)$ に対し，$\dfrac{d}{dt}Z(t) = z(t)$ であるとき，導関数が $z(t)$ となる複素数値関数は全て $Z(t) + C$ (C は任意の複素数定数) の形をしている。
これを $z(t)$ の**不定積分**といい，

$$\int z(t)dt = Z(t) + C$$

と表す。微分の性質から次の性質が従う。

1. $\displaystyle\int \big\{z_1(t) + z_2(t)\big\}dt = \int z_1(t)dt + \int z_2(t)dt$
2. $\displaystyle\int Kz_1(t)dt = K\int z_1(t)dt$ 　　　(K は任意の複素数定数)

例 1　複素数値関数 $z(t)$ が 2 つの実数値関数 $x(t)$，$y(t)$ によって
$z(t) = x(t) + iy(t)$ と表示されているときは，上の性質から次式が成り立つ，

$$\int z(t)dt = \int \big\{x(t) + iy(t)\big\}dt = \int x(t)dt + i\int y(t)dt$$

例 2　0 でない複素数 $a + bi$ (a と b は実数，$a^2 + b^2 \neq 0$) に対して

$$\int e^{(a+bi)t}dt = \frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)t} + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (t^2 - e^t + \cos t)dt$

(2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t-2}\right)dt$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+t}dt$

(4) $\displaystyle\int \big\{3\sin(2t) + i\cos(4t)\big\}dt$

(5) $\displaystyle\int \left\{e^{2t-4} + e^{-3ti} + e^{(2+3i)t}\right\}dt$

< 練習問題 >

問 1　次の複素数を極形式で表せ。ただし $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$　　(2) $-1 + i$

(3) -2　　(4) $-\sqrt{3} - 3i$

問 2　$(1+i)^{12}$ を簡単にせよ。

問 3　次の複素数を $x + yi(x, y$ は実数$)$ の形にし，できるだけ簡単にせよ。

(1) $e^{\frac{\pi}{6}i}$　　(2) $e^{1-\frac{\pi}{4}i}$

(3) $e^{\frac{2\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{2}i}$　　(4) $\left(e^{\frac{2\pi}{9}i}\right)^3 \div \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^5$

問 4　オイラーの公式を用いて、次の複素数を指数の形にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

問 5　次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}\left\{e^{3t^2-5t}\right\}$　　(2) $\dfrac{d}{dt}\left\{\cos(3t) + \sin(5t)\right\}$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{te^{4t}\}$　　(4) $\dfrac{d}{dt}\left\{\log\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\right\}$

(5) $\dfrac{d}{dt}\left\{e^{2t}\sin(3t)\right\}$　　(6) $\dfrac{d}{dt}\left\{e^{(3+4i)t}\right\}$

問 6　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \left(\sin(3t) + \cos(4t) - e^{5t}\right) dt$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2 - t} dt$

< 微分方程式 >

I.Newton(1642-1727) と G.W.Leibniz(1646-1716) は微分と積分が逆の関係であることを示し，微分積分法の記号と計算法を整備した。Newton は惑星の運動におけるケプラーの法則を数学的に説明するために，微分 (導関数) を含む方程式を用いた。これが微分方程式 (differential equation) の始まりだと思われる。それ以来，連続量の変化，特に運動などの時間変化を記述するために微分方程式が用いられることが多い。このワークブックでは，独立変数は時間 (時刻) を表す変数 t を用いる。例えば t の関数 y に関する微分方程式として

(1) $\dfrac{dy}{dt} = y$　　,　　(2) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}$

(3) $\dfrac{d^2y}{dy^2} = 4y$　　,　　(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 5$

等がある。(1)，(2) は 1 階導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を含む微分方程式なので **1 階微分方程式**という。

(3)，(4) は 2 階導関数 $\dfrac{d^2t}{dy^2}$ を含み，3 階以上の導関数を含まないので **2 階微分方程式**という。

一般に n 階導関数を含み，$n+1$ 階以上の導関数を含まない微分方程式を n **階微分方程式**という。

　微分方程式を満たす関数をその微分方程式の**解**という。

例　微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\dfrac{dy}{dt} = y}$$

を考える。$y = e^t$ は (1) の 1 つの解である。$\big($ $y(t) = e^t$ と書くこともある。$\big)$

(1) の解は e^t 以外に

$$y = 2e^t\ ,\ \ y = 3e^t\ ,\ \ \cdots\ ,\ \ y = -e^t\ ,\ \ y = -1.5e^t\ ,\ \ y = -3e^t\ ,\ \ \cdots$$

なども全て (1) の解である。これらの各々を微分方程式 (1) の**特殊解**という。

一方 (1) の全ての解 (特殊解の全体) は

$$(*) \quad \boxed{y = Ce^t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

の形をしている。このような任意定数 C を含む関数 $(*)$ を微分方程式 (1) の
一般解という。

＜ 1 階微分方程式の原理 ＞

微分して 0 になる関数は定数だけである。これを微分方程式の形に書くと

(定理) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = 0 \qquad \text{ならば} \qquad y = C \quad (C \text{ は定数})}$

となる。この定理を使うと 1 階微分方程式の一般解の形が決定できる。

例 微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = y}$$

を考える。前ページより $(*)$ の解は，全て

$$(**) \qquad \boxed{y = Ce^t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

の形をしていると書いた。$(**)$ が $(*)$ の解であることは

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(Ce^t) = C \times \frac{d}{dt}(e^t) = C \times (e^t) = C \times e^t = y$$

よりわかる。実は

「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない」

ことが証明できる。

(証明) $y_1 = e^t$ とする。$(*)$ の任意の解を y_2 とすると $(*)$ 式をみたすので

(1) $y_1{}' = y_1 \quad , \quad y_2{}' = y_2$

が成り立つ (ここで t に関する導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を y' と略記した)。今

$$y = \frac{y_2}{y_1}$$

とおくと、商の微分公式より

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2' \times y_1 - y_2 \times y_1'}{(y_1)^2}$$

となり (1) 式を代入すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_2 \times y_1 - y_2 \times y_1}{(y_1)^2} = 0$$

となる。定理から y が定数 C になるので

$$y = C \quad \Longrightarrow \quad \frac{y_2}{y_1} = C \quad \Longrightarrow \quad y_2 = Cy_1 = Ce^t$$

より $(*)$ の任意の解 y_2 が $(**)$ の形をしていることがわかった。(証明終)

＜ 求積法 ＞

微分方程式の解を求めることを「**微分方程式を解く**」という。
このページでは次の形の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \boxed{t\text{ だけの式}}$$

を考える。この形の微分方程式は 1 回積分することによって解くことができる。

例 1　微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (-9.8t + 19.6)dt = -4.9t^2 + 19.6t + C$$

より (1) の一般解は

$$\text{一般解：}\boxed{y = -4.9t^2 + 19.6t + C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。

例 2　微分方程式

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = t^2 - e^t + \cos t}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (t^2 - e^t + \cos t)dt = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C$$

より (2) の一般解は

$$\text{一般解：}\boxed{y = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である。

例 1，2 のように積分することによって微分方程式を解く方法を**求積法**という。

問　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 3t + 6$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t^3 + 5t^4$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2}{t^2} + \dfrac{1}{t}$

(4) $\dfrac{dy}{dt} = 4\sin t - 5\cos t$

< 1 階微分方程式の初期条件 >

例　19 ページの例で，微分方程式

(1)　$\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y}$

の一般解は

$(*)$　$\boxed{y = Ce^t}$　(C は任意定数)

