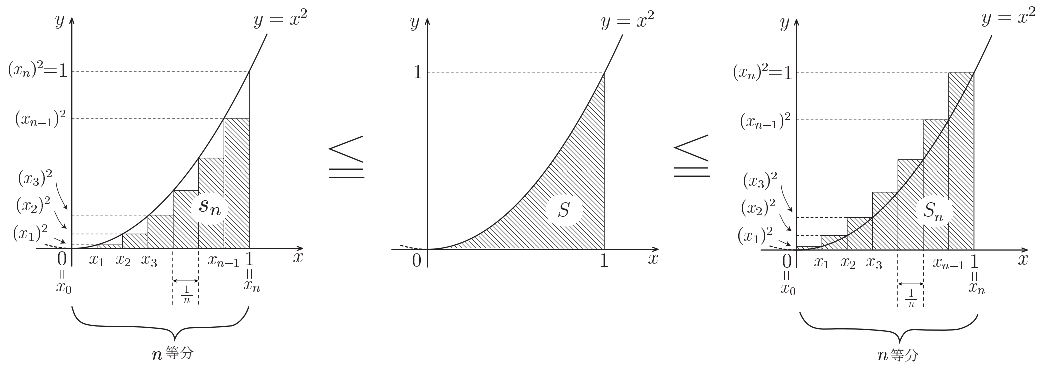
高知工科大学

Kochi University of Technology

数学 2

(2009年度版)



初等関数の積分法

(不定積分, 定積分, 面積, 関数の近似)

井上 昌昭 著

< 微分の復習 1 >

面積や体積を求める求積法はアルキメデスの時代から計算されてきたが，一般の人には理解しにくいものであった。それが簡単に求まるようになったのは，ニュートンとライプニッツの微分積分学の基本定理からである。この定理によって面積や体積を表す定積分は不定積分の値の差として求まることがわかる。そこでこのワークブックでは，まず不定積分を求める練習をしてから，定積分の計算練習をし，その応用として面積を求める練習をする。不定積分は微分の逆演算である。従って微分がわかっていれば，積分は求まる。そこでまず微分の復習をする。

関数 $f(x)$ の定義域内の変数 x に対し，極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき，その関数 $f(x)$ は定義域内で**微分可能**であるといい，その極限を

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

等で表し，$f(x)$ の**導関数**という。導関数を求めることを「**微分**する」という。次式が成り立つ。

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1,\qquad \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

ここで三角関数の角 θ は弧度法による角度であり，e はネピアの数 $e=\displaystyle\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=2.71828182845\cdots$ である。この式と２項定理から次の極限式が得られる。ただし $\log x$ は自然対数（底が e の対数），n は自然数（１以上の整数），a は１でない正の実数である。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0$　　(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$

(5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x$　　(6) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{x}\log_a e$

(7) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$　　(8) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x$

問 1　次の導関数を求めよ。ただし K は定数である。

(1) $\dfrac{d}{dx}x^n$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\sin x$　　(3) $\dfrac{d}{dx}\cos x$

(4) $\dfrac{d}{dx}\log x$　　(5) $\dfrac{d}{dx}e^x$　　(6) $\dfrac{d}{dx}K$

二つの微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して，その合成関数 $y=f\big(g(x)\big)$ の導関数は

$\boxed{y'=\big\{f\big(g(x)\big)\big\}'=f'\big(g(x)\big)\times g'(x)}$　　または　$\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}}$　$\big($ただし $u=g(x)\big)$

で求められる。

問 2　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=(5x-3)^8$　　(2) $y=(x^2+3x-4)^6$　　(3) $y=\sin(3x)$

(4) $y=\cos(5x+\pi)$　　(5) $y=\sin(x^5)$　　(6) $y=\log(4x)$

(7) $y=\log(5x-3)$　　(8) $y=\log(x^5)$　　(9) $y=\log(x^2+3x+1)$

(10) $y=\log(\cos x)$　　(11) $y=e^{3x+2}$　　(12) $y=e^{-x^2}$

< 微分の復習 2 >

[微分の性質] 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ および定数 K に対して，次の式が成り立つ。

(1) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(2) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

(3) $\{Kf(x)\}'=Kf'(x)$

(4) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(5) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

問 1　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=4x^3-3x+5$　(2) $y=3\sin x-5\cos x$　(3) $y=4e^x-5\log x$

(4) $y=x^3\sin x$　(5) $y=x^4\cos x$　(6) $y=x^2e^x$

(7) $y=x\log x$　(8) $y=\dfrac{1}{\sin x}$　(9) $y=\tan x$

(10) $y=e^{2x}\sin(3x)$　(11) $y=e^{3x}\cos(4x)$　(12) $y=\sin(2x)\cos(3x)$

自然対数 $\log x$ と微分可能な関数 $f(x)$ との合成関数 $\log\bigl(f(x)\bigr)$ の導関数が

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log\Bigl(f(x)\Bigr)=\frac{1}{f(x)}\times\frac{d}{dx}f(x)}$$

となることを利用して導関数を求める方法を**対数微分法**という。例えば任意の実数 r に対して，関数 $y=x^r$ の導関数を求めてみる。両辺の自然対数をとると，$\log y=\log(x^r)=r\log x$ だから，この両辺を x で微分すると，$\frac{d}{dx}\log y=\frac{d}{dx}r\log x$ より，$\frac{1}{y}\times\frac{d}{dx}y=r\times\frac{1}{x}$ 。よって $\frac{dy}{dx}=r\times\frac{1}{x}\times y=rx^{r-1}$ となる。従って公式

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}}$$

が任意の実数 r に対して成立することがわかる。分数 $\frac{1}{x^n}$ や累乗根の関数 $\sqrt[m]{x^n}$ を微分するときは，$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ や $\sqrt[m]{x^n}=(\sqrt[m]{x})^n=x^{\frac{n}{m}}$ などの形にしてから，上記微分公式を使う。

問 2　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^3}$　(2) $y=\sqrt{x}$　(3) $y=\sqrt[4]{x^3}$　(4) $y=\sqrt[3]{x^5}$　(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$　(6) $y=x\sqrt[5]{x^2}$

単調関数 $f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ の微分公式は $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (ただし $x=f(y)$) となる。逆三角関数 $y=\tan^{-1}(x)$ の導関数は，$x=\tan(y)$ に注意すると

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}\tan(y)}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

となる。同様にして次の微分公式が得られる。

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

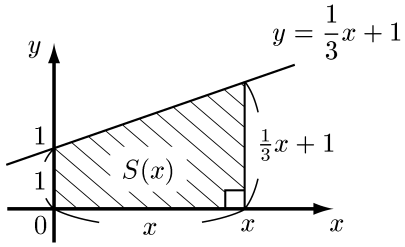
最後に，自然対数と絶対値関数 $|x|$ との合成関数の微分公式は $\dfrac{d}{dx}\log|x|=\dfrac{1}{x}$　$(x\neq 0)$ であることを注意しておく。

＜ 面積関数 ＞

例　右図斜線部分の面積を $S(x)$ とすると

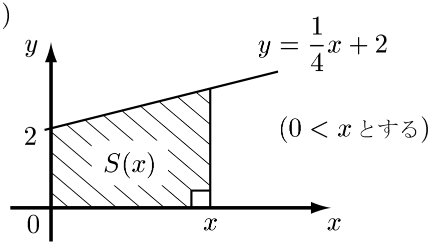
$$S(x)=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}x+1\right)\right\}\times x$$
$$=\frac{1}{6}x^2+x$$

であり，その導関数は $S'(x)=\dfrac{1}{3}x+1$ である。

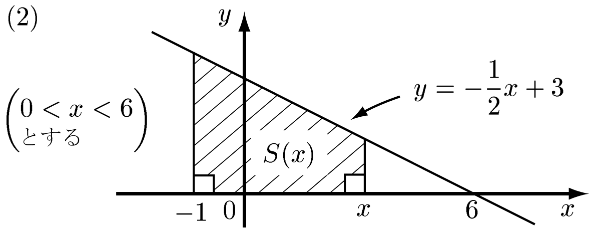


問　次の斜線部分の面積 $S(x)$ を求め，その導関数 $S'(x)$ を求めよ。

(1)



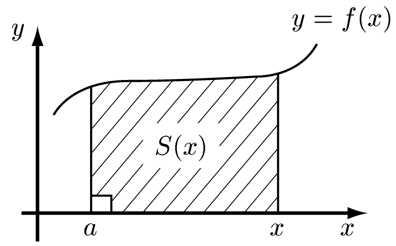
(2)



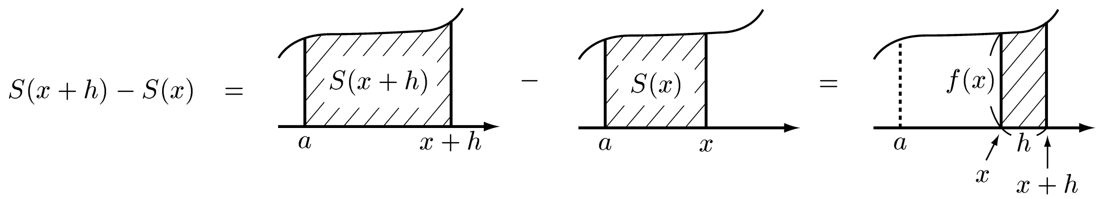
正の値をとる関数 $f(x)$ に対して，右図斜線部分の面積を $S(x)$ とすると

$$S'(x)=f(x)$$

となる。



(証明の概略)　$h>0$ に対し



より，h が小さいとき $S(x+h)-S(x)\fallingdotseq f(x)h$ だから

$$S'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)h}{h}=f(x)$$

(詳しくは「微分積分学の基本定理」(p25) を用いて証明される)

< 不定積分 1 >

x の関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ があれば，それを $f(x)$ の**原始関数**という。

(注)　$f(x) \geqq 0$ の場合，前ページの面積関数 $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数のひとつである。

例 1　$f(x) = 3x^2$ のとき，$(x^3)' = 3x^2$ だから $F(x) = x^3$ は $f(x) = 3x^2$ の原始関数である。しかし，原始関数は 1 個ではない。$(x^3+1)' = 3x^2$ より x^3+1 も $3x^2$ の原始関数である。同様に考えると

$$x^3+2 \quad , \quad x^3+3 \quad , \quad x^3+4 \quad , \quad x^3-1 \quad , \quad x^3-2 \quad , \quad x^3+\frac{5}{2} \quad , \quad \cdots$$

等は全て $f(x) = 3x^2$ の原始関数である。従って $3x^2$ の原始関数は無限に多くあるが，いずれも

$$x^3 + C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

の形をしている。

一般に $F'(x) = f(x)$ のとき，$f(x)$ の原始関数は無限に多くあるが，いずれも　$F(x) + C$　(C は任意の定数) の形をしている。この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい，$\boldsymbol{\int f(x)dx}$ で表す。

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき} \qquad \boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \qquad (\text{不定積分})$$

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**といい，上の定数 C を**積分定数**と呼ぶ。また，このとき $f(x)$ を**被積分関数**といい，x を**積分変数**という。

例 2　$\left(\dfrac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より　$\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^5 dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx$

(3) $\displaystyle\int \cos x dx$

(4) $\displaystyle\int \sin x dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

(6) $\displaystyle\int e^x dx$

< 不定積分 2 >

微分公式 $\dfrac{d}{dx}\log|x| = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{d}{dx}x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^{\alpha}$ (α は実数) より次の不定積分が求まる。

① $\alpha \neq -1$ のとき $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

② $\alpha = -1$ のとき $\displaystyle\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

例 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$

(注 1) 例の結果が正しいかどうか調べるためには，不定積分 $2\sqrt{x}+C$ を微分して被積分関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ になれば良い。

$$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}+C\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) = 2 \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

より正しい。

(注 2) $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と略記することがある。

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^9 dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}dx$

(5) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}dx$

< 不定積分 3 >

不定積分について，次の公式が成り立つ。ただし両辺の積分定数の違いは無視している。

1. $\displaystyle\int Kf(x)dx \ = \ K\int f(x)dx$　　$(K$ は定数$)$
2. $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx \ = \ \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx \ = \ \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(定数倍，和・差の不定積分)

例

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^2}dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{1}{x^2}dx = x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C$$

(注)　この例のように，積分定数は最後にまとめて C で表す。

また $\displaystyle\int 1dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことがある。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

