

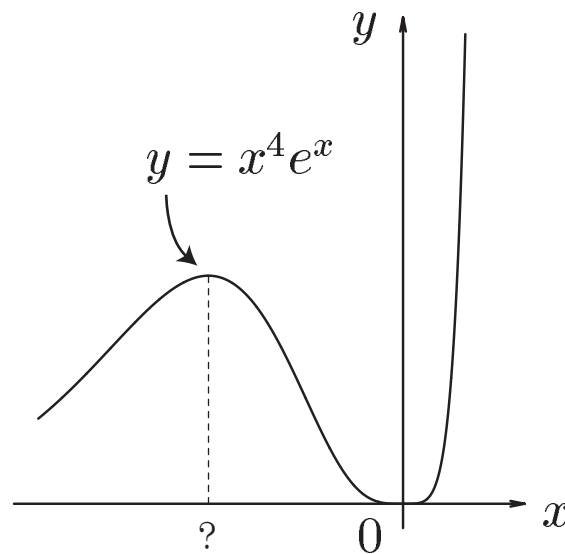


高知工科大学

Kochi University of Technology

数学 1

(2009年度版Ver. 2)



初等関数の微分法

(指数・対数・三角関数の微分, 和・差・積・商の微分)
(合成関数・逆関数の微分法, 関数の増減)

井上 昌昭 著

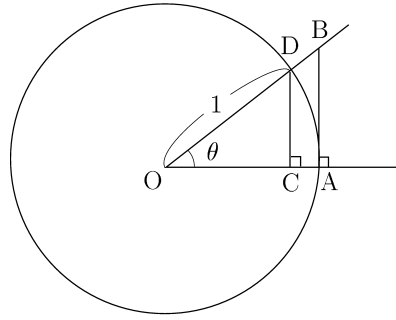
< 三角関数の極限 1 >

[定理]

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

[証明] 次の不等式が成り立つ。

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \boxed{\sin \theta < \theta < \tan \theta} \quad (*)$$



これは右図のような中心 O, 半径 1 の円 (OA=OD=1) で,
 CD の長さ = $\sin \theta$, 弧 AD の長さ = θ , AB の長さ = $\tan \theta$ であり,
 CD < 弧 AD < AB による。この不等式 (*) の厳密な証明はワークブックの
 ホームページで「数学小話」の中の「三角関数の極限について」に書いてある。

(*) 式より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\boxed{\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1} \quad \dots (**)$$

が成り立つ。また $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ だから

$$\cos(-\theta) = \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$$

より $\cos(-\theta) < \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} < 1$ が成り立つ。従って (**) 式は θ が負のときも成り立つ。ここで θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\theta} & : (\theta \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & : (\theta = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると, (**) 式から

$$\boxed{\cos \theta \leq f(\theta) \leq 1} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ。よって極限の性質から

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) \leq 1$$

が成り立つ。ここで $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = \cos 0 = 1$ より $\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = 1$ だから $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ (証明終)

< 三角関数の極限 2 >

前ページの結果より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

が成り立つ。この極限の応用問題を練習する。

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2$

(別解) $\theta = 2x$ とおくと $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\frac{1}{2}\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \times 2 = 1 \times 2 = 2$

例 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \times \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2}$$

問 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

< 平均の速さと瞬間の速さ >

平均の速さは移動した距離を移動にかかった時間で割ったものである。

$$\text{平均の早さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

例 1 車が 150km を 3 時間で走れば平均の速さは $\frac{150(\text{km})}{3(\text{h})} = 50(\text{km/h})$ (= 平均時速 50km) である。

例 2 静止していた物体が、落下し始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると、 y は x の関数で、

$$y = 4.9x^2$$

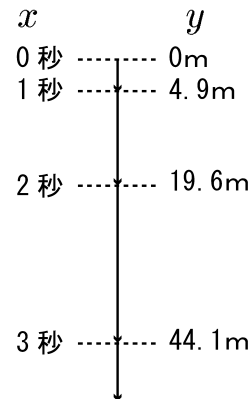
で与えられる。1 秒後から 3 秒後までの平均の早さは

$$\frac{4.9 \times 3^2 - 4.9 \times 1^2}{3 - 1} = \frac{44.1 - 4.9}{2} = 19.6(\text{m/s})$$