であった。特殊解は一般解の任意定数 C に具体的な値を与えた関数である。一般解 $(*)$ の定数 C が定まるような条件として，例えば

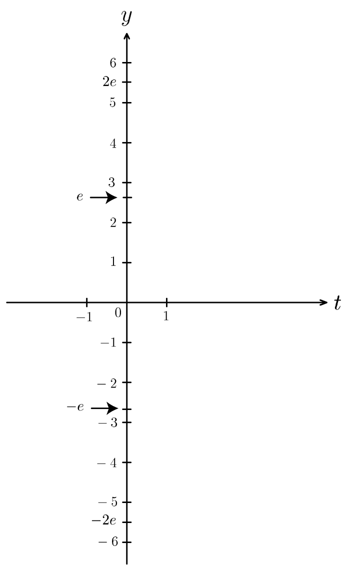
$(**)$　$\boxed{t = 0 \ \text{のとき}\ y = 1}$

という条件があれば $\boxed{C = 1}$ が定まり，特殊解 $\boxed{y = e^t}$ が定まる。$(**)$ のような条件を**初期条件**という。

問 1　次の初期条件をみたす (1) の特殊解を求めよ。

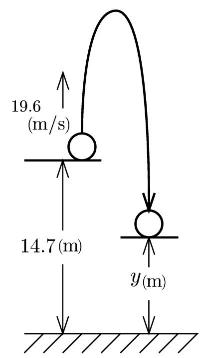
① $t = 0$ のとき $y = 2$　　② $t = 0$ のとき $y = -1$

③ $t = 0$ のとき $y = -2$　　④ $t = 0$ のとき $y = 0$



問 2　問 1 で求めた特殊解および $y = e^t$ のグラフを右図内に描け。

問 3　地上 14.7(m) の高さから物を初速 19.6m/s で真上に投げ上げたとき，t 秒後の高さを y(m) とすると



$(*)$　$\dfrac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6$

が成り立つ。

$(**)$　「$t = 0$ のとき $y = 14.7$」という初期条件をみたす $(*)$ の解を求めよ。

< 変数分離形 1 >

例　微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

の一般解は 19 ページより

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であった。

< 一般解の求め方 >

① $y \neq 0$ のとき

(∗) の両辺を y で割る。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -1$$

両辺を t で積分する。

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int (-1)dt$$

ここで置換積分の公式 $\displaystyle\int \square \frac{dy}{dt}dt = \int \square\, dy$ より

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (-1)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| + C_1 = -t + C_2 \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| = -t + C_0 \qquad (\text{ただし } C_0 = C_2 - C_1)$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = e^{-t+C_0}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \pm e^{-t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (\text{ただし } C = \pm e^{C_0} \neq 0)$$

② $y = 0$ のとき

$y = 0$ は (∗) の解である。この解は (∗∗) で $C = 0$ の場合である。
①，②より (∗) の一般解は

$$\underline{\boldsymbol{y = Ce^{-t} \qquad (C \text{ は任意定数})}}$$

問　微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = 2y$ を解け。

< 変数分離形 2 >

例題　微分方程式 (∗) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = 2t(y-1)}$ を解け。

(解)

① $y-1 \neq 0$ のとき (∗) の両辺を $y-1$ で割り，t で積分する。

$$\frac{1}{y-1}\frac{dy}{dt} = 2t$$
$$\int \frac{1}{y-1}\frac{dy}{dt}dt = \int 2tdt$$
$$\int \frac{1}{y-1}dy = \int 2tdt$$
$$\log|y-1| = t^2 + C_0$$
$$|y-1| = e^{t^2+C_0} = e^{C_0} \times e^{t^2}$$
$$y-1 = \pm e^{C_0} \times e^{t_2}$$
$$\Downarrow$$
$$(**)\ \underline{y = 1 + Ce^{t^2}} \qquad (C = \pm e^{C_0} \neq 0)$$

② $y-1=0$ のとき

$y=1$ は (∗) の解である。(∗∗) で $C=0$ の場合である

①，②より (∗) の一般解は

$$\underline{(\text{答})\ y = 1 + Ce^{t^2}} \qquad (C\ \text{は任意の定数})$$

(注)　$\boxed{\dfrac{dy}{dt} = (t\ \text{の関数}) \times (y\ \text{の関数})}$ の形の微分方程式を

変数分離形といい，例題と同じやり方で解ける。

問　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = (6t+5)y$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = (3t^2+4)(y-2)$

< 変数分離形 3 >

例題　微分方程式 (∗) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y(1-y)}$ を解け。

(解)

① $y(1-y) \neq 0$ のとき ($y \neq 0$ かつ $y \neq 1$ のとき) (∗) の両辺を $y(1-y)$ で割って，t で積分すると

$$\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int 1\, dt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \int 1\, dt$$

$$\Rightarrow \log|y| - \log|y-1| = t + C_0 \Rightarrow \log\left|\frac{y}{y-1}\right| = t + C_0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y}{y-1}\right| = e^{t+C_0} \Rightarrow \frac{y}{y-1} = Ce^t \qquad (C = \pm e^{C_0} \neq 0)$$

$$\Rightarrow y = Ce^t y - Ce^t \qquad \Rightarrow Ce^t = (Ce^t - 1)y$$

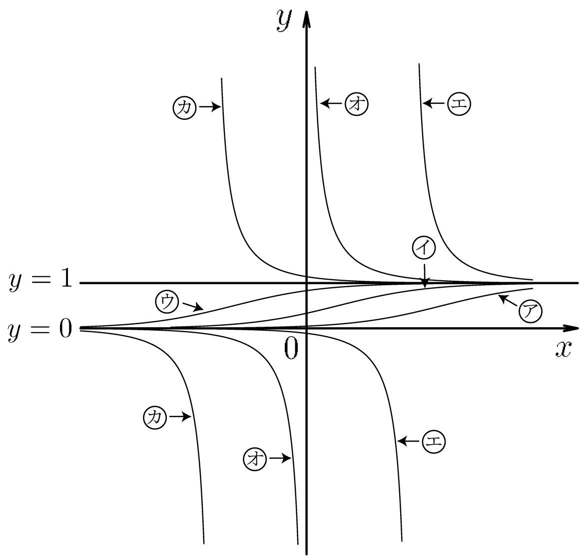
$$\Rightarrow y = \frac{Ce^t}{Ce^t - 1} \quad (C \neq 0) \quad \cdots (**)$$

② $y = 0$ のとき
$y = 0$ は (∗) の解であり，(∗∗) で
$C = 0$ の場合である。

③ $y = 1$ のとき
$y = 1$ は (∗) の解であるが，
(∗∗) の形では表せない。

①，②，③より (∗) の解は

(答) $\underline{y = \dfrac{Ce^t}{Ce^t - 1}\ (C\ \text{は任意定数})\ \text{および}\ y = 1}$



(注 1)　右上図の曲線は一般解において C が次の場合の解のグラフである。

ア $C = -0.05$，イ $C = -0.5$，ウ $C = -5$，エ $C = 0.1$，オ $C = 1$，カ $C = 8$

(注 2)　$\dfrac{dy}{dt} = y(a - by)$ の型の微分方程式を**ロジスティック方程式**という。

問　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = y^2$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = y(y+1)$

< 同次形 >

$(*)$ $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = f\left(\dfrac{y}{t}\right)}$ の形の微分方程式を同次形といい，

次のようにして解を求めることができる。$\boxed{\dfrac{y}{t} = u}$ とおくと，u は t の関数であり，$y = tu$ から，

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = u + t\frac{du}{dt}}$$

これを $(*)$ に代入すると $\quad u + t\dfrac{du}{dt} = f(u)$ であるから，

$$(**) \quad \boxed{\frac{du}{dt} = \frac{f(u) - u}{t}}$$

となる。$(**)$ は変数分離形であり，$(**)$ の解 $u = u(t)$ から $y = t \times u(t)$ を求めれば良い。

例 $(*)$ $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2y}{t} + 1}$ を考える。 $u = \dfrac{y}{t}$ とおくと $(*)$ 式は

$(**)$ $\boxed{\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u+1}{t}}$ となる。 $(**)$ は変数分離形である。