< 不定積分 4 >

問 1　三角関数の定義 (または性質) を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x$　　(2) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \left(4\sin x - 3\cos x + \frac{5}{\cos^2 x}\right) dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{3\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx$

(3) $\displaystyle\int (2 - \tan x)\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

(5) $\displaystyle\int \left(1 + \tan^2 x\right) dx$

問 3　逆三角関数の微分法の結果を用いて，次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{5}{1+x^2} dx$

< 積分記号 >

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し，積分記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば，

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1　$\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$　より　$\displaystyle\int 3x^2dx = x^3 + C$

$\dfrac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2$　より　$\displaystyle\int 3t^2dt = t^3 + C$

$\dfrac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2$　より　$\displaystyle\int 3u^2du = u^3 + C$

例 2　(1)　$\displaystyle\int \left(t^2 - 4t + 3\right)dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2)　$\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$

(3)　$\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int (10 - 9.8t)dt =$

(2)　$\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3)　$\displaystyle\int e^u du =$

(4)　$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy =$

(5)　$\displaystyle\int \cos u du =$

< 置換積分法 1 >

$F'(x) = f(x)$ のとき合成関数の微分法より定数 $a,\ b\ (a \neq 0)$ に対して

$\big(F(ax+b)\big)' = aF'(ax+b) = af(ax+b)$ よって次式が成立する。

$F'(x) = f(x)$ のとき $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad \begin{pmatrix} a,\ b \text{ は定数} \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$

例 (1) $\displaystyle\int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$

(2) $\displaystyle\int e^{4x-1}dx = \frac{1}{4}e^{4x-1} + C$

(3) $$\int \sqrt{5x+7}dx = \int (5x+7)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(5x+7)^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{15}(5x+7)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{15}(5x+7)\sqrt{5x+7} + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(4x-3)dx$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)dx$

(3) $\displaystyle\int e^{5x+3}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(7x+4)}$

(5) $\displaystyle\int (5x+3)^6 dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{6x+5}dx$

(7) $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}\,dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+1)^3}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x+3}}dx$

< 置換積分法 2 >

関数 $f(x)$ の不定積分　$y=\int f(x)dx$　において，x が微分可能な t の関数 $g(t)$ を用いて

$x=g(t)$ と表されるとき，y は t の関数で

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f\left(g(t)\right)g'(t)$$

ゆえに　$y=\int f\left(g(t)\right)g'(t)dt$　　従って次の公式が得られる

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f\left(g(t)\right)g'(t)dt \qquad \big(\text{ただし } x=g(t)\big)}$$

例　不定積分 $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ を求めたい。

$\sqrt{x-1}=t$ とおくと　　$x-1=t^2$　$\Rightarrow$　$x=t^2+1$　　$(t^2+1)'=2t$

ゆえに　$\int x\sqrt{x-1}dx=\int(t^2+1)t\times(t^2+1)'dt=\int(t^3+t)\times 2tdt=\int(2t^4+2t^2)dt$

$$=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2+5)+C$$

$$=\frac{2}{15}(\sqrt{x-1})^3(3x+2)+C=\frac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{x-1}+C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

< 置換積分法 3 >

前ページの公式で，x を u にかえ，t を x にかえると次の公式が得られる。

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \qquad \big(\text{ただし } u = g(x)\big)}$$

例 (1) $\displaystyle\int 2x(x^2+3)^5 dx$ を求めたい。$x^2+3=u$ とおくと

$$\int 2x(x^2+3)^5 dx = \int (x^2+3)^5 \times (x^2+3)' dx = \int u^5 du$$

$$= \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}(x^2+3)^6 + C$$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\, dx$ を求めたい。$x^2+1=u$ とおくと

$$\int x\sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1} \times (x^2+1)' dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}u\sqrt{u} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x(x^2+1)^4\, dx$

(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+4}\, dx$

(3) $\displaystyle\int x^3 e^{x^4+1} dx$

(4) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x\, dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}\, dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

< 置換積分法 4 >

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C,$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-4)^2+1}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(6x+10)^2+4}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

< 部分積分法 1 >

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の微分公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

より

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

となる。この両辺を積分すると

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx} \qquad \text{(部分積分)}$$

が成り立つ。これを**部分積分の公式**という。

例 $\displaystyle\int (x+2)\cos x dx = \int (x+2)(\sin x)' dx = (x+2)\sin x - \int (x+2)' \sin x dx$

$\displaystyle = (x+2)\sin x - \int 1 \sin x dx = (x+2)\sin x + \cos x + C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 2x\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int x\sin x dx$

(3) $\displaystyle\int (4x-3)e^x dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(4x-3)dx$

(5) $\displaystyle\int x\sin(2x+3)dx$

(6) $\displaystyle\int xe^{3x+2}dx$

< 部分積分法 2 >

例 1 $\displaystyle\int \log x dx = \int 1 \times \log x dx = \int (x)' \times \log x dx$

$$= x\log x - \int x \times (\log x)' dx = x\log x - \int x \times \frac{1}{x} dx$$

$$= x\log x - \int 1\ dx = \underline{x\log x - x + C}$$

問 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\log x dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 \log x dx$

例 2 $\displaystyle\int x^2 \cos x dx = \int x^2 (\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$

$$= x^2 \sin x + \int 2x(\cos x)' dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x dx$$

$$= \underline{x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C}$$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2 \sin x dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

< 分数関数の不定積分 >

例題 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$

(解) (1) $\dfrac{2x^2+3}{x+1} = 2x-2+\dfrac{5}{x+1}$ より

$$\int \frac{2x^2+3}{x+1}dx = \int (2x-2)dx + 5\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= x^2-2x+5\log|x+1|+C$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x \quad -2 \\ \hline x+1 & 2x^2 \qquad\quad +3 \\ & 2x^2+2x \\ \hline & \quad -2x+3 \\ & \quad -2x-2 \\ \hline & \qquad\quad 5 \end{array}$$

(2) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right\}$ であるから

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right\}dx = \frac{1}{2}\{\log|x-1|-\log|x+1|\}+C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

問 1 $\dfrac{x}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$ が成り立つように定数 a，b の値を求め，

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx$ を求めよ。

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+5}{x+2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-12}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2-1}dx$

< 三角関数の不定積分 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って，簡単な形に直してから積分する。

特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$$

2. 積を和に直す公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

これらの公式は，右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \int \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right\} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos x dx = \int \left\{\frac{1}{2}\sin(3x)+\frac{1}{2}\sin x\right\} dx = -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x + C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(2x) dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin(4x)\sin x dx =$

(4) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(3x) dx =$

(5) $\displaystyle\int \cos^2(3x) dx =$

(6) $\displaystyle\int \sin^2(4x) dx =$

< 不定積分の検証 >

不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには，右辺の関数 $F(x)$ を積分して，被積分関数 $f(x)$ になっているかどうかを調べれば良い。

例 1　$\int x^2\left(x^3+1\right)^4 dx = \dfrac{1}{15}\left(x^3+1\right)^5 + C$ が正しいかどうか調べる。

右辺を微分する。$y = \dfrac{1}{15}\left(x^3+1\right)^5$，$u = x^3+1$ とおくと合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{15}\left(x^3+1\right)^5\right) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{15}u^5\right)\times\frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)$$

$= \dfrac{1}{15}\times 5u^4 \times 3x^2 = x^2u^4 = x^2\left(x^3+1\right)^4$ より**正しい**。

例 2　$\int \dfrac{1}{(x-3)(x+4)}dx = \log\left|\dfrac{x-3}{x+4}\right| + C$ が正しいかどうか調べる。

右辺 $= \log|x-3| - \log|x+4| + C$ より右辺を微分すると

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left|\frac{x-3}{x+4}\right| + C\right) = \frac{d}{dx}\left(\log|x-3| - \log|x+4|\right) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+4}$$

$= \dfrac{7}{(x-3)(x+4)}$　より**正しくない**。

例 3　$\int (2x+1)\cos x dx = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$ が正しいかどうか調べる。

右辺を微分すると　(積の微分法より)

$$\frac{d}{dx}\left\{(2x+1)\sin x + 2\cos x + C\right\} = \left(\frac{d}{dx}(2x+1)\right)\times\sin x + (2x+1)\times\left(\frac{d}{dx}\sin x\right) + \frac{d}{dx}(2\cos x)$$

$= 2\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x = (2x+1)\cos x$ より**正しい**。

問　次の式の右辺を微分することにより，次の不定積分が**正しい**かどうか判定せよ。

(1)　$\int x^3\left(x^4-1\right)^3 dx = \dfrac{1}{4}\left(x^4-1\right)^4 + C$

(2)　$\int \dfrac{1}{(x-3)(x-2)}dx = \log\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right| + C$

(3)　$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

< 不定積分の練習 1 >

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(3x+4)dx$

(2) $\displaystyle\int \sin(4x-3)dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(5x+3)}$

(4) $\displaystyle\int e^{3x-5}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{7x+10}$

(6) $\displaystyle\int (7x-5)^3dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-2)^4}$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{9+x^2}$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

(11) $\displaystyle\int x\cos(x^2+3)dx$

(12) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$

(13) $\displaystyle\int x^2(x^3+2)dx$

(14) $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$

(15) $\displaystyle\int \sin x\cos^3 x dx$

(16) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{1+x+x^2}dx$

(17) $\displaystyle\int \tan x dx$

< 不定積分の練習 2 >

問 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+1)}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+1}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

(6) $\displaystyle\int (3x+4)\cos x dx$

(7) $\displaystyle\int x\sin(2x)dx$

(8) $\displaystyle\int xe^{4x+3}dx$

(9) $\displaystyle\int 2\log x dx$

(10) $\displaystyle\int x\log|x+1|dx$

(11) $\displaystyle\int \cos^2(2x)dx$

(12) $\displaystyle\int \sin^2(3x)dx$

問 2 次の式の右辺の導関数を求め，不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

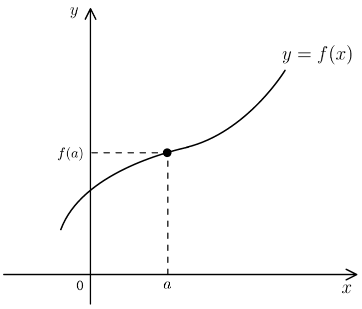
(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

＜連続性・微分可能性＞

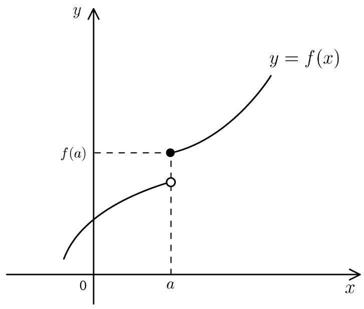
＜連続性＞　関数 $f(x)$ が $\boldsymbol{x=a}$ **で連続**であるとは，極限 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在して，

式 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成立するということである。

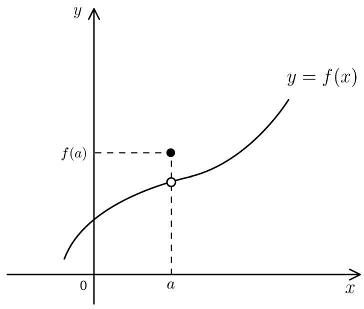
図 1 は $x=a$ で連続の場合であり，図 2 と図 3 は連続でない場合である。



(図 1)



(図 2)



(図 3)

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることは，幾何学的には，曲線 $y=f(x)$ が $x=a$ で**つながっている**ということである。

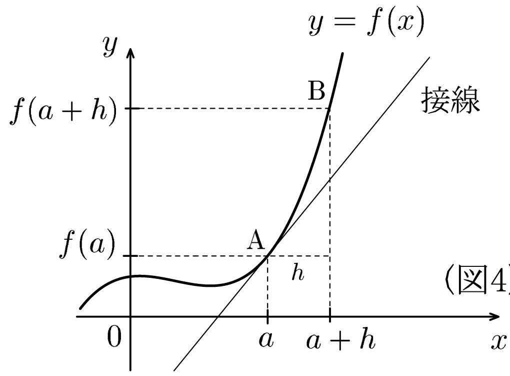
＜微分可能性＞

関数 $f(x)$ が $\boldsymbol{x=a}$ **で微分可能**であるとは，

極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+b)-f(a)}{h}$ が存在する

ことを言う。この極限値を

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+b)-f(a)}{h}$$

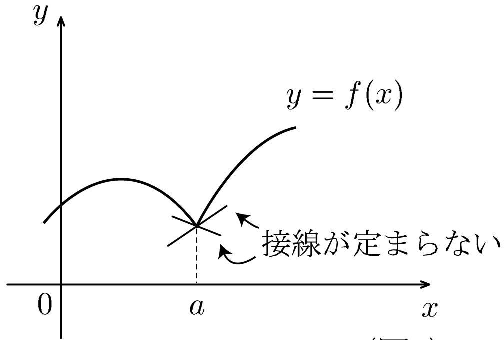


(図4)