である。また a 秒後から b 秒後までの平均の早さは

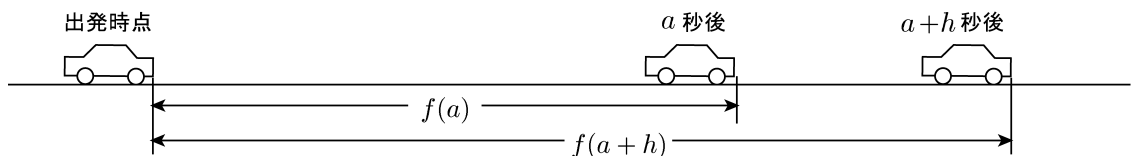
$$\frac{4.9 \times b^2 - 4.9 \times a^2}{b - a} = \frac{4.9(b^2 - a^2)}{b - a} = 4.9(a + b)(\text{m/s})$$

である。



例 3 例 1 の車は常に 50(km/h) で走っているわけではない。信号があれば止まるし、50(km/h) 以上の速さを出すこともある。実際に車に乗ってスピードメーターを見ると、スピードメーターで表示される速さは刻一刻と変わっている。このようなスピードメーターで表示される各時刻での速さを**瞬間の速さ**といい、**平均の速さ**と区別する。

瞬間の速さを直線の上を走る車の例で説明する。出発時点から x 秒後までに走った距離を $f(x)$ とする。



a 秒後から $a+h$ 秒後までの平均の速さは $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ である、**瞬間**というのは**時間間隔がゼロ**ということであるから、時間間隔 h を 0 (ゼロ) に近づけたときの平均の速さの極限で瞬間の速さを計算する。

$$a \text{ 秒後の瞬間の速さ} = \lim_{h \rightarrow 0} (a \text{ 秒後から } a+h \text{ 秒後までの平均の速さ}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

例 4 例 2 の場合、 x 秒後の落下距離は $f(x) = 4.9x^2$ である。このとき a 秒後の瞬間の速さは

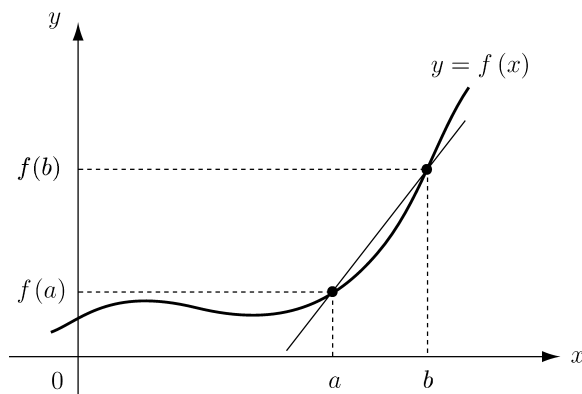
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4.9(2a+h) = 9.8a \text{ (m/s)}$$

である。

< 微分係数 >

関数 $y = f(x)$ において、 x の値が a から b まで変化するとき、 y の変化量 $f(b) - f(a)$ の、 x の変化量 $b - a$ に対する割合

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} \quad \dots (1)$$



を、 x が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率という。

平均変化率は平均の速さを一般化したものである。

この平均変化率 (1) において、 a の値を定め、 b を a に限りなく近づけると、(1) がある一定の値 α に限りなく近づく場合、この値 α を、関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい、 $f'(a)$ で表す。

$$\boxed{f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}} \quad \dots (2)$$

ここで $b - a = h$ とおくと $b = a + h$ となり、 $b \rightarrow a$ と $h \rightarrow 0$ は同値であるから (2) は次のように表すことができる。

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}} \quad \dots (3)$$

微分係数 (3) は瞬間の速さを一般化したものである。

例 $f(x) = x^2$ のとき

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2
 \end{aligned}$$

問 $f(x) = x^2$ のとき $f'(2)$ および $f'(a)$ を求めよ。

< 接線の傾き 1 >

図 1 のように放物線上の 1 点 A を通る直線と放物線との共有点の個数は 1 または 2 である。共有点が 1 点である直線を接線という。

図 2 のように、一般のなめらかな曲線 $y = f(x)$ 上の 1 点 A を通る直線を考える。

点 A の近くで、曲線との共有点が 1 点 A だけである直線を、点 A における接線という。

この接線の傾きを求めたい。

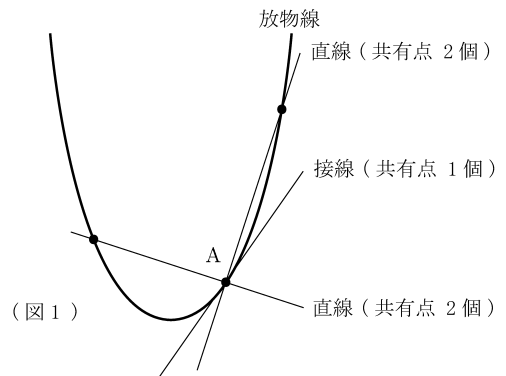
点 A の x 座標を a とする。また曲線上の点で、 x 座標が $a + h$ である点を B とする。