① $u \neq -1$ のとき

$$\int \frac{1}{u+1}du = \int \frac{1}{t}dt \Rightarrow \log|u+1| = \log|t| + C_0$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{u+1}{t}\right| = C_0 \Rightarrow \frac{u+1}{t} = \pm e^{C_0} = C \ (\neq 0) \text{ とおく}$$

$$\Rightarrow u + 1 = Ct \Rightarrow \underline{u = Ct - 1} \quad (C \neq 0)$$

② $u = -1$ のとき，定数関数 $u = -1$ は $(**)$ の解

①，②より $(**)$ の一般解は $\underline{u = Ct - 1}$ (C は任意定数)

$u = \dfrac{y}{t}$ から $y = tu$ より $(*)$ の一般解は $\underline{(\text{答})\ y = Ct^2 - t}$ (C は任意の定数)

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} + 1$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2y}{t} - 3$

< 1 階線形微分方程式 1 >

t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ が与えられたとき、未知関数 y に関する次の形の微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

を **1 階線形微分方程式**という。ここで「線形」というのは未知関数 y とその導関数 $\frac{dy}{dt}$ に関する一次式であることを意味する。(y^3 や $(\frac{dy}{dt})^2$ などのある微分方程式は非線形という。)
特に $q(t) = 0$ のとき

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の形の微分方程式を **1 階線形同次微分方程式**という。

例　同次微分方程式

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + 2ty = 0}$$

の一般解を求める。移項すると

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

となり変数分離形になるので、

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (-2t) dt$$

より一般解は

一般解 ： $\boldsymbol{y = Ce^{-t^2}}$ **($\boldsymbol{C}$ は任意定数)**

問 1　次の微分方程式を解け。(ただし a は定数)

(1) $\dfrac{dy}{dt} + ay = 0$　　(2) $\dfrac{dy}{dt} - 10ty = 0$　　(3) $\dfrac{dy}{dt} + (6t^2 + 1)y = 0$

問 2　同次微分方程式 $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$ の一般解を不定積分 $\displaystyle\int p(t)dt$ を用いて表せ。

＜1階線形微分方程式2＞

例　t の関数 y に関する微分方程式

(1)　$\boxed{\dfrac{dy}{dt}+3y=5}$

の一般解は $\underline{y=\dfrac{5}{3}+Ce^{-3t}\quad (C\text{ は任意定数})}$ である。

解であることは

$$\frac{dy}{dt}+3y=\frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3}+Ce^{-3t}\right)+3\left(\frac{5}{3}+Ce^{-3t}\right)=0-3Ce^{-3t}+5+3Ce^{-3t}=5$$

よりわかる。

＜一般解の求め方＞

(1) に対し，同次方程式

(2)　$\boxed{\dfrac{dy}{dt}+3y=0}$

の一般解は Ce^{-3t} である。そこで y を

(3)　$\boxed{y=C(t)e^{-3t}}$

とおき (1) 式を満たすように $C(t)$ を定める。積の微分公式より

$$\frac{dy}{dt}+3y=C'(t)e^{-3t}+C(t)\times(-3)e^{-3t}+3C(t)e^{-3t}=C'(t)e^{-3t}$$

(1) 式より

$$\underline{\frac{dy}{dt}+3y=C'(t)e^{-3t}=5}$$

とおくと

$$C'(t)=5e^{3t}$$

$$\underline{C(t)=\int C'(t)dt=\int 5e^{3t}dt=\frac{5}{3}e^{3t}+C}$$

であるから (3) 式より

$$y=\left(\frac{5}{3}e^{3t}+C\right)e^{-3t}=\frac{5}{3}+Ce^{-3t}$$

$\underline{(\text{答})\quad y=\dfrac{5}{3}+Ce^{-3t}\quad (C\text{ は任意定数})}$

問　次の微分方程式を解け。ただし a，b は定数で $a\neq 0$ とする。

(1)　$\dfrac{dy}{dt}+4y=7$　　　　(2)　$\dfrac{dy}{dt}+ay=b$

＜ 1 階線形微分方程式 3 ＞

例　t の関数 y に関する微分方程式

(1)　$\boxed{\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}}$

の一般解は $\underline{y = \dfrac{1}{7}e^{4t} + Ce^{-3t} \quad (C \text{ は任意定数})}$ である。

解であることは

$$\frac{dy}{dt} + 3y = \frac{4}{7}e^{4t} + C \times \left(-3e^{-3t}\right) + 3\left(\frac{1}{7}e^{4t} + Ce^{-3t}\right) = e^{4t}$$

よりわかる。

＜ 一般解の求め方 ＞

(1)　に対し，同次方程式

(2)　$\boxed{\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0}$

の一般解は Ce^{-3t} である。そこで y を

(3)　$\boxed{y = C(t)e^{-3t}}$

とおき (1) 式を満たすように $C(t)$ を定める。積の微分公式より

$$\frac{dy}{dt} + 3y = C'(t)e^{-3t} + C(t) \times (-3)e^{-3t} + 3C(t)e^{-3t} = C'(t)e^{-3t}$$

(1)　式より

$$\underline{\frac{dy}{dt} + 3y = C'(t)e^{-3t} = e^{4t}}$$

とおくと

$$C'(t)e^{-3t} = e^{4t}$$
$$\Downarrow$$
$$C'(t) = e^{7t}$$

$$\underline{C(t) = \int e^{7t}dt = \frac{1}{7}e^{7t} + C}$$

であるから (3) 式より

$$y = \left(\frac{1}{7}e^{7t} + C\right)e^{-3t} = \frac{1}{7}e^{4t} + Ce^{-3t}$$

$\underline{(\text{答})\quad y = \dfrac{1}{7}e^{4t} + Ce^{-3t} \qquad (C \text{ は任意定数})}$

(注) このような一般解の求め方を**定数変化法**という。

問　次の微分方程式を解け。

(1)　$\dfrac{dy}{dt} + 4y = e^{5t}$

(2)　$\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{5t}$

(3)　$\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$

(4)　$\dfrac{dy}{dt} + 4y = e^{-4t}$

< 1 階微分方程式の練習 1 >

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = e^{5t} - 2\sin(4t) - 5\cos(3t)$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = 3y$

(3) $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = 0$

(4) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = 4$

(5) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{-t}$

(6) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$

＜ 1 階微分方程式の練習 2 ＞

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{dy}{dt} = ty(y+1)$

(2)　$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{t^2} + \dfrac{y}{t}$

(3)　$\dfrac{dy}{dt} + 2ty = t$

(4)　$\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{y}{t} = t^2$

＜ 2 階線形微分方程式 ＞

与えられた関数 $a(t)$，$b(t)$，$F(t)$ に対し，未知関数 y に関する微分方程式

$$(*)_1 \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = F(t)}$$

を **2 階線形微分方程式**という。この形の微分方程式は場合に応じて解の形が違うが，共通して次の基本定理が成り立つ。

＜ 基本定理 ＞

任意の数 t_0 と定数 α，β に対して

$$(*)_2 \quad \boxed{y(t_0) = \alpha, \quad y'(t_0) = \beta}$$

を満たす $(*)_1$ の解 $y = y(t)$ がただ一つ存在する。

通常は $t_0 = 0$ の場合を考えるので，条件 $(*)_2$ を**初期条件**という。

$(*)_1$ で $F(t) = 0$ の場合の微分方程式

$$(*)_0 \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0}$$

を **2 階線形同次微分方程式**という。基本定理から次のことが証明される。

定理 $(*)_1$ の任意の解 $y = y(t)$ は

$$(*)_3 \quad \boxed{y(t) = y_*(t) + C_1y_1(t) + C_2y_2(t)} \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

と表される。ここで $y_*(t)$ は $(*)_1$ の解であり，$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は $(*)_0$ の解で $\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$ は定数ではない。

この定理の証明は付録 4(P.53)。$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は同次微分方程式 $(*)_0$ の**基本解**という。$y_*(t)$ は微分方程式 $(*)_1$ の**特殊解**という。$(*)_3$ を $(*)_1$ の**一般解**と呼ぶ。