とおき，$f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**という。図 4 は $f(x)$ が $x=a$ で微分可能な場合である。このとき $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における**接線の傾き**を意味する。

(注 1)　$x=a$ で微分可能であれば，$x=a$ で連続である。

(注 2)　曲線 $y=f(x)$ が図 5 のようなとき，$x=a$ で微分可能ではない。



(図5)

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であることは，幾何学的には，$x=a$ の近くで**なめらかな曲線である**ことを意味する。

＜ 平均値の定理 ＞

$x_1 < x_2$ のとき，不等式

$$x_1 \leqq x \leqq x_2 \quad , \quad x_1 < x < x_2 \quad , \quad x_1 < x \quad , \quad x \leqq x_2$$

などを満たす実数 x の集合を**区間**といい，

$$[x_1,\ x_2] \quad , \quad (x_1,\ x_2) \quad , \quad (x_1,\ +\infty) \quad , \quad (-\infty,\ x_2]$$

などで表す。$[x_1,\ x_2] = \{x : x_1 \leqq x \leqq x_2\}$ を**閉区間**，$(x_1,\ x_2) = \{x : x_1 < x < x_2\}$ を**開区間**という。

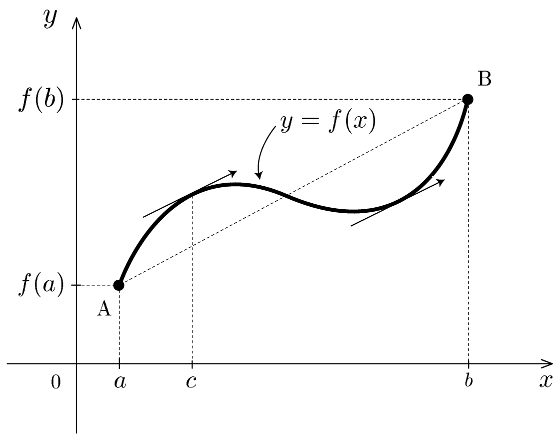
関数 $f(x)$ が**閉区間 $[x_1,\ x_2]$ で連続**であるとは，$[x_1,\ x_2]$ 内の任意の数 x_0 $(x_1 \leqq x_0 \leqq x_2)$ で $f(x)$ が連続であることをいう。また $f(x)$ が**開区間 $(x_1,\ x_2)$ で微分可能**であるとは，$(x_1,\ x_2)$ 内の任意の数 x_0 $(x_1 < x_0 < x_2)$ で微分可能であることをいう。

＜ 平均値の定理 ＞

$f(x)$は $[a,\ b]$で連続，$(a,\ b)$で微分可能な関数とする。このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad , \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。

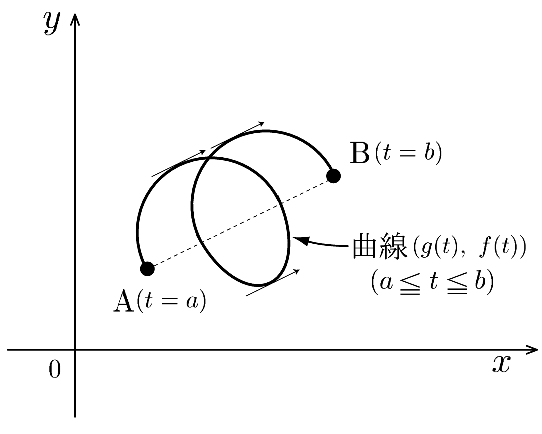


＜ コーシー (Cauchy)の平均値の定理 ＞

$f(t), g(t)$ は $[a,\ b]$で連続，$(a,\ b)$で微分可能であり，$g(a) \neq g(b)$ とする。このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad , \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。



< 和の記号 Σ >

数列の和を表すのに，記号 Σ を使って次のように表す。

$$a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=j}^{n} a_k$$

例 1　① $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$　，② $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} k^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3$

③ $\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$　，④ $\displaystyle 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$

問 1　次の和を記号 Σ を使って表せ。

(1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$　　(2) $2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2$

(3) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$　　(4) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} + \cdots + \dfrac{n}{n}$

記号 Σ の定義から次の公式が得られる。

$$① \sum_{k=1}^{n} 1 = n \ , ② \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ , ③ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ , ④ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(略証)　①は明らか。②は等差数列の和の公式。③は $\displaystyle (n+1)^3 - 1^3 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$

$\displaystyle = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ と①，②の結果から導かれる。④は

$\displaystyle (n+1)^4 - 1^4 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

と①，②，③の結果から導かれる。

例 2　$\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$

例 3　$\displaystyle \sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$

問 2　次の和を求めよ。

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$

< 定積分の定義 >

関数 $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で定義されているものとする。この区間 $I = [a\ ,\ b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

のように $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ をとって n 個の小区間

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \cdots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

に分ける。これを区間 $[a, b]$ の**分割**という。各小区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ から任意の値 ξ_k をとる。ξ_k を小区間 I_k の**代表値**と呼ぶ。この分割と関数 $f(x)$ に対し，次の和

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を作る。この和を **リーマン和** という。σ 自体は I の分割の仕方と代表値のとり方によって異なるが，分割の個数 n を限りなく大きくし，

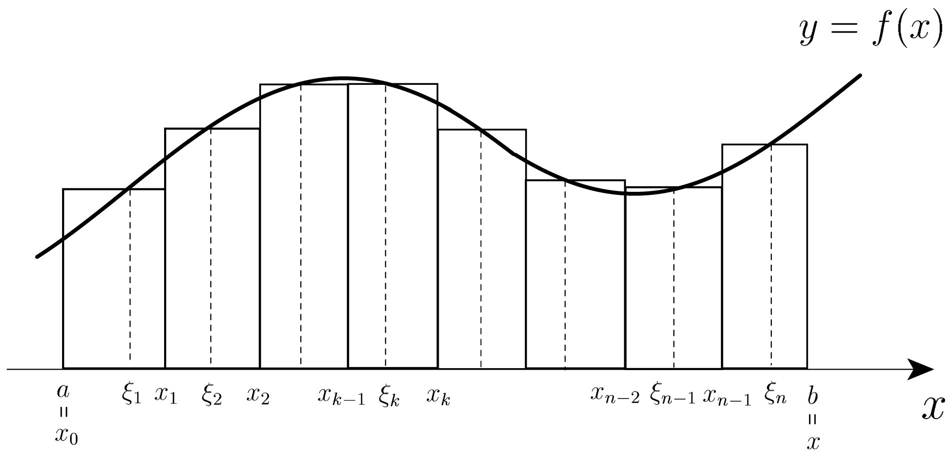
$$\text{分割の最大幅} = \max_{1 \leqq k \leqq n} (x_k - x_{k-1})\ :\ (x_1 - x_0),\ (x_2 - x_1)\ ,\ \cdots,\ (x_n - x_{n-1})\ \text{の最大値}$$

を限りなく小さくしたとき，常に (どんな分割であっても，どんな代表値のとり方をしても) 一定の極限値に σ が近づくならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で**積分可能**または**リーマン積分可能**であるといい，この極限値を

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

と書き，関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における**定積分**という。

(注) $f(x) > 0$ の場合，σ は右図の長方形の集まりの面積を表す。さらに $f(x)$ が積分可能なとき極限値 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれた部分の面積を表す。



< 積分可能性 >

定理　$f(x)$ が $[a,b]$ で連続であれば，積分可能である

実は連続でなくても不連続点が有限個の場合や，$f(x)$ が単調関数である場合は積分可能である。積分可能であるための必要十分条件は

$\lambda = \max_{1 \leqq k \leqq n}(x_k - x_{k-1})$ ： $(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \cdots, (x_n - x_{n-1})$ の最大値

$m_k = \min\{f(x) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$ ： $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ の範囲で $f(x)$ の最小値

$M_k = \max\{f(x) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$ ： $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ の範囲で $f(x)$ の最大値

とおくとき

$$\boxed{\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \times (x_k - x_{k-1}) = 0}$$

となることである。なお $S = \sum_{k=1}^{n} M_k \times (x_k - x_{k-1})$ を**ダルブーの過剰和**といい，$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \times (x_k - x_{k-1})$ を**ダルブーの不足和**という。この記号を使うと，積分可能性の必要十分条件は $\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} (S - s) = 0$ となる。

例　(積分可能でない例)

関数 $f(x)$ は区間 $[0\ ,\ 1]$ で定義され，x が有理数のときは $f(x) = 0$, x が無理数のときは $f(x) = 1$ と定める。有理数はどんなに小さな区間にも無限個存在する。そこで ξ_k を有理数とすれば，リーマン和は

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \times (x_k - x_{k-1}) = 0 \ \cdots ①$$

となる。一方無理数もどんなに小さな区間にも無限個存在する。

そこで ξ_k を無理数とすればリーマン和は

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \times (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1 \ \cdots ②$$

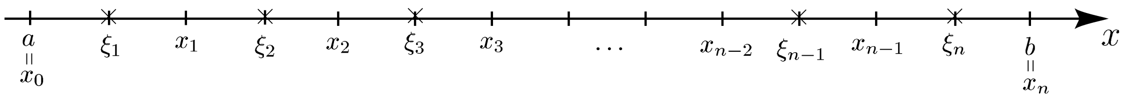
となる。リーマン和が代表値のとり方で 0 になったり 1 になったりするので，一定の極限値には近づかない。従って積分可能ではない。

< 微分積分学の基本定理 >

区間 $[a,\ b]$ における関数 $f(x)$ の定積分の定義は

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \cdots \ (*)$$

であった。ここで $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ は $[a,\ b]$ の分割であり，



ξ_k は小区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ の任意の値である。この極限 lim は分割 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ と ξ_k をどのように選んでも，分割の最大幅 $\max\limits_{1 \leqq k \leqq n}(x_k - x_{k-1})$ が 0 に近づく限り，一定の極限値に収束することを意味する。

<微分積分学の基本定理>

$f(x)$ が連続で，$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

この定理は「ニュートン・ライプニッツの定理」ともいう。

(証明)　$f(x)$ は連続であるから，積分可能である。従って定積分の定義式 $(*)$ における極限値は一意的に存在する。$F'(x) = f(x)$ より，$F(x)$ は連続で，微分可能である。$[a,\ b]$ の分割 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ に対して，平均値の定理から

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(\xi_k) \quad (x_{k-1} < \xi_k < x_k)$$

をみたす $\xi_k (1 \leqq k \leqq n)$ が存在する。従って

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = F(b) - F(a)$$ となる。

ここで分割を細かくする $(n \to \infty,\ \max\limits_{1 \leqq k \leqq n}(x_k - x_{k-1}) \to 0)$ 極限をとると，極限値の一意性から

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = F(b) - F(a)$ が成り立つ。(証明終)

< 定積分の計算 1 >

微分積分の基本定理より $f(x)$ が連続で $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(注)　$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ と略記する。

例 1　$\displaystyle\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^3 = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{242}{5}$

例 2　$\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 4$

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^{10} dx$

(2) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^2 e^x dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(注)　$\displaystyle\int_a^b 1\ dx$ を $\displaystyle\int_a^b dx$ と略記する。また $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ と略記する。

< 定積分の計算 2 >

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-3x+1}{x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$

< 定積分の性質 >

定積分の定義から次の性質が導かれる。

(Ⅰ) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(Ⅱ) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

(Ⅲ) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ 　　(k は定数)

(Ⅳ) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(Ⅴ) 区間 $[a\ ,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ であれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqq 0$

また，次式が成り立つように定積分の定義を拡張する。

(Ⅵ) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ 　, 　$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