このとき点 A の座標は $(a, f(a))$ であり、点 B の座標は $(a + h, f(a + h))$ となる。

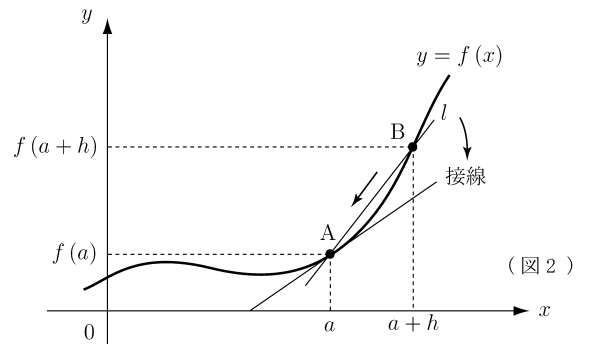
2 点 A, B を通る直線を l とする。点 A を固定し、 h を 0 に近づけると点 B は点 A に近づく。このとき直線 l は接線に近づく。すなわち $h \rightarrow 0$ のとき $l \rightarrow$ 接線 であるから

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} l \text{ の傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

が得られる。従って微分係数 $f'(a)$ は 曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線の傾き を表す。



(図 1)



(図 2)

例 $f(x) = x^2$ のとき、前ページの結果より

$$f'(a) = 2a$$

である。よって $f'(1) = 2, f'(2) = 4$ だから

$x = 1$ における接線の傾きは 2

$x = 2$ における接線の傾きは 4

である。(右図参照)

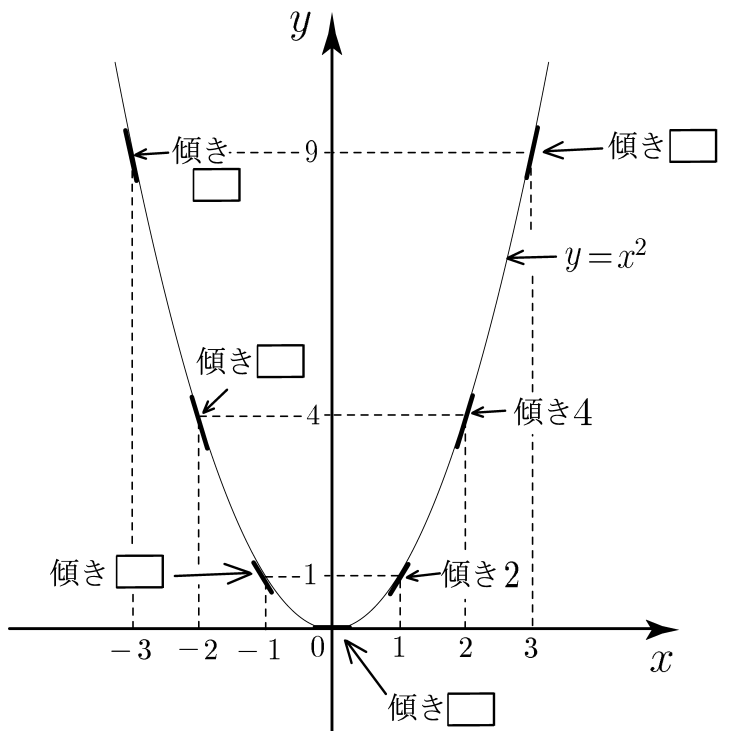
例 $f(x) = x^2$ のとき、

$$f'(3) \quad , \quad f'(0) \quad , \quad f'(-1)$$

$$f'(-2) \quad , \quad f'(-3)$$

の値を求め、右図の□内に

接線の傾きの値を入れよ。



< 接線の傾き 2 >

2 ページの結果より

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1} \quad , \quad \textcircled{2} \quad \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0}$$

が成り立つ。

$$\text{(注)} \quad \textcircled{1} \text{ より } f(x) = \sin x \text{ のとき } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

であるから、 $y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きが $f'(0) = 1$ であることを意味する。

$$\textcircled{2} \text{ より } f(x) = \cos x \text{ のとき } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

であるから、 $y = \cos x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きが $f'(0) = 0$ であることを意味する。**例題** 曲線 $y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における接線の傾きを求めよ。**解** $f(x) = \sin x$ とおくと、 $x = \frac{\pi}{3}$ における接線の傾きは $f'(\frac{\pi}{3})$ だから

$$\begin{aligned} f'(\frac{\pi}{3}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + h) - \sin(\frac{\pi}{3})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cos h + \cos \frac{\pi}{3} \sin h - \sin \frac{\pi}{3}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin \frac{\pi}{3})(\cos h - 1) + (\cos \frac{\pi}{3})(\sin h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{(\sin \frac{\pi}{3})(\cos h - 1)}{h} + \frac{(\sin \frac{\pi}{3})(\sin h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) \times \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) \times \frac{\sin h}{h} \right\} = \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) \times 0 + \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) \times 1 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