例 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -10$ の一般解は $\underline{y(t) = -5t^2 + C_1t + C_2}$ $(C_1, C_2 \text{は任意定数})$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 8$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 6t + 2$

< 2 階線形同次微分方程式 >

2 階線形同次微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0}$$

に対して，$y_*(t) = 0$(恒等的に 0 の関数) は $(*)$ の解である。これを同次微分方程式の**自明な解**という。
前ページの定理で $y_*(t) = 0$ とおくと次の定理が得られる。

定理

$(*)$ の任意の解 $y = y(t)$ は

$$(**) \quad \boxed{y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)} \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

と表せる。ここで $y_1(t)$，$y_2(t)$ は $(*)$ の解であり，$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$ は定数ではない。

$(**)$ の $y(t)$ を $(*)$ の**一般解**という。$y_1(t)$ と $y_2(t)$ を $(*)$ の**基本解**という。この基本解 $y_1(t)$，$y_2(t)$ は自明な解ではない。

例　微分方程式

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

を考える。今 $y_1(t) = e^{2t}$，$y_2(t) = e^{3t}$ とおくと

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 5\frac{dy_1}{dt} + 6y_1 = (e^{2t})'' - 5(e^{2t})' + 6e^{2t} = 4e^{2t} - 5 \times 2e^{2t} + 6e^{2t} = 0$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} - 5\frac{dy_2}{dt} + 6y_2 = (e^{3t})'' - 5(e^{3t})' + 6e^{3t} = 9e^{3t} - 5 \times 3e^{3t} + 6e^{3t} = 0$$

より $y_1(t)$ と $y_2(t)$ は (1) の解であり，$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)} = \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}} = e^t$ は定数ではない。

従って $y_1(t)$，$y_2(t)$ は (1) の基本解であり，$\boldsymbol{y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}}$ $(C_1, C_2$は任意定数) は (1) の一般解である。

問　$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$ $(C_1, C_2$は定数) が (1) の解であることを確かめよ。

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 1 >

定数 a, b に対し、t の関数 y に関する微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0}$$

を**定数係数 2 階線形同次微分方程式**という。

例　前のページ例の微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

の 2 つの基本解は e^{2t} と e^{3t} であった。この基本解を求めるには

次のように考えればよい。

< 基本解の求め方 >

基本解を $e^{\lambda t}$ とすると、微分方程式 (1) をみたすから

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) - 5\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) + 6e^{\lambda t} = 0$$

すなわち　$\lambda^2 e^{\lambda t} - 5\lambda e^{\lambda t} + 6e^{\lambda t} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)e^{\lambda t} = 0$

従って　$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

よって $\lambda = 2$ または $\lambda = 3$ より基本解は e^{2t} または e^{3t} となる 。

一般の定数係数 2 階線形同次微分方程式 $(*)$ において、λ に関する 2 次方程式

$$(**) \qquad \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

を $(*)$ の**特性方程式**という。$(*)$ の解を求めるためには $(**)$ の解を求めればよい。

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 4y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 16y = 0$

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 2 >

例　t の関数 y に関する微分方程式

(1)　$$\frac{d^2y}{dt^2}+9y=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-9y$$

を考える。今 $y_1(t)=\cos(3t),\quad y_2(t)=\sin(3t)$ とおくと

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=(\cos(3t))''=(-3\sin(3t))'=-9\cos(3t)=-9y_1$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}=(\sin(3t))''=(3\cos(3t))'=-9\sin(3t)=-9y_2$$

であるから y_1 と y_2 は (1) の基本解であり，従って一般解は

$\boldsymbol{y=C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)}\cdots$ (1) の一般解

である。この基本解 y_1 と y_2 を発見するには，次のように考える。

< 基本解の見つけ方 >

微分方程式 (1) の特性方程式は

$$\lambda^2+9=0$$

であり，その解は $\lambda=\pm 3i$ である。複素数の範囲では，e^{3it} と e^{-3it} が基本解となる。複素数の範囲の一般解は、

$y=Ae^{3it}+Be^{-3it}\cdots$ 複素数の範囲の一般解

となる。ここで、A,B は任意の複素数定数である。この式を書きかえると

$$Ae^{3it}+Be^{-3it}=A(\cos(3t)+i\sin(3t))+B(\cos(3t)-i\sin(3t))=(A+B)\cos(3t)+i(A-B)\sin(3t)$$

となる。ここで，A と B が互いに共役な複素数のとき，y は実数になる。特に

のときは　$A=\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2i \quad , \quad B=\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2i$　　(C_1,C_2は任意の実数定数)

$y=C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)\cdots$ 実数の範囲の一般解

となる。従って $\cos(3t)$ と $\sin(3t)$ が実数の範囲の基本解である。

問　次の微分方程式の実数の範囲の一般解を求めよ。ただし ω は 0 でない実数定数である。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$

(2)　$\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=0$

(3)　$\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 3 >

例 t の関数 y に関する微分方程式

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0$

を考える。今 $y_1 = e^{2t}\cos(3t)$ とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} = 2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t), \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = -5e^{2t}\cos(3t) - 12e^{2t}\sin(3t) \text{ より}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 4\frac{dy_1}{dt} + 13y_1$$
$$= -5e^{2t}\cos(3t) - 12e^{2t}\sin(3t) - 4\left\{2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t)\right\} + 13e^{2t}\cos(3t) = 0$$

となるので y_1 は (1) の解である。同様に $y_2 = e^{2t}\sin(3t)$ も (1) の解であるので，y_1 と y_2 が (1) の基本解であり，(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1e^{2t}\cos(3t) + C_2e^{2t}\sin(3t)} \cdots (1) \text{ の一般解}$$

となる。この基本解 y_1，y_2 を発見するには，次のように考える。

< 基本解の見つけ方 >

微分方程式 (1) の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

であり、その解は $\lambda = 2 \pm 3i$ である。複素数の範囲では，$e^{(2+3i)t}$ と $e^{(2-3i)t}$ が基本解となる。複素数の範囲の一般解は、 $y = Ae^{(2+3i)t} + Be^{(2-3i)t} \cdots$ 複素数が範囲の一般解となる。ここで A,B を任意の複素数定数である。この式を書きかえると

$$Ae^{(2+3i)t} + Be^{(2-3i)t} = Ae^{2t}(\cos(3t) + i\sin(3t)) + Be^{2t}(\cos(3t) - i\sin(3t))$$
$$= (A+B)e^{2t}\cos(3t) + i(A-B)e^{2t}\sin(3t)$$

となる。ここで，A と B が互いに共役な複素数のとき，y は実数になる。特に

$$A = \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2 i \quad , \quad B = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 i \qquad (C_1, C_2 \text{は任意の実数定数})$$

のときは

$$y = C_1e^{2t}\cos(3t) + C_2e^{2t}\sin(3t) \cdots \text{実数の範囲の一般解}$$

となる。従って $e^{2t}\cos(3t)$ と $e^{2t}\sin(3t)$ が実数の範囲の基本解である。

問 1 $y = e^{2t}\sin(3t)$ に対し，次式を計算せよ。

$\dfrac{dy}{dt} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{d^2y}{dt^2} =$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 13y =$

問 2 次の微分方程式の実数の範囲の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$ $\qquad$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 10y = 0$

＜ 定数係数 2 階線形同次微分方程式 4 ＞

例　t の関数 y に関する微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$ より $\lambda = 3$（重解）であるから基本解は e^{3t} だけしか求まらない。実はもう 1 つの基本解は te^{3t} となる。従って (1) の一般解は $\boldsymbol{y = C_1 te^{3t} + C_2 e^{3t}}$（$C_1$，$C_2$ は任意定数）となる。