例 (1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2-2x+3)dx + \int_{-1}^2 (-x^2+2x+3)dx = \int_{-1}^2 6\ dx = 18$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{0.5} x^2dx + \int_{0.5}^4 x^2dx = \int_{-1}^4 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^4 = \frac{64}{3} - \frac{(-1)}{3} = \frac{65}{3}$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_3^3 e^{-x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x^2+3x+4)dx - \int_{-1}^3 (x^2-3x-4)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 (x^2+x^3)dx + \int_1^2 (x^2+x^3)dx$

< 定積分の積分変数 >

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \big[F(t)\big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)}$$

のように定積分の値は変わらない。すなわち

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx}$$

例 (1) $\displaystyle\int_1^3 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{1}{5}\times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4\,dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{1}{5}\times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 4\pi r^2\,dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3}\pi\times 8 - \frac{4}{3}\pi\times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos\theta\,d\theta = \Big[4\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\sin\pi - 4\sin 0 = 0$

問 次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4-10t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3\theta)d\theta$

(4) $\displaystyle\int_a^b u^n du$

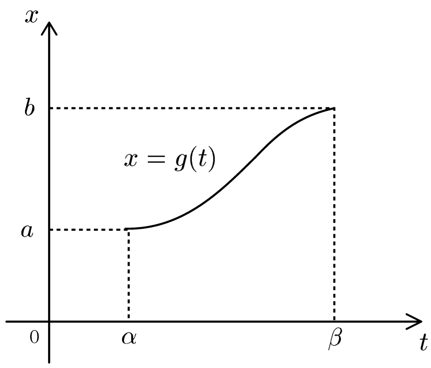
(5) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{u}}du$

< 定積分の置換積分法 1 >

関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であるとする。x が微分可能な単調関数 $g(t)$ を用いて，$x=g(t)$ と表されているとすると，$f(x)$ の不定積分は，不定積分の置換積分法により

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt \cdots ①$$

と表される。ここで x が a から b まで変化すると，t が α から β まで変化するとき，この関数を次の表のように表す。



x	a	$\to$	b
t	α	$\to$	β

このとき，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると，①によって $\displaystyle\int f\left(g(t)\right)g'(t)dt = F(g(t))+C$ より

$$\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt = \Big[F\big(g(t)\big)\Big]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F\big(g(\beta)\big) - F\big(g(\alpha)\big)$$

$$= F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x)dx$$

従って，次の公式が成り立つ。

> $\alpha<\beta$ のとき，区間 (α,β) で微分可能な単調関数 $x=g(t)$ に対し，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

これを定積分の**置換積分法**という。

(注) 上の等式は $\alpha>\beta$ のときも成り立つ。

< 定積分の置換積分法２ >

例題 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3 dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{x-1}{\sqrt{8-x}} dx$

(解) (1) $2x+1=t$ とおくと　$x=\dfrac{t-1}{2}$,　$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 1 \to 3 \end{array}$ より

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \int_1^3 t^3 \left(\frac{t-1}{2}\right)' dt = \int_1^3 \frac{1}{2} t^3 dt$$

$$= \left[\frac{1}{8}t^4\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{8}(3^4-1^4) = \frac{80}{8} = 10$$

(2) $\sqrt{8-x}=t$ とおくと　$8-x=t^2 \Rightarrow \ x=8-t^2$,　$\begin{array}{c|c} x & -1 \to 4 \\ \hline t & 3 \to 2 \end{array}$ より

$$\int_{-1}^4 \frac{x-1}{\sqrt{8-x}} dx = \int_3^2 \frac{(8-t^2)-1}{t} \times (8-t^2)' dt = \int_3^2 \frac{7-t^2}{t} \times (-2t) dt$$

$$= \int_3^2 (2t^2-14) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - 14t\right]_{t=3}^{t=2} = (\frac{16}{3}-28) - (\frac{54}{3}-42)$$

$$= 14 - \frac{38}{3} = \frac{4}{3}$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(4x+1)^3} dx$

(2) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{4-x}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{5x+2} dx$

＜ 定積分の置換積分法３ ＞

例題　a を正の定数とする。$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ を求めよ。

(解)　$x = a\sin\theta$ とおく。

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \to a \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta \geqq 0$ である。

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}\,(a\sin\theta)'d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\cos^2\theta}\,a\cos\theta d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right\}dt$$

$$= a^2\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = a^2\times\frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{4}\pi$$

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx$

< 定積分の部分積分法 1 >

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

から定積分の部分積分の公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

が得られる。

例 $\displaystyle\int_0^5 x(x-5)^2\,dx = \int_0^5 x \times \left\{ \frac{(x-5)^3}{3} \right\}' dx$

$$= \left[x \times \frac{(x-5)^3}{3}\right]_0^5 - \int_0^5 (x)' \times \frac{(x-5)^3}{3}\,dx = 0 - 0 - \int_0^5 \frac{(x-5)^3}{3}\,dx$$

$$= -\left[\frac{(x-5)^4}{12}\right]_0^5 = -\left\{ \frac{0^4}{12} - \frac{(-5)^4}{12} \right\} = \frac{625}{12}$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^3\,dx =$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx =$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx =$

(4) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx =$

< 定積分の部分積分法 2 >

問 1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$

問 2　部分積分によって、次の定積分の値を求めよ。ただし α, β は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)(x-1)^3\,dx$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

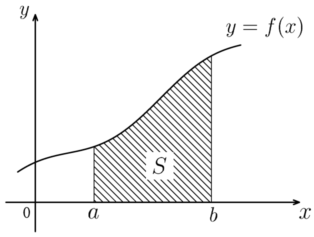
< 面積 1 >

定積分の定義 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k)$
から次の定理が導かれる。

定理 連続関数 $f(x)$ が区間 $[\,a\,,\,b\,]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき , 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積を S とすると,

$$(*) \quad \boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

である。

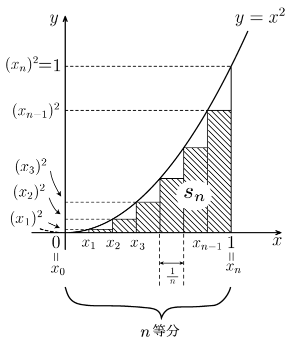


例 放物線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S について $(*)$ を確認する。区間 $[\,0\,,\,1\,]$ を n 等分する。k 番目の分点は $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,n)$ である。代表値が $\xi_k = x_{k-1}$ の場合と $\xi_k = x_k$ の場合のリーマン和をそれぞれ

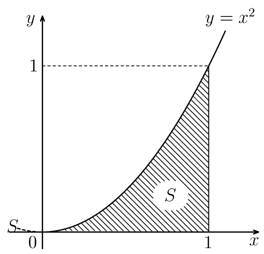
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1})^2(x_k - x_{k-1}) \qquad , \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2(x_k - x_{k-1})$$

とおくと図より

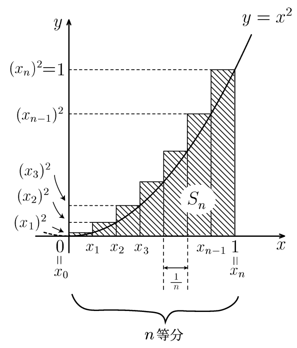
$$s_n \qquad \leqq \qquad S \qquad \leqq \qquad S_n$$



$\leqq$



$\leqq$



となる。従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n \;\leqq\; S \;\leqq\; \lim_{n\to\infty} S_n$ である。また

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

だから $\frac{1}{3} \leqq S \leqq \frac{1}{3}$ より $S = \frac{1}{3}$ である。

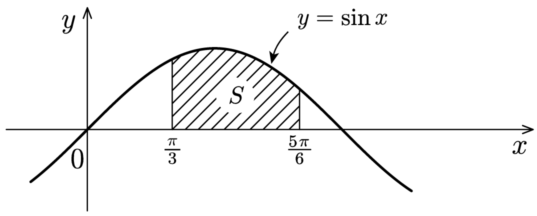
一方 $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ である。よって $(*)$ $\boxed{S = \int_0^1 x^2 dx}$ が成り立つ。

(注) 上の例の分割の場合, ダルブー過剰和が S_n, ダルブー不足和が s_n である。

< 面積 2 >

例　曲線 $y=\sin x$ と 2 直線 $x=\dfrac{\pi}{3}$ と $x=\dfrac{5\pi}{6}$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求める。

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$



問　次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y=e^x$　,　$x=0$, $x=1$

(2) $y=\sqrt{x}$　,　$x=1$, $x=9$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2}$　,　$x=1$, $x=2$

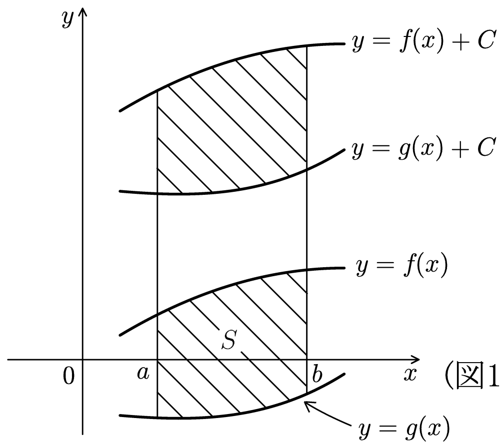
(4) $y=\dfrac{1}{x}$　,　$x=1$, $x=2$

＜ 面積 3 ＞

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ である場合，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

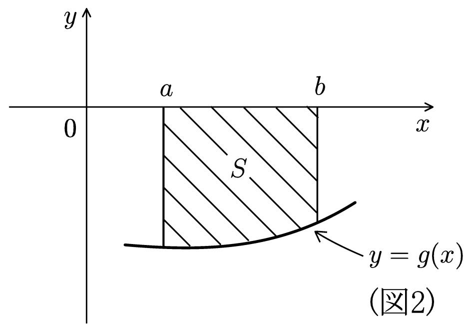
$$(*) \quad \boxed{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx}$$

＜証明略＞



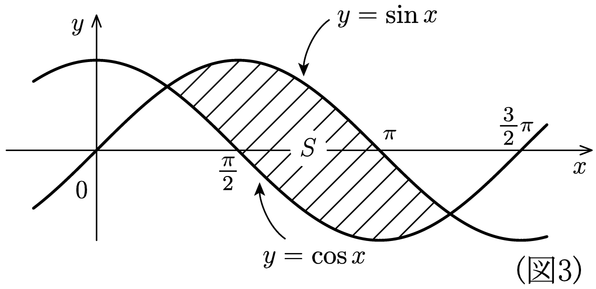
(図1)

問 1　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $g(x) < 0$ の場合，曲線 $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を $g(x)$ に関する定積分で表せ。



(図2)

問 2　図 3 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図3)

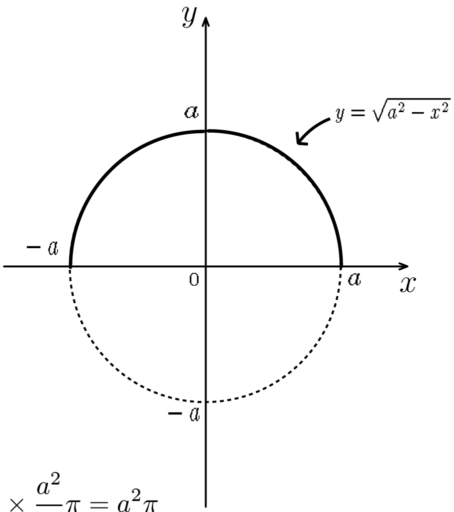
問 3　次の曲線や直線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$，$y = x^2$

(2) $y = \dfrac{1}{x}$，$y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

< 面積 4 >

例題　a を正の定数とする。半径 a の円の面積を求めよ。



(解)　原点 $(0,0)$ を中心として半径 a の円の方程式は

$$x^2+y^2=a^2$$

である。この式は $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ とも書ける。

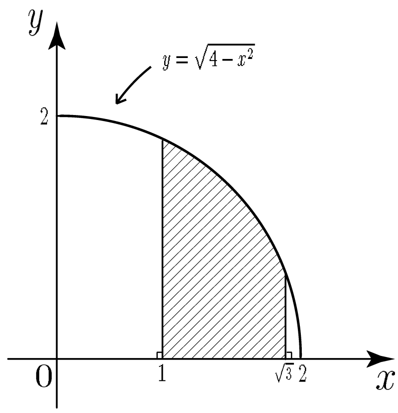
ここで $y=\sqrt{a^2-x^2}$ は上半円 (円の上半分)