問 1 曲線 $y = \sin x$ の $x = a$ における接線の傾きを求めよ。**問 2** 曲線 $y = \cos x$ の $x = a$ における接線の傾きを求めよ。

< 導関数 1 >

関数 $f(x)$ の定義域内の値 a に対して、関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を対応させる関数を、 $f(x)$ の導関数といい、 $f'(x)$ で表す。

導関数 $f'(x)$ は次式で定義される。

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \quad (\text{導関数の定義})$$

例 1 $f(x) = 1$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0$$

例 2 $f(x) = x^3$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

問 $f(x)$ が次の各場合に、導関数の定義に従って (極限の計算で) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 2$

$$f'(x) =$$

(2) $f(x) = x$

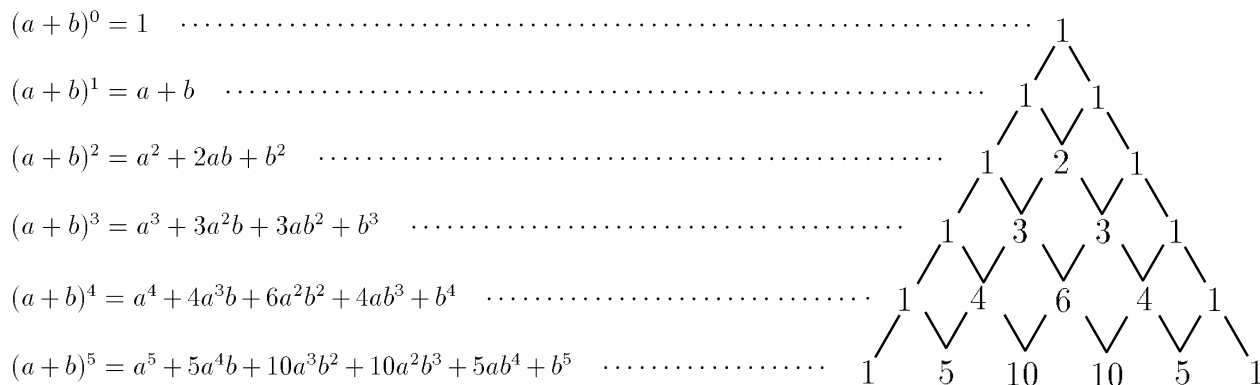
$$f'(x) =$$

(3) $f(x) = x^2$

$$f'(x) =$$

< 導関数 2 >

$(a + b)^n$ の展開式の係数を右のように並べたものをパスカルの三角形という。



問 1 $f(x)$ が次の各場合に、導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ にしたがって、
 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^4$

$f'(x) =$

(2) $f(x) = x^5$

$f'(x) =$

問 2 自然数 n に対し $f(x) = x^n$ とする。問 1 の結果から $f'(x)$ を類推せよ。

< 導関数 3 >

例 $f(x) = \sqrt{x}$ の導関数を定義に従って求める。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \times (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \times (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(注) 関数 $f(x)$ からその関数 $f'(x)$ を求めることを、 $f(x)$ を微分するという。

問 次の関数を、定義に従って微分せよ。

(1) $f(x) = \sqrt{x+1}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$

(3) $f(x) = \sin x$

(4) $f(x) = \cos x$

< 導関数 4 >

例 8 ページで類推したように $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ である。これを

$$(*) \quad \boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

と略記する。

また 2 つの微分可能な関数 $f(x), g(x)$ および定数 k に対して次の式が成立する。

1. $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ (k は定数)
2. $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$
3. $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

< 1 の証明 >

$$\{kf(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{kf(x+h)\} - \{kf(x)\}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \times f'(x)$$

< 2 の証明 >

$$\begin{aligned} \{f(x) + g(x)\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

問 1 公式 3 を証明せよ。

例 $y = 4x^3 + 5$

$$y' = \{4x^3 + 5\}' = (4x^3)' + (5)' = 4 \times (x^3)' + 0 = 4 \times 3x^2 = 12x^2$$

(注) 定数を微分すると 0 になる。

問 2 公式 (*) と 1~3 を用いて次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^5 + 4$