問 1　$y = te^{3t}$ が (1) の解であることを確かめよ。

＜ (1) の一般解の求め方 ＞

微分方程式 (1) を

$$(1)\quad y'' - 6y' + 9y = 0$$

とする。両辺に $3y' - 9y$ を加えると

$$y'' - 3y' = 3y' - 9y$$

$$\Downarrow$$

$$(2)\quad (y' - 3y)' = 3(y' - 3y)$$

ここで $y' - 3y = z$ とおくと

$$(2) \Rightarrow z' = 3z$$

$$\Downarrow$$

$$z = C_1 e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

$$y' - 3y = C_1 e^{3t}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{(\text{答})\quad y = C_1 te^{3t} + C_2 e^{3t}}$$

問 2　定数 C_1 に対し，1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - 3y = C_1 e^{3t}$$

の一般解を定数変化法により求めよ。

問 3　a を定数とする。y に関する 2 階微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2a\frac{dy}{dt} + a^2 y = 0$$

の一般解を求めよ。

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 5 >

一般の定数係数 2 階線形同次微分方程式

(1) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0}$$

の一般解の求め方をまとめる。

Step1. 特性方程式

(2) $$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

を解く。

Step2. 2 次方程式 (2) の解が 2 実解，2 虚解，重解の各場合によって次のようになる。

[I] $a^2 - 4b > 0$ のとき (2) は異なる 2 つの実数解 $\lambda = \alpha$，β をもつ。

このとき (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

[II] $a^2 - 4b < 0$ のとき (2) は共役な 2 つの虚数解 $\lambda = \mu \pm \nu i$ をもつ。

このとき (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\mu t}\cos(\nu t) + C_2 e^{\mu t}\sin(\nu t)} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

[III] $a^2 - 4b = 0$ のとき (2) は重解 $\lambda = \alpha$ をもつ。

このとき (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 t e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t}} \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 8\dfrac{dy}{dt} + 20y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0$

< 定数係数２階線形非同次微分方程式 1 >

与えられた定数 a, b と関数 $F(t)$ に対して、未知関数 $y = y(t)$ に関する微分方程式

$(*)_1$　$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + a\dfrac{dy}{dt} + by = F(t)}$　(非同次式)

を**定数係数 2 階線形非同次微分方程式**という。これに対し同次式を

$(*)_0$　$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + a\dfrac{dy}{dt} + by = 0}$　(同次式)

とおく。P32 の定理より、次の定理が成り立つ。

定理　$(*)_1$ の任意の解 $y = y(t)$ は

$\boxed{y(t) = y_*(t) + C_1y_1(t) + C_2y_2(t)}$　(C_1, C_2は任意定数)

と表させる。ここで $y_*(t)$ は $(*)_1$ の特殊解であり，$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は $(*)_0$ の基本解である。

(注)　関数 $F(t)$ が定数で $b \neq 0$ のとき、$(*)_1$ の特殊解は定数である。

例　微分方程式

$(*)_1$　$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 5}$

を考える。今、特殊解を $y_*(t) = K$(定数) とおくと、

$$\frac{d^2y_*}{dt^2} - 3\frac{dy_*}{dt} + 2y_* = \frac{d^2}{dt^2}(K) - 3\frac{d}{dt}(K) + 2K = 2K = 5$$

より $y_*(t) = K = \dfrac{5}{2}$。また同次式

$(*)_0$　$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0}$

の基本解は $y_1(t) = e^t$，$y_2(t) = e^{2t}$ だから、

$(*)_1$ の一般解は $\boxed{y(t) = \dfrac{5}{2} + C_1e^t + C_2e^{2t}}$　(C_1, C_2 は任意定数)

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 6$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 20$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 5y = 7$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 6$

＜ 定数係数２階線形非同次微分方程式 2 ＞

定数 a, b, K に対し，次の微分方程式を考える。

$(*)_1$ $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+a\dfrac{dy}{dt}+by=K}$

今，同次微分方程式

$(*)_0$ $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+a\dfrac{dy}{dt}+by=0}$

の 2 つの基本解を $y_1(t)$, $y_2(t)$ とする。

問 1　$b \neq 0$ のとき $(*)_1$ の一般解を b, K と $y_1(t)$, $y_2(t)$ および任意定数 C_1, C_2 を用いて表せ。

$b=0$ のとき $(*)_1$ は

$(*)'$ $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+a\dfrac{dy}{dt}=K}$

となる。このときは次のように考える。

$$\boxed{v=\frac{dy}{dt}}$$

とおくと $(*)'$ は

$(*)''$ $\boxed{\dfrac{dv}{dt}+av=K}$

となる。

問 2　$a \neq 0$ のとき $(*)''$ の一般解 v を求めよ。

問 3　$a \neq 0$ のとき $(*)'$ の一般解 y を求めよ。

問 4　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}=0$　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}=6$

< 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 3 >

与えられた関数 $F(t)\ \big(\neq 0\big)$ と定数 a，b に対し次の形の微分方程式

$$(*)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=F(t)$$

を**定数係数 2 階線形非同次微分方程式**という。前ページより，$F(t)$ が定数の時は $(*)$ の特殊解は定数 ($b\neq 0$ のとき)，1 次式 ($b=0$，$a\neq 0$ のとき)，2 次式 ($a=b=0$ のとき) となる。実は $F(t)$ が t の整式のときは特殊解も t の整式になる。さらに定数 r，α，β に対し，$F(t)$ が $re^{\alpha t}$，$re^{\alpha t}\cos(\beta t)$，$re^{\alpha t}\sin(\beta t)$ の形のとき $(*)$ の特殊解は次の表のようになる $\big($ 証明は実際に $(*)$ 式の左辺に特殊解を代入し，計算して右辺の形になるように確かめればよいので省略する。$\big)$

$F(t)$	a，b と α，β の関係	特殊解 $y_*(t)$
$re^{\alpha t}$	① $\alpha^2+\alpha a+b\neq 0$	$\dfrac{r}{\alpha^2+\alpha a+b}e^{\alpha t}$
	② $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2\alpha+a}te^{\alpha t}$
	③ $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a=0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2}t^2e^{\alpha t}$
$re^{\alpha t}\cos(\beta t)$	④ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=\big(2\alpha+a\big)\beta\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\left\{A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)\right\}$
	⑤ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=\big(2\alpha+a\big)\beta=0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\sin(\beta t)$
$re^{\alpha t}\sin(\beta t)$	⑥ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=\big(2\alpha+a\big)\beta\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\left\{A\sin(\beta t)-B\cos(\beta t)\right\}$
	⑦ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=\big(2\alpha+a\big)\beta=0\end{cases}$	$-\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\cos(\beta t)$

例　定数 ω，r，β (ただし $\omega^2\neq\beta^2$ とする) に対し微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=r\sin(\beta t)$$

を考える。上の表では $a=0$，$b=\omega^2$，$\alpha=0$，$A=-\beta^2+\omega^2\neq 0$，$B=0$ であるから⑥の場合であり，特殊解 y_* は $y_*=\frac{r}{A^2+0^2}e^0\big\{A\sin(\beta t)-0\big\}=\frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)$ である。一方 (1) の同次方程式

$$(2)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$$

の一般解は 35 ページより $C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ であるから，(1) の一般解は

$$(1)\text{ の一般解：}\ \boldsymbol{y=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)+\frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)}\qquad (C_1,C_2\text{ は任意定数})$$

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし ω は 0 でない定数とする。

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=r\sin(\omega t)$$

＜１階微分方程式の初期値問題＞

例題　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6 - 10t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 20 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y = -5 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(解)　(1) 求積法より $y = \displaystyle\int (6 - 10t)dt = 6t - 5t^2 + C$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = C = 20$　　(答) $y = 6t - 5t^2 + 20$

(2) 23 ページと同様にして一般解は $y = Ce^{-2t}$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = Ce^0 = C = 5$　　(答) $y = 5e^{-2t}$

(3) 29 ページと同様に考える。

同次方程式 $\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ の一般解は Ce^{-2t} だから $y = C(t)e^{-2t}$