である。求める円の面積を S とすると

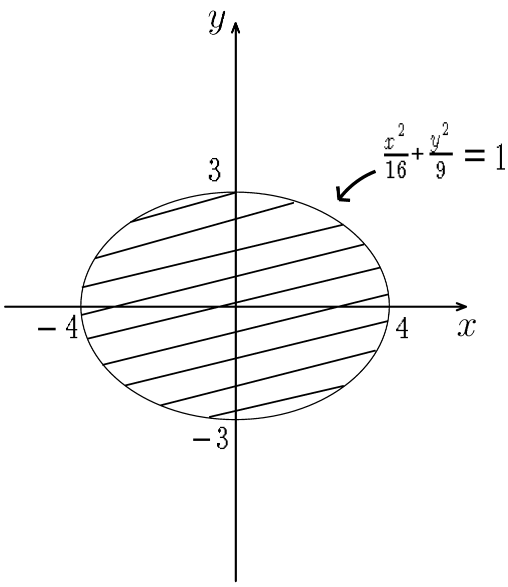
$$\frac{S}{4}=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

P.32 の例題より $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{4}\pi$ だから，$\underline{S=4\times\dfrac{a^2}{4}\pi=a^2\pi}$

問 1　右図斜線部分の面積を求めよ。



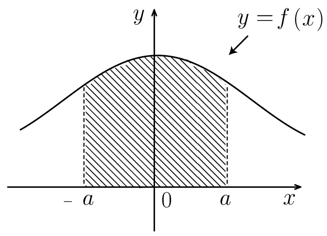
問 2　右図の楕円の内部の面積を求めよ。



< 偶関数・奇関数の定積分 >

$f(-x)=f(x)$ (y 軸対称) である関数 $f(x)$ を**偶関数**という。

例 1 $f(x)=x^{2n}$ (n は整数), $f(x)=\cos x$, $f(x)=\sin^2 x$ などは偶関数である。

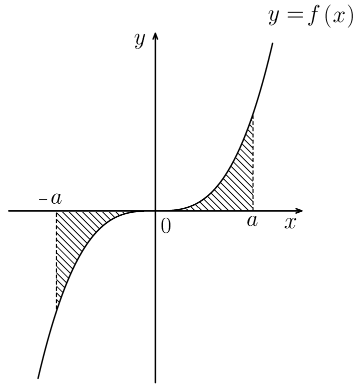


$$\boxed{f(x) \text{ が偶関数であれば } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx}$$

(証明) $f(-x)=f(x)$ であるから $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ よりわかる。

$f(-x)=-f(x)$ (原点対称) である関数 $f(x)$ を**奇関数**という。

例 2 $f(x)=x^{2n-1}$ (n は整数), $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$ などは奇関数である。



$$\boxed{f(x) \text{ が奇関数であれば } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$$

(証明) $f(-x)=-f(x)$ であるから $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ よりわかる。

例 3 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+x^4)dx = \int_{-1}^{1}x^3dx + \int_{-1}^{1}x^4dx = 0 + 2\int_0^1 x^4dx = \frac{2}{5}$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+x^4+x^5)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+x^3+x^6)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\tan x\right)dx$

< 区分求積法 >

区間 $[a,b]$ で連続な関数はリーマン積分可能であるから, $[a,b]$ の

n 等分点を $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \left(x_k = a + (\frac{b-a}{n})k\right)$ とおくと

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x} \qquad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$$

と表せれる。このような和の極限として定積分を求めることを, 定積分の**区分求積法**という。

例題　定数 $a, b(a<b)$ に対して, 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(a+(\frac{b-a}{n})k\right)\ \frac{b-a}{n}$$

(解)　この極限の式は区分求積法で $f(x)=\sin x$, $x_k = a + (\frac{b-a}{n})k$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ に対応しているから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(a+(\frac{b-a}{n})k\right)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin(x_k)\Delta x = \int_a^b \sin x dx = [-\cos x]_a^b = -\cos b + \cos a$$

問　次の極限値を求めよ。ここで、a, b は定数であり, $0<a<b$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(a+(\frac{b-a}{n})k\right)\frac{b-a}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a+(\frac{b-a}{n})k\right)^5\cdot\frac{b-a}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a+(\frac{b-a}{n})k}\cdot\frac{b-a}{n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}k\right)\frac{\pi}{n}$

< 定積分の応用問題 >

問 1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+x^2+x^3+x^4+x^5)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x+\cos x+\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

問 2　次の図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ と x 軸および 2 直線 $x=1$ と $x=4$ で囲まれた部分の面積

(2) 曲線 $y=-x^2+3$ と曲線 $y=x^2-2x-1$ で囲まれた部分の面積

(3) 曲線 $y=x^3$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積

(4) $y=\log x$ と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた部分の面積

問 3　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\cdot\frac{1}{n}$$

< 関数の極限 >

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{27-8}{3-2}=19$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$

例 3 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^3+x^2+x+1)=4$

(注) 初項 a^{n-1} , 公比 $\frac{b}{a}$ の等比数列の和の公式より

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

よって, 次の公式が成立する。

$$\boxed{a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})}$$

例 4 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^5-3^5}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^4+x^3\times3+x^2\times3^2+x\times3^3+3^4)}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)=81\times5=405$

問 次の関数の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-16}{x-4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-27}{x-3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{x-1}$

< ロピタルの定理 1 >

< 定理 (ロピタル)>

$f(x)$，$g(x)$ は微分可能で，$f(a)=0$，$g(a)=0$ であり，極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が

存在すれば
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明)　右極限を示す。$x>a$ のとき，コーシーの平均値の定理より

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a<c<x)$$

をみたす c が存在する。$x\to a+0$ のとき $c\to a+0$ より，右辺 $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ は

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ に近づく。左極限の場合も同様に示される。

例 1　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$ を求めたい。$x=1$ を代入すると分母，分子共に 0 になるから

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{1} = 5$$

例 2　$$\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{(\log x-1)'}{(x-e)'} = \lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

＜ロピタルの定理 2＞

例 1 $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{((x-1)^2)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(6x^5-6)'}{(2(x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{30x^4}{2}=15$$

例 2 $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(2x)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2}=\frac{-\cos 0}{2}=-\frac{1}{2}$$

問 次の関数の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^5-32-80(x-2)}{(x-2)^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to e}\frac{\log x-1-\frac{1}{e}(x-e)}{(x-e)^2}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$

< 高階導関数 >

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f^{(1)}(x)$$

等で表す。また $f'(x)$ の導関数 $f''(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ を

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = f^{(2)}(x)$$

等で表し，$f(x)$ の **2 階導関数**という。

また $f''(x)$ の導関数 $f'''(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$ を

$$f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 f(x) = f^{(3)}(x)$$

等で表し，$f(x)$ の **3 階導関数**という。

一般に $f(x)$ を n 回微分した関数を

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = f^{(n)}(x)$$

等で表し，$f(x)$ の n **階導関数**という。

例 $f(x) = x^{10}$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 10x^9\ ,\ \ f^{(2)}(x) = 90x^8\ ,\ \ f^{(3)}(x) = 720x^7\ ,\ \ f^{(4)}(x) = 5040x^6$$

問 $f(x)$ が次の場合に 4 階導関数まで求めよ。

(1) $f(x) = \sin x$

$f^{(1)}(x) =$ $f^{(2)}(x) =$ $f^{(3)}(x) =$ $f^{(4)}(x) =$

(2) $f(x) = \cos x$

$f^{(1)}(x) =$ $f^{(2)}(x) =$ $f^{(3)}(x) =$ $f^{(4)}(x) =$

< 高階微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ の $x=a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x=a$ における

$f(x)$ の n **階微分係数**という。

例　$f(x)=x^5$ のとき

$f^{(1)}(x)=5x^4$, $f^{(2)}(x)=20x^3$, $f^{(3)}(x)=60x^2$, $f^{(4)}(x)=120x$

より，$x=2$ における 4 階までの微分係数は,

$f^{(1)}(2)=80$, $f^{(2)}(2)=160$, $f^{(3)}(2)=240$, $f^{(4)}(2)=240$

問 1　$f(x)=\sin x$ の $x=0$ における 8 階までの微分係数 $f^{(1)}(0)\sim f^{(8)}(0)$ を求めよ。

$f^{(1)}(0)=$　　$f^{(2)}(0)=$　　$f^{(3)}(0)=$　　$f^{(4)}(0)=$

$f^{(5)}(0)=$　　$f^{(6)}(0)=$　　$f^{(7)}(0)=$　　$f^{(8)}(0)=$

問 2　$f(x)=\cos x$ の $x=0$ における 8 階までの微分係数 $f^{(1)}(0)\sim f^{(8)}(0)$ を求めよ。

$f^{(1)}(0)=$　　$f^{(2)}(0)=$　　$f^{(3)}(0)=$　　$f^{(4)}(0)=$

$f^{(5)}(0)=$　　$f^{(6)}(0)=$　　$f^{(7)}(0)=$　　$f^{(8)}(0)=$

問 3　$f(x)=e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め，$x=0$ における

n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

$f^{(n)}(x)=$　　$f^{(n)}(0)=$

< テーラーの定理 >

< テーラーの定理 >

$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続であり，$a < x < b$ で何回でも微分可能であるとする。

このとき

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)} + R$$

とおくと

$$R = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \qquad (\ a < c < b\ )$$

をみたす c が存在する。

(証明)　$n = 1$ のときと $n = 2$ のときの証明をする。

$< n = 1$ のとき $>$

$F(x) = f(x) - f(a)$，$G(x) = x - a$　とおくと

$F'(x) = f'(x)$，$G'(x) = 1$，$F(a) = 0$，$G(a) = 0$ より，コーシーの平均値の定理から

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \qquad (\ a < c < b\ )$$

をみたす c が存在する。よって　$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f'(c)}{1}$　より

$$\underline{f(b) = f(a) + \frac{f'(c)}{1!}(b-a)}$$

$< n = 2$ のとき $>$

$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$，$G(x) = (x-a)^2$　とおくと

$F'(x) = f'(x) - f'(a)$，$F''(x) = f''(x)$，$G'(x) = 2(x-a)$，$G''(x) = 2$，

$F(a) = 0$，$F'(a) = 0$，$G(a) = 0$，$G'(a) = 0$ より，コーシーの平均値の定理から

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} \qquad (\ a < c_2 < c_1 < b\ )$$

をみたす c_1，c_2 が存在する。よって $\dfrac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \dfrac{f''(c_2)}{2}$ より

$$\underline{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(c_2)}{2!}(b-a)^2}$$

n が 3 以上のときも同様に示される。

< 関数の 1 次近似 >

テーラーの定理で，$n = 2$，$b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 \qquad (a < c < x)$$

をみたす c が存在する。ここで，x が a に十分近いと $\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$ は 0 に近いので，

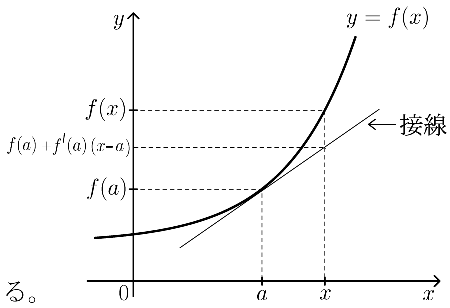
次の近似式が成り立つ。

$$(*) \quad \boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)} \quad (1\text{ 次近似式})$$

これを $f(x)$ の $x = a$ の近くでの 1 **次近似式**

という。右辺の式は直線

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)} \qquad (\text{接線})$$



を表す。これは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式である。

(注)　$f(x)$ が $x < a$ でも定義されている場合は，1 次近似式 $(*)$ は $x < a$ のときも成り立つ。

例　$f(x) = \sqrt[3]{x}$ のとき $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ より $\sqrt[3]{x}$ の 1 次近似式は

$$\underline{x \fallingdotseq a \text{ のとき} \qquad \sqrt[3]{x} \fallingdotseq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x-a)}$$

問　$f(x)$ が次の関数の場合に $x = a$ の近くでの 1 次近似式を求めよ。

(1)　$f(x) = \sqrt{x}$　　(2)　$f(x) = \sqrt[4]{x}$

(3)　$f(x) = \log x$　　(4)　$f(x) = \sin x$

(5)　$f(x) = \cos x$　　(6)　$f(x) = e^x$

＜ 1 次近似値 ＞

例　前のページの例より $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の $x = a$ の近くでの 1 次近似式は

$$x \fallingdotseq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x} \fallingdotseq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x-a) \quad \ldots (*)$$