とおく
$$\frac{dy}{dt} + 2y = C'(t)e^{-2t} = -5$$
より
$$C(t) = \int (-5e^{2t})dt = -\frac{5}{2}e^{2t} + C$$

となる。よって (3) の一般解は
$$y = \left(-\frac{5}{2}e^{2t} + C\right)e^{-2t} = -\frac{5}{2} + Ce^{-2t} \text{ となる。}$$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = -\dfrac{5}{2} + Ce^0 = -\dfrac{5}{2} + C = 4$ より $C = \dfrac{13}{2}$

(答) $y = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{13}{2}e^{-2t}$

問　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。(ただし k, g は定数で $k \neq 0$)

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 10 - 9.8t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -5y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = -g \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

＜ 2 階微分方程式の初期値問題 1 ＞

例 1　微分方程式

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -10$

の一般解は

(2) $y = -5t^2 + C_1 t + C_2$　　(C_1，C_2 は任意定数)

である。ここで初期条件

(3) $y(0) = 3$,　$y'(0) = 4$

があれば $y(t) = -5t^2 + C_1 t + C_2$, $y'(t) = -10t + C_1$ より

$$y(0) = C_2 = 3\ ,\quad y'(0) = C_1 = 4$$

となるから

$$y = -5t^2 + 4t + 3$$

が (3) をみたす (1) の解である。

例 2　(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

の一般解は

(5) $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$　　(C_1，C_2 は任意定数)

である。ここで初期条件

(6) $y(0) = 5$,　$y'(0) = 7$

があれば $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$,　$y'(t) = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t}$ より

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 5 \\ \\ y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow\ C_1 = 8\ ,\ C_2 = -3$$

となるから

$$\underline{y = 8e^{2t} - 3e^{3t}}$$

が (6) をみたす (4) の解である。

問　次の微分方程式を以下の初期値条件のもとで解け。

(1) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dt^2} = 8 \\ \\ y(0) = 7\ ,\ y'(0) = 6 \end{array}\right.$

(2) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} - 5y = 0 \\ \\ y(0) = 7\ ,\ y'(0) = 8 \end{array}\right.$

< 2階微分方程式の初期値問題 2 >

例 1 (1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0 \\ \\ y(0) = 4\ ,\ y'(0) = 5 \end{cases}$

(解) (1) の一般解は $y(t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$ である。

$y'(t) = -3C_1\sin(3t) + 3C_2\cos(3t)$ で初期条件より

$y(0) = C_1 = 4\ ,\quad y'(0) = 3C_2 = 5 \quad\Rightarrow\quad C_2 = \dfrac{5}{3}$

<u>(答) $y(t) = 4\cos(3t) + \dfrac{5}{3}\sin(3t)$</u>

例 2 (2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0 \\ \\ y(0) = 4\ ,\ y'(0) = 5 \end{cases}$

(解) (2) の特性方程式は $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - 2)^2 + 9 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 2 \pm 3i$

だから，(2) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{2t}\cos(3t) + C_2e^{2t}\sin(3t)$$

である。導関数は積の微分公式より

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2C_1e^{2t}\cos(3t) - 3C_1e^{2t}\sin(3t) + 2C_2e^{2t}\sin(3t) + 3C_2e^{2t}\cos(3t) \\ &= (2C_1 + 3C_2)e^{2t}\cos(3t) + (-3C_1 + 2C_2)e^{2t}\sin(3t) \end{aligned}$$

となる。初期条件より

$y(0) = C_1 = 4\ ,\quad y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 5 \quad\Rightarrow\quad C_2 = \dfrac{1}{3}(5 - 2C_1) = -1$

<u>(答) $y(t) = 4e^{2t}\cos(3t) - e^{2t}\sin(3t)$</u>

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \\ \\ y(0) = 5\ ,\ y'(0) = 6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0 \\ \\ y(0) = 7\ ,\ y'(0) = 8 \end{cases}$

＜ 2 階微分方程式の初期値問題 3 ＞

例 1 (1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0 \\ y(0) = 5\ ,\ y'(0) = 7 \end{cases}$

(解) (1) の一般解は $y(t) = C_1te^{3t} + C_2e^{3t}$ である。

$y'(t) = C_1e^{3t} + 3C_1te^{3t} + 3C_2e^{3t}$ で初期条件より

$y(0) = C_2 = 5\ ,\ \ y'(0) = C_1 + 3C_2 = 7 \ \Rightarrow\ C_1 = 7 - 3C_2 = -8$

(答) $y(t) = -8te^{3t} + 5e^{3t}$

例 2 (2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} = 6 \\ y(0) = 5\ ,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

(解) $v = y'(t)$ とおくと $\dfrac{dv}{dt} - 4v = 6 \ \Rightarrow\ v(t) = -\dfrac{3}{2} + C_1e^{4t} = y'(t)$

$y(t) = \displaystyle\int v(t)dt = -\frac{3}{2}t + \frac{C_1}{4}e^{4t} + C_2$ となる。ここで初期条件より

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \frac{C_1}{4} + C_2 = 5 \\ y'(0) &= -\frac{3}{2} + C_1 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ C_1 = \frac{7}{2}\ ,\ \ C_2 = 5 - \frac{C_1}{4} = 5 - \frac{7}{8} = \frac{33}{8}$$

(答) $y(t) = -\dfrac{3}{2}t + \dfrac{7}{8}e^{4t} + \dfrac{33}{8}$

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0 \\ y(0) = 6\ ,\ y'(0) = 8 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} = 10 \\ y(0) = 6\ ,\ y'(0) = 7 \end{cases}$

< 微分方程式の応用 1 >

定数係数 2 階線形微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = F(t)}$$

を考える。この変数 t を時間を表すパラメーターと考えると，$(*)$ は未知関数 $y = y(t)$ の時間発展を表す。例えば物体の運動を表す場合，しばしば $y = y(t)$ は時刻 t における物体の**位置**を表す。このとき $\dfrac{dy}{dt}$ は**速度**を表し，$\dfrac{d^2y}{dt^2}$ は**加速度**を表す。このような場合 $(*)$ の係数 a，b は

a : 速度に比例して加速度が変わる場合の比例定数

b : 位置に比例して加速度が変わる場合の比例定数

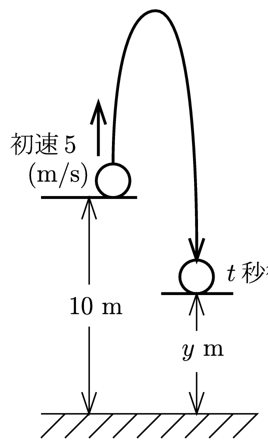
を意味する。特に a がプラスのときは**抵抗**を意味する。また $F(t)$ は**外力**を意味する。

また $y(t)$ が時刻 t における**電荷** (電気量) を表す場合，$\dfrac{dy}{dt}$ は**電流**を表す。またこのとき a は**電気抵抗**を表す。

問　地上 10m の場所から物体を初速 5(m/s) で真上に投げ上げた。t 秒後の高さを $y = y(t)$m とする。空気抵抗がないとすると，微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \\ y(0) = 10\ ,\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで g は重力加速度 $g = 9.8$ (m/s^2) である。t 秒後の速度 $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$ と高さ $y(t)$ を求めよ。

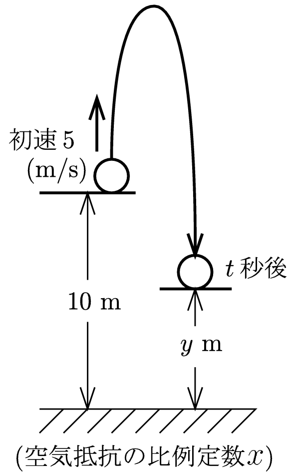


< 微分方程式の応用 2 >

問　地上 10m の場所から物体を真上に初速 5(m/s) で投げ上げた。このとき速度に比例する空気抵抗があるとして，その比例定数を x とする。t 秒後の高さを $y = y(t)$(m) とすると，微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + x\frac{dy}{dt} = -g$$