であった。この近似値を用いて $\sqrt[3]{8.15}$ の近似式を求める。

$x = 8.15$，$a = 8$ とおくと $x \fallingdotseq a$ より $(*)$ 式から

$$\sqrt[3]{8.15} \fallingdotseq \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(8.15-8)$$
$$= 2 + \frac{1}{3 \times 4} \times 0.15 = 2 + \frac{0.05}{4} = 2.0125$$

この値 2.0125 は，1 次近似式 $(*)$ を用いるので，$\sqrt[3]{8.15}$ の **1 次近似値**

という。なお実際の値 $\sqrt[3]{8.15} = 2.01242\cdots$ と比べると誤差は 0.0001 以内である。

問　次の 1 次近似値を求めよ。

(1)　$\sqrt{4.1}$

(2)　$\sqrt[4]{16.1}$

(3)　$\log(1.1)$

< 関数の 2 次近似 >

テーラーの定理で，$n=3$，$b=x$ とおくと

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3 \qquad (a<c<x)$$

をみたす c が存在する。ここで $f'''(c)$ が大きくない場合，x が a に十分近い

と $\dfrac{f'''(c)}{3}(x-a)^3$ は小さいので，次の近似式が成り立つ。

$$(*)\quad \boxed{\ x\fallingdotseq a \text{ のとき } f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\ }\ (2\text{ 次近似式})$$

これを $f(x)$ の $x=a$ の近くでの 2 **次近似式**という。

(注)　$f(x)$ が $x<a$ でも定義されている場合は，2 次近似式 $(*)$ は $x<a$ のときも成り立つ。

例　$f(x)=x^5$ のとき $f'(x)=5x^4$，$f''(x)=20x^3$ より x^5 の 2 次近似式は

$$\underline{x\fallingdotseq a \text{ のとき}\qquad x^5\fallingdotseq a^5+5a^4(x-a)+10a^3(x-a)^2}$$

問　$f(x)$ が次の関数の場合に $x=a$ の近くでの 2 次近似式を求めよ。

(1)　$f(x)=x^n$

(2)　$f(x)=\sqrt{x}$

(3)　$f(x)=\log x$

(4)　$f(x)=\sin x$

(5)　$f(x)=\cos x$

(6)　$f(x)=e^x$

< テーラー展開 >

テーラーの定理で $b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

をみたす c $(a < c < x)$ が存在する。ここで $f(x) = e^x$ や $\sin x$，$\cos x$ などの場合

のように，$f^{(n)}(c)$ が大きくならない場合は，最後の項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ は $n \to \infty$

のとき 0 に近づく。この極限の式

$$(*) \quad \boxed{f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots}$$

の右辺は無限個の和である。この式 $(*)$ を $f(x)$ の $x = a$ の近くでの**テーラー展開**という。

(注)　$f(x)$ が $x < a$ でも定義されて，$(*)$ 式の右辺が収束する場合は，$(*)$ 式は $x < a$ でも成り立つ。

問 1　定数 a，A_0，A_1，A_2，A_3，A_4，$\cdots$，A_n に対し，n 次関数 $f(x)$ が

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + A_4(x-a)^4 + \cdots + A_n(x-a)^n$$

と表されている場合を考える。その導関数 $f^{(1)}(x)$ や n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(1)}(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + 4A_4(x-a)^3 + \cdots + nA_n(x-a)^{n-1}$$

$$f^{(2)}(x) = 2A_2 + 3 \times 2A_3(x-a) + 4 \times 3A_4(x-a)^2 + \cdots + n \times (n-1)A_n(x-a)^{n-2}$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \times 2A_3 + 4 \times 3 \times 2A_4(x-a) + \cdots + n \times (n-1) \times (n-2)A_n(x-a)^{n-3}$$

$$f^{(n)}(x) = n!A_n$$

となる。

(1)　次の値を求めよ。

$f(a)$	$f^{(1)}(a)$	$f^{(2)}(a)$	$f^{(3)}(a)$	$f^{(n)}(a)$
$=$	$=$	$=$	$=$	$=$

(2)　次の値を $f(a)$，$f^{(1)}(a)$，$f^{(2)}(a)$，$f^{(3)}(a)$，$\cdots$，$f^{(n)}(a)$ を用いて表せ。

A_0	A_1	A_2	A_3	A_n
$=$	$=$	$=$	$=$	$=$

問 2　$f(x) = e^x$ に対し，$x = a$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

< マクローリン展開 >

関数 $f(x)$ の $x=0$ の近くでのテーラー展開

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

を**マクローリン展開**という。

問 1 $f(x)=e^x$ に対し，$f(0)$ および $f^{(n)}(0)$ の各値を求め，

$f(x)=e^x$ のマクローリン展開を求めよ。

$f(0)=$ $\qquad$ $f^{(n)}(0)=$

$e^x=$

問 2 $f(x)=\sin x$ に対し，$f(0)$ および $f^{(1)}(0)\sim f^{(12)}(0)$ の各値を求め，

$\sin x$ のマクローリン展開を求めよ。

$f(0)=$ $\quad$ $f^{(1)}(0)=$ $\quad$ $f^{(2)}(0)=$ $\quad$ $f^{(3)}(0)=$ $\quad$ $f^{(4)}(0)=$

$f^{(5)}(0)=$ $\quad$ $f^{(6)}(0)=$ $\quad$ $f^{(7)}(0)=$ $\quad$ $f^{(8)}(0)=$

$f^{(9)}(0)=$ $\quad$ $f^{(10)}(0)=$ $\quad$ $f^{(11)}(0)=$ $\quad$ $f^{(12)}(0)=$

$\sin x=$

問 3 $f(x)=\cos x$ に対し，$f(0)$ および $f^{(1)}(0)\sim f^{(12)}(0)$ の各値を求め，

$\cos x$ のマクローリン展開を求めよ。

$f(0)=$ $\quad$ $f^{(1)}(0)=$ $\quad$ $f^{(2)}(0)=$ $\quad$ $f^{(3)}(0)=$ $\quad$ $f^{(4)}(0)=$

$f^{(5)}(0)=$ $\quad$ $f^{(6)}(0)=$ $\quad$ $f^{(7)}(0)=$ $\quad$ $f^{(8)}(0)=$

$f^{(9)}(0)=$ $\quad$ $f^{(10)}(0)=$ $\quad$ $f^{(11)}(0)=$ $\quad$ $f^{(12)}(0)=$

$\cos x=$

< 練習問題 >

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^6-64}{x-2}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^6-64}{x-2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{\log x-\log 3}{x-3}$　　(4) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a-(\cos a)(x-a)+\frac{1}{2}(\sin a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$

問 2　関数 $f(x)=e^x$ の $x=2$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

問 3　次の近似式を求めよ。

(1) $f(x)$ の $x=a$ の近くでの 2 次近似式

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=a$ の近くでの 1 次近似式

(3) $f(x)=\log x$ の $x=a$ の近くでの 1 次近似式

(4) $f(x)=\sin x$ の $x=a$ の近くでの 2 次近似式

問 4　次の 1 次近似値を求めよ。

(1) $\sqrt{16.1}$　　(2) $\log 1.05$

問 5　次のマクローリン展開を求めよ。

(1) $\sin x$

(2) $\cos x$

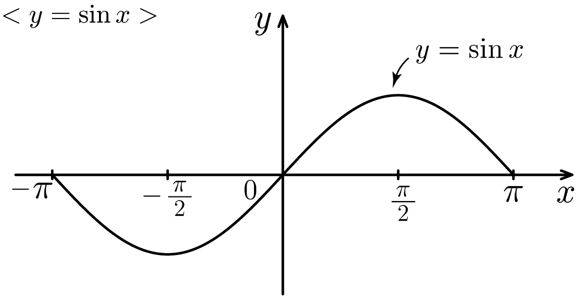
< 付録1: 三角関数のマクローリン展開 >

例 1　$\sin x$ のマクローリン展開は

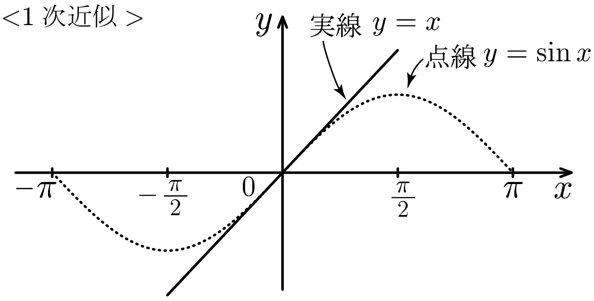
$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots}$$

となる。以下の図のように, この式の右辺の関数は $y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

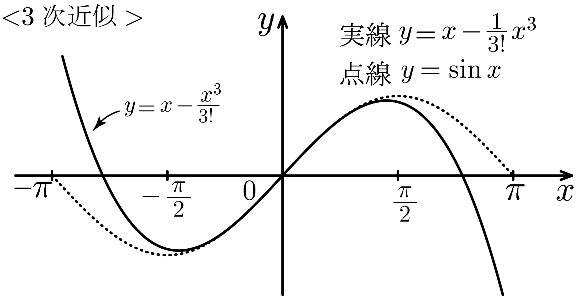
$< y = \sin x >$



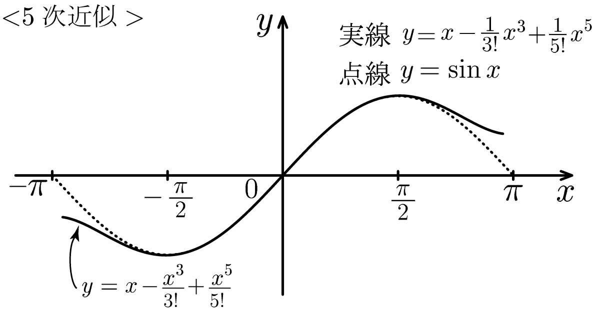
<1 次近似 >



<3 次近似 >



<5 次近似 >

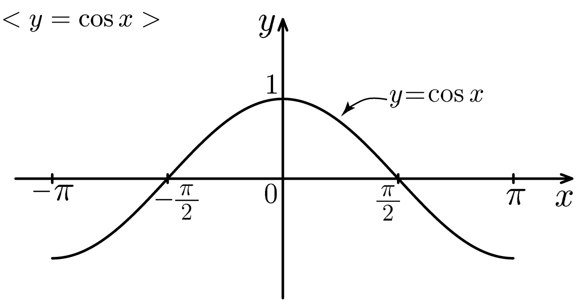


例 2　$\cos x$ のマクローリン展開は

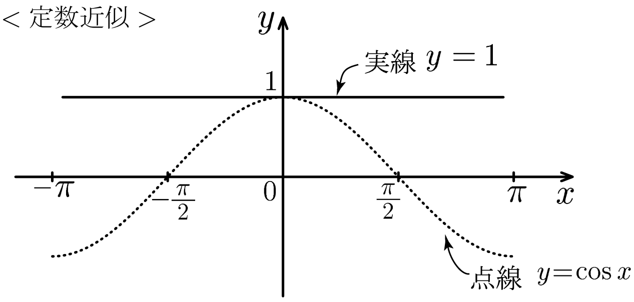
$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots}$$

となる。以下の図のように, この式の右辺の関数は $y = \cos x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

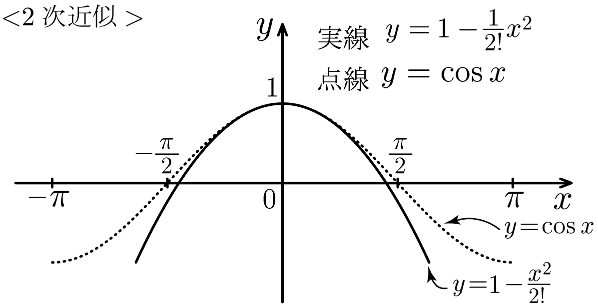
$< y = \cos x >$



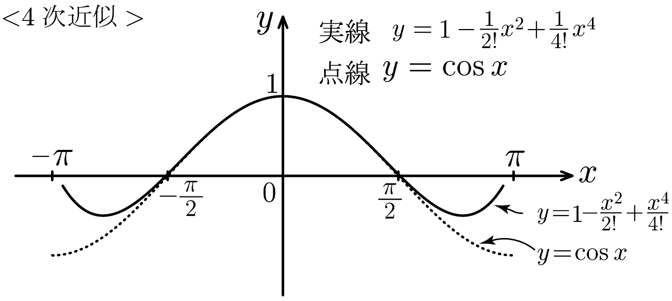
< 定数近似 >



<2 次近似 >



<4 次近似 >



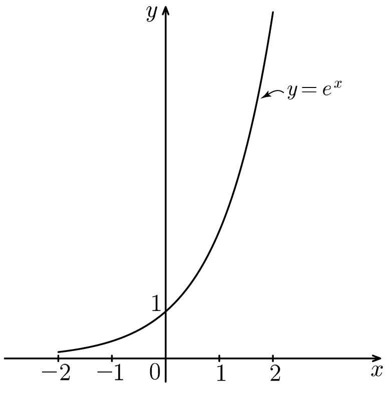
< 付録 2 : 指数関数のマクローリン展開 >

指数関数 e^x のマクローリン展開は

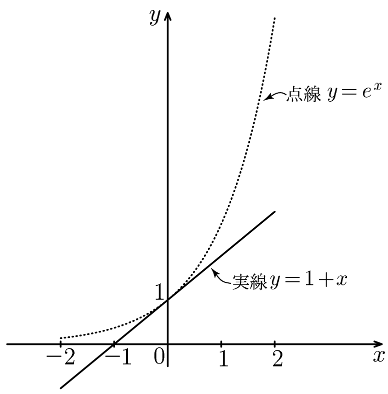
$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots}$$

となる。以下の図のように, この式の右辺の関数は $y = e^x$ のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

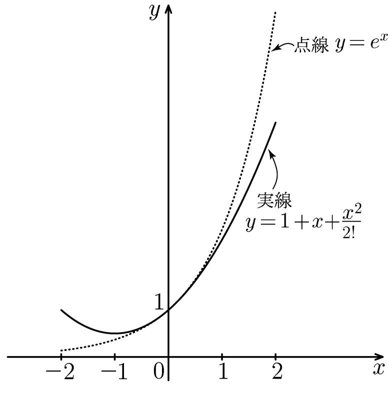
$< y = e^x >$



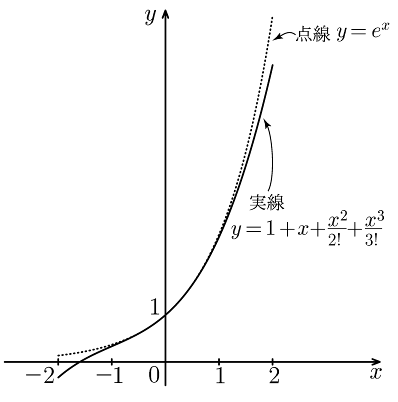
$<$ 1 次近似 $>$



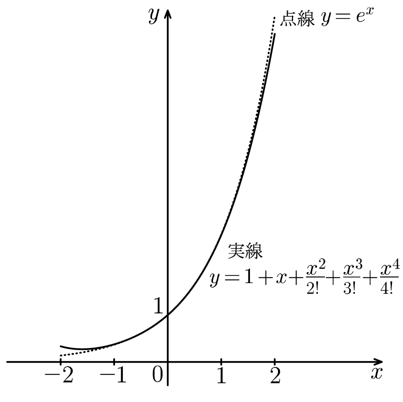
$<$ 2 次近似 $>$



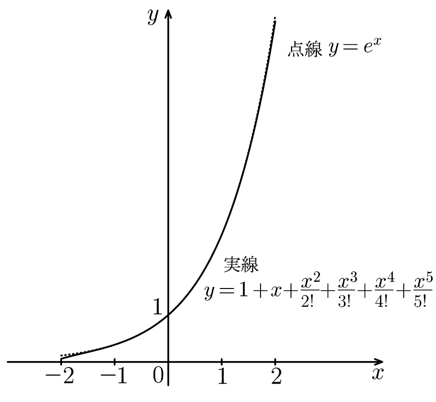
$<$ 3 次近似 $>$



$<$ 4 次近似 $>$



$<$ 5 次近似 $>$



上の図からわかるように 4 次関数 $y = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲

で $y = e^x$ のグラフとほぼ一致している。従って次の近似式が成り立つ。

$$\boxed{-1 \leqq x \leqq 1 \quad \text{のとき} \quad e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4}$$

この近似式で $x = 1$ とおくと

$$e \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \fallingdotseq 2.70833$$

となる。実際の値 $e = 2.71828\cdots$ と比較すると誤差は 0.01 以内である。

< 付録 3:積分の歴史 >

古代エジプトではナイル川の氾濫のたびに土地が水没した。水が退いた後所有者に元の場所に移住させるためには，何が水没したのかを知る必要があった。このような測量の必要性から幾何学は作られた。その起源は面積の測定であった。これがギリシャに伝わり，ギリシャ数学として発展していく。

最初の数学者と言われるタレスは (B.C.624〜B.C.542)B.C.585 年５月２８日の日食を予言した。そして，２等辺三角形の底角が等しいこと，一辺とその両側の角が等しい三角形は合同であることなどを証明した。ピタゴラス (B.C.580〜B.C.500) は弟子を集めてピタゴラス学派を作り，天文学・幾何学・音楽理論・数論を研究した。三平方の定理は既に知られた結果であったが，その証明をした。また $\sqrt{2}$ が非通約量（整数の比では表せない量＝無理数）であることを発見した。

ゼノン (B.C.450 頃) は無限と連続の概念に関連した困難さを明らかにするパラドックス（逆理）を提出した。例えば「移動するものは，目的点へ達するよりも前に，その半分の点に達しなければならないがゆえに，運動しない」や「もしどんなものもそれ自身と等しいものに対応している［それ自身と等しい場所を占める］ときは常に静止しているとするならば，運動するものが今において常にそれ自身と等しいものに対応しているとすれば，移動する矢は動かない」などである。

デモクリストス (B.C.408〜B.C.370) は角錐の体積が，同じ底面を持つ同じ高さの角柱の体積の３分の一であることを知っていた。また「立体は，互いに平行にして限りなく薄く限りなく近接している無数の薄平板の集まりである」という考えを持っていた。哲学者アリストテレス (B.C.384〜B.C.322) はゼノンの逆理を論駁しようとして,「数」と「大きさ」を区別した。数と大きさをまとめて「量」といい，離散的な量を「数」，連続的な量を「大きさ」であるとした。大きさは分割できる量であり，数は分割できない量であるとした。

ユークリッド (B.C.300 頃) は著書「原論」において幾何学の諸定理を２３個の定義，５個の公準（要請），９個の公理（共通概念）を用いて厳密に証明した。参考のため定義，公準，公理を紹介する，

定義　「１．点とは部分を持たないものである。２．線とは幅のない長さである。３．線の端は点である。４．直線とはその上にある点について一様に横たわる線である。５．面とは長さと幅のみをもつものである。６．面の端は線である。７．平面とはその上にある直線について一様に横たわる面である。８．平面角とは平面上にあって互いに交わりかつ一直線をなすことのない二つの線相互の傾きである。９．角を挟む線が直線であるとき，その角は直線角と呼ばれる。１０．直線が直線の上に立てられて接角を互いに等しくするとき，等しい角の双方は直角であり，上に立つ直線はその下の直線に対して垂線と呼ばれる。１１．鈍角とは直角より大きい角である。１２．鋭角とは直角より小さい角である。１３．境界とはあるものの端である。１４．図形とは一つまたは二つ以上の境界によって囲まれたものである。１５．円とは一つの線に囲まれた平面図形で，その図形の内部にある１点からそれへひかれたすべての線分が互いに等しいものである。１６．この点は円の中心と呼ばれる。１７．円の直径とは円の中心を通り両方向で円周によって限られた任意の線分であり，それはまた円を２等分する。１８．半円とは直径とそれによって切り取られた弧とによって囲まれた図形である。半円の中心は円のそれと同じである。１９．直線図形とは線分に囲まれた図形であり，三辺形とは三つの，四辺形とは四つの，多辺形とは四つより多くの線分に囲まれた図形である。２０．三辺形のうち，等辺三角形とは三つの等しい辺を持つもの，二等辺三角形とは二つだけ等しい辺を持つもの，不等辺三角形とは三つの不等な辺をもつものである。２１．さらに三辺形のうち，直角三角形とは直角をもつもの，鈍角三角形とは三つの鋭角をもつものである。２２．四辺形のうち，正方形とは等辺でかつ角が直角のもの，矩形とは角が直角で，等辺でないもの，菱形とは等辺で，角が直角でないもの，長斜方形とは対辺と対角が等しいが，等辺でなく角が直角でないものである。これら以外の四辺形はトラペジオンと呼ばれるとせよ。２３．平行線とは，同一の平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である。」

公準（要請）次のことが要請されているとせよ。

「1．任意の点から任意の点へ直線を引くこと。2．有限直線を連続して一直線に延長すること。3．任意の点と距離（半径）とをもって円を描くこと。4．すべての直角は等しいこと。5． 1直線が2直線に交わり同じ側の内角の和を2直角より小さくするならば，この2直線は限りなく延長されると2直角より小さい角のある側において交わること。」

公理（共通概念）

「1．同じものに等しいものはまた互いに等しい。2．等しいものに等しいものが加えられれば，全体は等しい。3．等しいものから等しいものがひかれれば，残りは等しい。4．不等なものに等しいものが加えられれば全体は不等である。5．同じものの2倍は互いに等しい。6．同じものの半分は互いに等しい。7．互いに重なり合うものは互いに等しい。8．全体は部分より大きい。9． 2線分は面積を囲まない。」

これがユークリッド「原論」の最初に書いてある定義，公準，公理である。この定義・公準・公理から幾何学のいろいろな定理を証明した。この本は，聖書以外で，最も多数回出版され，最も多くの人に読まれた書物である。

アルキメデス (B.C.285〜B.C.212) は人類の生んだ最も偉大な人物の一人である。彼は防御用機械の設計・建築を指導し，静力学，水力学，数学，天文学，光学の研究をした。太陽と月の出入りと食，惑星の運行を観察することができるプラネタリームを作った。重心の概念を導入し，多くの図形や物体の重心の位置を決定し,「てこ」の理論を作った。水圧の法則を発見し，浮力の法則の定式化をした。数学に関しては多くの図形の面積や体積を求め，積分学の起源を作った。例えば放物線の弓形の面積，円錐や球の体積，球の表面積などを求めた。その発見的方法は図形の大きさを重さで表し，力学の「てこ」の釣り合い関係を使うものである。なおその後で「取りつくし法」による厳密な証明を得ている。この「取りつくし法」とは，平面図形を帯状の「埋めつくす」図形に，立体図形を層状の「埋めつくす」ものに分解して，面積や体積を求めるものであり，ダルブー和に相当する方法である。その証明の中でアルキメデスは不等式

$$\frac{hn^2}{2} < h + 2h + 3h + \cdots + nh < \frac{hn(n+1)}{2}$$

や

$$\frac{h^2n^3}{3} < (h^2) + (2h)^2 + (3h)^2 + \cdots + (nh)^2 < \frac{h^2(n+1)^3}{3}$$

を使い，求める面積（または体積）を不等式によって厳密に評価した。これが積分学の起源と称される理由である。

ケプラー (1571〜1630) は惑星の運動における3法則を発見した天文学者として知られているが，アルキメデス求積法の継承者であり，近代求積法の端緒を切り開いた数学者でもある。 3法則とは「1. 惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道を描いて運行する 2. 惑星と太陽を結ぶ動径は一定時間に一定面積を描く 3. 惑星の公転周期の2乗は，その惑星の太陽からの平均距離の3乗に比例する」である。その第2法則を得るために，楕円内の扇型の面積を計算しなければならなかった。楕円内の扇型の弧を細分し，その部分弧に対する小扇形の面積を円の扇形の面積で近似し，その和を計算した。その分割を限りなく細かくすると，その和が求める面積になると考えた。このケプラーの方法は無限小の方法と呼ばれた。