が成り立つ。ここで g は重力加速度 $g = 9.8(m/s^2)$ である。



(1)　t 秒後の速度 $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$(m/s) を求めよ。

(2)　t 秒後の高さ $y(t)$(m) を求めよ。

(3)　正数 $x(> 0)$ に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-xt} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{xt}} = 0$ を用いて，次の極限値

$$\lim_{t\to\infty} v(t) =$$

を求め，速度 $v(t)$ がある一定の範囲内にあることを示せ。

(4)　$y(t) = \dfrac{\boxed{}}{x^2} + 10$ の形にして，x に関するロピタルの定理を 2 回使うことにより，次の極限値を求めよ。

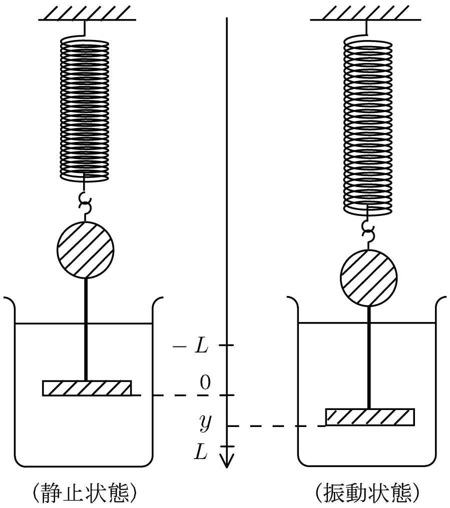
$$\lim_{x\to 0} y(t) =$$

< 微分方程式の応用 3 >

図 1 のようにばねの先のおもりがある液体につかっているとき，これを振動させたときの変位 y に関する微分方程式は一般に

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0}$$

となる。ここで a は速度に比例する**抵抗**を意味する。また b は「ばねの復元力」(ばねの強さ) を意味する。



(図1)

例 1　$a = 4,\ b = 229$ の場合，微分方程式は

$$(1)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 229y = 0}$$

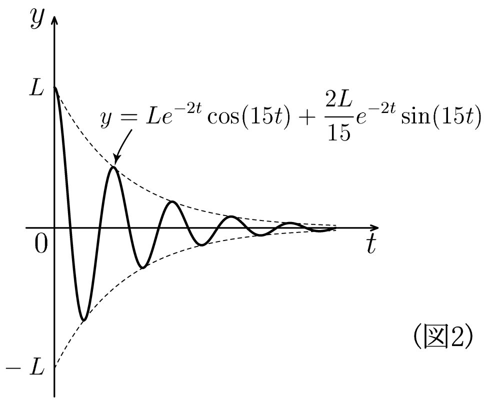
となる。ここで初期条件

「最初に L だけ伸ばし，静かに離す」

$$(*)\quad \boxed{y(0) = L\ ,\quad y'(0) = 0}$$

を仮定すると，(1) − (∗) の解は

$$\underline{y = Le^{-2t}\cos(15t) + \frac{2L}{15}e^{-2t}\sin(15t)}$$



(図2)

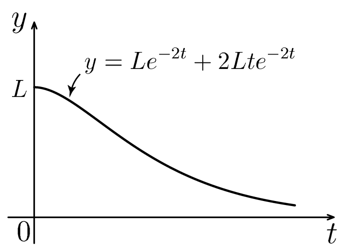
となる。このグラフは図 2 であり，ばねの振動が抵抗によってだんだん弱くなっていく。このような振動を**減衰振動**という。

例 2　$a = 4,\ b = 4$ の場合、微分方程式は

$$(2)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0}$$

となる。上と同じ初期条件 (∗) をみたす解は

$$\underline{y = Le^{-2t} + 2Lte^{-2t}}$$



(図3)

となる。これは抵抗にくらべてばねの力が弱いため，振動しないで減衰していく (図 3)。

問　正定数 x，L に対し

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + (4 + x^2)y = 0 \\ y(0) = L, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

の解 $y = y(t)$ を求め，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} y(t)$ を求めよ。

< 微分方程式の応用 4 >

例 1　図 1 のようにばねの上端を強制的に振動させる。基準線からの伸びを y，振動する外力を $F = r\sin(\beta t)$ とする。抵抗を考えないとすると，y に関する微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r\sin(\beta t)$$

となる。ここで $r = 1$，$\omega = 5$ のとき

$$(1)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = \sin(\beta t)}$$

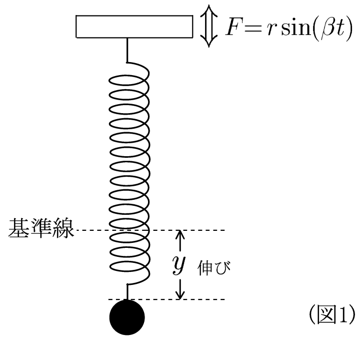
とる。「ばねの下端は最初基準線上に静止している」と仮定すると初期条件は

$$(*)\quad \boxed{y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0}$$

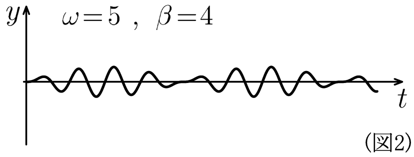
となり，$(*)$ をみたす (1) の解は

$$y = -\frac{\beta}{5(25-\beta^2)}\sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t)$$

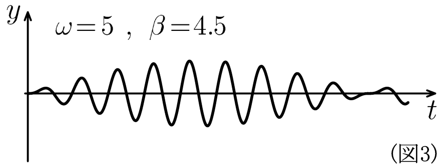
となる。この解のグラフは図 2($\beta = 4$), 図 3($\beta = 4.5$), 図 4($\beta = 4.75$) のようになる。
このような運動を**強制振動**という。



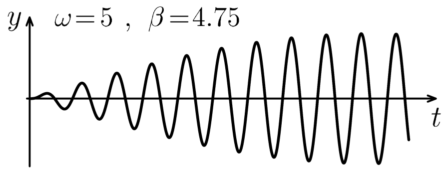
(図1)



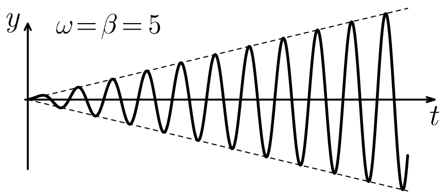
(図2)



(図3)



(図4)



(図5)

例 2　$r = 1$, $\omega = \beta = 5$ のとき微分方程式は

$$(2)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = \sin(5t)}$$

となる。

問 1　41 ページを参考にして、(2) の一般解を求めよ。

$y =$

問 2　上の初期条件 $(*)$ のもとで (2) の解を求めよ。

$y =$

(注)　問 2 の解のグラフは図 5 の実線である。図 5 の点線は直線 $y = \pm\dfrac{t}{2}$ である。つまり時刻 t における振幅が $\dfrac{t}{2}$ であり，時間とともに振幅が大きくなる。この現象を**共振**または**共鳴**という。

問 3　例 1 の解の $\beta \to 5$ の極限を求めよ。(ヒント：変数 β に関するロピタルの定理を使う)

$$\lim_{\beta\to 5}\left\{-\frac{\beta}{5(25-\beta^2)}\sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t)\right\} = \lim_{\beta\to 5}\frac{-\beta\sin(5t) + 5\sin(\beta t)}{125 - 5\beta^2}$$

$=$

＜付録１ $\cdots$ ２階線形同次微分方程式の解の決定＞

例１ 微分方程式

① $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0}$

の一般解は

② $\boxed{y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}}$ (C_1，C_2 は任意定数)