カヴァリエリ (1598〜1647) はガリレオ・ガリレイの弟子であり，ガリレオを介してケプラーの影響を受けた。彼は面積や体積を分割し,「面素」,「体素」とでもいうべきものにまで細分化し，そのような要素を「不可分量」と名付けた。ケプラーの無限小図形は与えられた図形と同次元の小図形であるのに対して，カヴァリエリは所与の図形より1つ次元の低い無数の不可分量によって合成されたものと考えた。この不可分量は，その図形を切断して得られる切断線や切断面である。つまり線分の集まりが面であり，面の集まりが立体であると考えた。二つの平面図形の面積を比較するとき，無数の平行な線で切断された線分の長さの比が一定ならば，その比が二つの図形の面積比になる。また二つの立体の体積を比較するとき，無数の平行な平面で切断された切断面の面積比が一定ならば，その比が二つの立体の体積比になる。

この原理によって既知の図形の面積や体積からいろいろな図形の面積や体積を求めることができた。特に任意の自然数 n に対して x^n の 0 から a までの定積分が a^{n+1} であることを発見した。しかし「線」は「幅のないもの」であり，線分をどんなに集めても面積にはならない。幅について考えると，0（ゼロ）をいくら足しても 0（ゼロ）であり，正にはならないからである。このことをカヴァリエリは説明できなかった。

パスカル (1623〜1662) は組み合わせの数の表（パスカルの三角形）や確率の計算および計算機の発明者として有名であるが，積分学の発展にも重要な貢献をしている。カヴァリエリは不可分量あるいは不可分量の全体ということに対して何らの定義も与えないままに，所与の図形より 1 つ次元の低い無数の不可分量の全体として面積や体積を考えていた。これに対して，パスカルは所与の図形を同じ次元の無数の小図形の集まりと考えた。例えば面積を構成するのは同次元の無限小矩形であるとし，その総和が所与の図形の面積であると考えた。その考え方を用いて $\sin x$ の 0 から $\pi/2$ までの定積分の値が 1 であることを示した。これは三角関数について初めての積分である。

ウォリス (1616〜1703) は，正の有理数 m に対して，曲線 $y = x^m$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を求めるのに，

$$\frac{0^m + 1^m + 2^m + \cdots + n^m}{n^m + n^m + n^m + \cdots + n^m} = \frac{(0/n)^m + (1/n)^m + (2/n)^m + \cdots + (n/n)^m}{n+1}$$

を計算した。これは区間 $[0, 1]$ を $n + 1$ 等分し，k 番目の小区間 $[\frac{k}{n+1},\ \frac{k+1}{n+1}](k = 0,\ 1,\ \cdots, n)$ の位置に幅 $\frac{1}{n+1}$，高さ $\left(\frac{k}{n}\right)^m$ の小長方形を立て，その面積の総和を表す。そして n が大きくなるときこの総和が $\frac{1}{m+1}$ になることを導出した。彼は幾何学における極限の概念を数の世界に移し，算術・代数的に処理することを可能にした。

次に接線の歴史を紹介する。ある曲線上の点において引かれる接線は古代ギリシャの頃から考察されていた。ユークリッドの原論では円の接線が取り上げられているし，アルキメデスの著書「螺線について」においては，螺線の接線が扱われている。さらに，アポロニオス (B.C.270〜B.C.190) は円錐曲線の接線を論じている。しかし，古代において接線は静的であって，点の運動と結びついた動的なものではなかった。接線の研究が深まるのは，運動する点の軌跡として曲線を捉えるとともに，運動する点の瞬間速度などに関心が向けられるようになる近代になってからのことである。そして，デカルト (1596〜1650) やフェルマー (1601〜1665) によって発明された解析幾何学的な手法が接線問題の研究を推進させたとも言える。(デカルト以前には，a^2 は a を一辺とする正方形の面積を，b^3 は一辺が b の立方体の体積を表すものとされていた。そして線分は線分同士，面積は面積同士，体積は体積同士の間でのみ加減することが可能とされていた。これを「同次元の法則」という。例えば $ab = c^2$ のような表現はあったが，$ab = c$ のような表現はしなかった。これに対しデカルトは長さ a, b の二つの線分に対して，積 ab や商 a/b および平方根 $\sqrt{a}$ を表す線分を作図した。同次元の法則からの離脱によってデカルトは解析幾何学の創始者と言われている。なお横軸に独立変数の軸（x 軸）をとり，縦軸に従属変数の軸（y 軸）をとって，曲線を座標平面上の点の軌跡として捉えたのはフェルマーであった。）デカルトとフェルマーの接線決定法を紹介しよう。最初デカルトは屈折光学への関心から，接線と直交する法線を研究していた。その光が反射する曲面（曲線）は楕円などの代数曲線であり，その法線を決定するために代数方程式の解を用いた。次にフェルマーは放物線の接線を求めるために，接線と放物線の共有点は 1 点だけであり，その共有点以外で接線は放物線の外部にあるという直感的な幾何学的事実を使って求めた。しかしフェルマーの方法は近代的な極限計算の発送からではない。デカルトはこのフェルマーの接線法をメルセンヌ (1588〜1648) を介して知り，フェルマーの方法を近代的に改良した。曲線上の 2 点を通る直線の傾きを考え，2 点を同一視して接線の傾きを求める方法を発見した。

バロー (1630〜1677) は与えられた関数 $v(u)$ に対して，面積関数 $f(x) = \int_a^x v(u)du$ のグラフ $y = f(x)$ の $x = u$ における接線の傾きが $v(u)$ であることを示した。これは面積を求めること（積分）と接線の傾きを求めること（微分）が互いに逆の演算であることを意味する。(バローの曲線の接線を求める方法は接点を一頂点とする無限小三角形を作り，その三角形の辺の比で接線の傾きを求めるものである。）バローの方法は幾何学的な方法であり，微分積分学を創始したとは言えない。微分と積分を代数的に計算するアルゴリズムはニュートンとライプニッツによって創始された。

ニュートン (1682〜1727) は点の運動を考え，運動によって生じる量（距離など）を流量，運動の速度を流率といった。流量から流率を求める（微分する）ための公式として積の微分公式を用いている。例えば $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ の流率を求めるために，$y^2 - a^2 + x^2 = 0$ と書き換えて微分し，$2yy' + 2xx' = 0$ から流率 y' を求めている。また流率から流量を求める（積分する）ことは流量から流率を求める（微分する）ことの逆演算であることに気づき，不定積分をいくつか求め，表にしている。ただしその表は巾関数 x^n や分数関数，無理関数などであり，三角関数や対数関数は含まれていない。なお $(1 - x^2)^n$ の不定積分を巾級数展開で表した。また $(a + b)^n$ の展開式を表す二項定理を n が有理数の場合に拡張した一般二項定理を発見し，それを用いて様々な関数の積分を求めた。また巾級数の項別積分などを使って，三角関数や指数関数などの級数展開（$\sin x$ や $\cos x$ および e^x などのマクローリン展開）を発見した。また万有引力からケプラーの法則を導いた。これが微分方程式の始まりとされている。

ライプニッツ (1646〜1716) は面積と接線の問題の解法の一般法則を与え，微分と積分の関係を確立し，現在使われている微分記号や積分記号を導入した。また「関数」という言葉も，ライプニッツが初めて導入した。彼は巾乗関数や分数関数などの代数方程式の解として表せる関数以外に，三角関数や指数関数なども関数の仲間に入れた。1694 年にライプニッツは，不定積分の計算の際に，任意定数を導入し，その中から与えられた点を通るものが選べるような，曲線の無限集合が得られることを示した。これは，現代的に言えば，初期条件 $y(x_0) = y_0$ をみたす微分方程式 $y' = f(x)$ の特殊解を求めると言うことである。また対数関数の微分結果を用いて，簡単な変数分離形の微分方程式の解法を発見した。

ニュートンとライプニッツによって微分（接線を求めること）と定積分（面積を求めること）が逆の演算であり，定積分は不定積分の値の差として求められることがわかった。ただし極限の概念は曖昧であり、厳密な理論はできあがっていない。その理論の完成はコーシーやリーマンまで待たねばならない。

なおニュートン（イギリス）とライプニッツ（ドイツ）の微分積分学発見の先取権争いから，イギリス数学界とヨーロッパ大陸の数学界は仲が悪くなり，互いの情報を交換することをやめてしまった。微分積分学に関する限り，イギリス人は皆ニュートンの方法と表記法を採用したが，大陸では，数学者はライプニッツのものを使用した。ライプニッツの表記法と彼の微分計算の方が結果的に使いやすいことがわかった。こうして大陸では微分積分学はより急速に発展した。特にヤコブ・ベルヌーイ (1654〜1705)（スイス），ヨハン・ベルヌーイ (1667〜1748)（スイス），オイラー (1707〜1783)（スイス），フーリエ (1768〜1830)（フランス）は，微分方程式の解法や変分学など微分積分学の発展に多大な貢献をした。これに対してイギリスの数学界は，ほとんど１８世紀全体にわたるこの重要な発展を自ら失うことになった。

コーシー (1789〜1857)(フランス) は極限を算術的な言葉使いで定義した。コーシーの定義は「同じ変数に属する，引き続く一連の値が，一つの定まった値に限りなく近づき，最終的には，引き続く一連の値との差が望むだけ小さくなるならば，この［定まった］値は，他のすべての値の**極限**と呼ばれる」。例えば「x の増加する値に対して，$f(x)$ がある極限 k に収束すること」を「任意に与えられた，望むだけ小さい ε に対して，$h \leqq x$ ならば，$k - \varepsilon < f(x) < k + \varepsilon$ となるある数 h を見出すことができる」と言い換えた。また連続関数を「関数 $f(x)$ が，変数 x の二つの与えられた値の間にある x の各値に対して，差の（絶対）値 $f(x + a) - f(x)$ が a とともに限りなく減少するとき，$f(x)$ はこの変数の**連続関数**であるという」と定義した。定積分に関して，コーシーは次の事を証明した。「区間 $[x_0, X]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ によって区間 $[x_0, X]$ を分割して，和

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_n)f(x_{n-1})$$

を作る。それから，n を無限に増加させ，すべての $x_i - x_{i-1}$ を 0 に近づけるとき，次のことが証明できる。つまり，区間 $[x_0, X]$ の分割の仕方によらずに，『S の値はついには一定になる。別な言い方をすれば，ついには，一定の極限値に到達する。そして，それは関数 $f(x)$ と変数 x の両端の値 x_0 と X にしかよらない。この極限値は存在し，それを定積分と呼ぶ。』」さらにコーシーは和 S の中の $f(x)$ の値はかならずしも分割の区間の左端ではなくて，その中の任意の点にとって良い。その場合でも和の極限値は変わらない事を示した。

これがコーシーの定積分の構成である。この定義からコーシーはニュートン・ライプニッツの定理

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (\text{ただし } F'(x) = f(x))$$

を証明した。さらに積分区間が無限区間である広義積分を有限区間の定積分の極限として定めた。連続関数の場合の積分理論はコーシーによって完成された。ところが 1822 年に発表されたフーリエ著「熱の解析理論」のなかで導入された三角級数（フーリエ級数）の出現によって，不連続関数に対しても積分ができる必要性が出てきた。

リーマン (1826〜1866) は積分可能な関数を次のように定めた。「区間 $[a,b]$ 上で，関数 $f(x)$ を考察する。この区間を点 $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ によって，任意に分割する。差 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ の最大値を λ で表す。各部分区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 上で，任意の点 $x = \xi_i$ をとり，関数 $f(x)$ の値 $f(\xi_i)$ を計算する。そして，和 $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ をつくる。$\lambda \to 0$ のとき，積分和 σ が一定の極限値をもつとき，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で**積分可能**という。」この積分和 σ は，しばしばリーマン和と呼ばれ，この積分可能性をリーマン積分可能性と呼ばれる。コーシーは連続関数ならばリーマン積分可能であることを証明した。不連続点が無限個でもリーマン積分可能な例はたくさんある。リーマン積分可能であるための必要十分条件は，$\lambda \to 0$ のとき，ダルブーの過剰和と不足和の差が 0 に収束する事である（p24 参照）。

参考文献

１.「積分の歴史」V．A．ニキフォロフスキー 著，馬場良和 訳（現代数学社）
２.「カッツ　数学の歴史」ヴィクターＪ．カッツ 著，上野・三浦 監訳（共立出版）
３.「はじめて読む　数学の歴史」上垣渉 著（ペレ出版）
４.「復刻版　ギリシャ数学史」T.L. ヒース 著，平田・菊池・大沼 訳（共立出版）
５.「ユークリッド原論」中村・寺坂・伊東・池田 訳・解説（共立出版）