であり，それ以外には①の解がないことが次のようにしてわかる。
①の任意の解を $y_1 = y_1(t)$ とおく。y_1 の初期値を

③ $\boxed{y_1(0) = \alpha \ \ , \ \ y_1'(0) = \beta}$

とおく。これに対し

$$y_2 = y_2(t) = (3\alpha - \beta)e^{2t} + (\beta - 2\alpha)e^{3t}$$

とおくと y_2 は①の解であり，

$$y_2(0) = \alpha \ \ , \ \ y_2'(0) = \beta$$

をみたす。基本定理 (P32) から初期条件③をみたす①の解はただ１つなので

$$y_1(t) = y_2(t) = (3\alpha - \beta)e^{2t} + (\beta - 2\alpha)e^{3t}$$

である。従って①の任意の解 y_1 は②の形をしている。

例２ 微分方程式

④ $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y}$ =0

の一般解は

⑤ $\boxed{y = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)}$ (C_1，C_2 は任意定数)

であり，それ以外には④の解がないことが次のようにしてわかる。
④の任意の解を $y_1 = y_1(t)$ とおく。y_1 の初期値を

⑥ $\boxed{y_1(0) = \alpha \ \ , \ \ y_1'(0) = \beta}$

とおく。これに対し

$$y_2 = y_2(t) = \alpha\cos(3t) + \frac{\beta}{3}\sin(3t)$$

とおくと y_2 は④の解であり，

$$y_2(0) = \alpha \ \ , \ \ y_2'(0) = \beta$$

をみたす。基本定理 (P32) から初期条件⑥をみたす④の解はただ１つなので

$$y_1(t) = y_2(t) = \alpha\cos(3t) + \frac{\beta}{3}\sin(3t)$$

である。従って④の任意の解は⑤の形をしている。

< 付録2 ⋯ 2階線形同次微分方程式の解の一次独立性 >

与えられた関数 $a(t)$, $b(t)$ に対し、未知関数 $y = y(t)$ に関する 2 階線形同次微分方程式

$$(*)_0 \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0}$$

を考える。基本定理 (P32) より次の定理が得られる。

定理 1　$(*)_0$ の解 $y = y(t)$ が、ある時点 t_0 で

$$y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0$$

であれば、$y = y(t)$ は恒等的に 0 の定数関数 $y \equiv 0$ である。

(注) 恒等的に 0 である関数 $y \equiv 0$ を $(*)_0$ の**自明な解**という。

定理 2　$(*)_0$ の自明ではない解 $y_1(t)$, $y_2(t)$ があり、$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$ が定数でないとき、任意の時点 t_0 で $y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) \neq 0$ である。

証明　$t_0 = 0$ として証明する。

$y_1(t)$ は恒等的に 0 ではないから、$y_1(0) \neq 0$ かまたは $y_1'(0) \neq 0$ である。

①$y_1(0) \neq 0$ のとき

$$v(t) = -\tfrac{y_2(0)}{y_1(0)}y_1(t) + y_2(t)$$

とおくと $v(t)$ は $(*)_0$ の解であり、$v(0) = 0$ である。さらに $v'(0) \neq 0$ であることがわかる。

もし、$v'(0) = 0$ とすると、定理 1 より $v(t) \equiv 0$(恒等的に 0) であるから

$$-\tfrac{y_2(0)}{y_1(0)}y_1(t) + y_2(t) = 0 \to \tfrac{y_2(t)}{y_1(t)} = \tfrac{y_2(0)}{y_1(0)} = \text{定数}$$

となって定理の条件に反する。従って $v'(0) \neq 0$ である。

$$v'(0) = -\tfrac{y_2(0)}{y_1(0)}y_1'(0) + y_2'(0) = \tfrac{-y_2(0)y_1'(0) + y_2'(0)y_1(0)}{y_1(0)} \neq 0$$

より $y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) \neq 0$ が得られる。

②$y_1'(0) \neq 0$ のとき

$$w(t) = -\frac{y_2'(0)}{y_1'(0)}y_1(t) + y_2(t)$$

とおくと、w は $(*)_0$ の解であり、$w'(0) = 0$ である。①と同様な理由で $w(0) \neq 0$ となり

$$w(0) = -\frac{y_2'(0)}{y_1'(0)}y_1(0) + y_2(0) = \frac{-y_2'(0)y_1(0) + y_2(0)y_1'(0)}{y_1'(0)} \neq 0$$

より

$y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) \neq 0$ が得られる。(証明終)

(注) $\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$ が定数でないとき、$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は**一次独立**という。

＜ 付録３ $\cdots$ 2 階線形同次微分方程式の解の表現 ＞

前ページの 2 階線形同次微分方程式 $(*)_0$ を考える。

定理 3

> $(*)_0$ の自明ではない解 $y_1(t)$, $y_2(t)$ に対し、ある時点 t_0 で
>
> $$y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) \neq 0$$
>
> であるならば、$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は一次独立である。

(証明) $t_0 = 0$ の場合に証明する。背理法で示す。もし $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が一次独立でなければ、$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)} = K$ をみたす定数 K が存在する。従って

$y_2(t) = Ky_1(t),\ y_2'(t) = Ky_1'(t)$ より $y_2(0) = Ky_1(0),\ y_2'(0) = Ky_2'(0)$ だから

$$y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = K\{y_1(0)y_1'(0) - y_1'(0)y_1(0)\} = 0$$

となって仮定に矛盾する。(証明終)

定理 4

> $(*)_0$ の解 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が存在し、$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は一次独立である。
>
> さらに $(*)_0$ の任意の解 $y(t)$ に対し、ある定数 C_1、C_2 が存在して
>
> $$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$$
>
> と表される。

(証明) 基本定理 (P32) より、次式を満たす $(*)_0$ の解 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が存在する。

$$\boxed{y_1(0) = 1、y_1'(0) = 0} \quad 、 \quad \boxed{y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1}$$

$y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1 \neq 0$ より、(定理 3 から)　$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は一次独立である。

$(*)_0$ の任意の解を $y(t)$ とし

$$y(0) = C_1,\ y'(0) = C_2$$

とおく。この定数 C_1, C_2 に対して

$$v(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$$

とおくと、$v(t)$ は $(*)_0$ の解であり、$v(0) = C_1,\ v'(0) = C_2$ をみたす。

基本定理 (P32) から $y(t) = v(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ である。(証明終)

(注) $(*)_0$ の一次独立な解 $y_1(t)$, $y_2(t)$ を $\boldsymbol{(*)_0}$ **の基本解**という。

< 付録 4 $\cdots$ 2 階線形非同次微分方程式の一般解 >

与えられた関数 $a(t),\ b(t),\ F(t)$ に対し、未知関数 y に関する 2 階線形非同次微分方程式

$$(*)_1 \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = F(t)}$$

を考える。この $(*)_1$ に対し、同次微分方程式を

$$(*)_0 \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0}$$

とする。

定理 $(*)_1$ の任意の解 $y = y(t)$ は

$$(*)_3 \qquad \boxed{y(t) = y_*(t) + C_1y_1(t) + C_2y_2(t)}$$

と表させる。ここで $y_*(t)$ は $(*)_1$ の特殊解であり，$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は $(*)_0$ の基本解である。

(証明) $(*)_1$ の 1 つの解を $y_*(t)$、$(*)_1$ の任意の解を $y(t)$ とする。

今

$$v(t) = y(t) - y_*(t)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2v}{dt^2} + a(t)\frac{dv}{dt} + b(t)v \\
&= \{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y\} - \{\frac{d^2y_*}{dt^2} + a(t)\frac{dy_*}{dt} + b(t)y_*\} \\
&= F(t) - F(t) = 0
\end{aligned}$$

だから v は $(*)_0$ の解である。定理 4(前ページ) より $(*)_0$ の一次独立な解 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ および定数 C_1、C_2 が存在して

$$v(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$$

と書ける。従って

$$y(t) = y_*(t) + v(t) = y_*(t) + C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$$

と書ける。(証明終)