(2) $y = 2x^6 - 3x^3$

(3) $y = (x - 1)^2$

(4) $y = (x + 1)(x^2 - x)$

< 積の微分 1 >

$f(x), g(x)$ が共に微分可能であるとき, 次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\{f(x) \times g(x)\}' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)} \quad (\text{積の微分})$$

< 証明 >

$$\begin{aligned} \{f(x) \times g(x)\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \times g(x+h) + f(x) \times \left\{ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \right] \\ &= f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

例 1 $y = x^3 \sin x$

$$\begin{aligned} y' &= \{x^3 \sin x\}' = (x^3)' \times \sin x + x^3 \times (\sin x)' \\ &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x \end{aligned}$$

例 2 $y = (x+1)^2$

$$y' = \{(x+1)^2\}' = \{(x+1)(x+1)\}' = (x+1)' \times (x+1) + (x+1) \times (x+1)' = 2(x+1)$$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x-1) \sin x$

(2) $y = (x^2 + 1) \cos x$

(3) $y = \sin x \cos x$

(4) $y = (x+1)^4$

< 積の微分 2 >

問 1 8 ページ例の結果より $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ である。これと積の微分を用いて

次式を微分せよ。ただし k は定数とする。

(1) $y = x\sqrt{x}$

(2) $y = k\sqrt{x}$

問 2 積の微分公式 $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$ を用いて、

定数倍の微分公式 $(k \times f(x))' = k \times f'(x)$ を証明せよ。ここで k は定数とする。

問 3 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ がともに微分可能であるとき、3 つの積の導関数を

$f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を用いて表せ。

$$(f(x)g(x)h(x))' =$$

< 商の微分 >

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の商の導関数について、次の公式が成り立つ。

$$1. \quad \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$2. \quad \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

< 2 の証明 >

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x) - f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x)}{h} - \frac{f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h}}{g(x+h)g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)g(x) - f(x)\left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{g'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

問 1 公式 2 を用いて公式 1 を証明せよ。

例 (1) $y = \frac{1}{x^3}$, $y' = -\frac{(x^3)'}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$

(2) $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)' \times (x-1) - x^2 \times (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{x^2}$

(2) $y = \frac{1}{x^4}$

(3) $y = \frac{x^3}{x+1}$

(4) $y = \frac{x}{\sin x}$

< 三角関数の微分 >

次が成り立つ.

$$1. \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$2. \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$3. \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問 1 1 と 2 の結果と商の微分公式を用いて, 3 を証明せよ。

問 2 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = 3 \sin x + 4 \cos x$$

$$(2) y = -3 \cos x + 5 \tan x$$

$$(3) y = (x + \sin x) \cos x$$

$$(4) y = \sin^2 x$$

$$(5) y = \cos^2 x$$

$$(6) y = x \tan x$$

$$(7) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$(8) y = \frac{\cos x}{x}$$

問 3 次の導関数を計算し, 結果を $\sin x$ または $\cos x$ を用いてあらわせ。

$$(1) y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(2) y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$(3) y = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

< 微分の練習 1 >

問 1 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$

問 2 次の関数を導関数の定義に従って微分せよ。

(1) $f(x) = 4$

(2) $f(x) = x^3$

(3) $f(x) = \sqrt{3x}$

(4) $f(x) = \frac{5}{x}$

(5) $f(x) = 2 \sin x$

(6) $f(x) = 3 \cos x$

問 3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 4x^3 - 6x^5 - 18$

(2) $y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

(3) $y = 5 \sin x + 6 \cos x$

(4) $y = 3 \sin x - 4 \tan x$

(5) $y = x^2 \sin x$

(6) $y = x^3 \cos x$

(7) $y = \sin x \tan x$

(8) $y = \frac{x}{x+1}$

(9) $y = x^4 \tan x$

(10) $y = \frac{\sin x}{x^2}$

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す (全て同じ意味である)。 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の

導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。変数が x 以外の文字で

も同様である。例えば変数 u の関数 $y = f(u)$ の導関数を

$$y' = f'(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} = \frac{dy}{du} = \frac{df}{du} = \frac{d}{du}f(u)$$

等の記号で表す。

例 1

$$y = x^5 - 3x^2 \text{ のとき} \quad \frac{dy}{dx} = 5x^4 - 6x$$

$$s = u^5 - 3u^2 \text{ のとき} \quad \frac{ds}{du} = 5u^4 - 6u$$

$$k = t^5 - 3t^2 \text{ のとき} \quad \frac{dk}{dt} = 5t^4 - 6t$$

例 2

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{du} \sin u = \cos u$$

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

問 1 次の関数の導関数を求めよ。

$$(1) y = x^3 - 4x^2 + 5 \quad \frac{dy}{dx} = \quad (2) y = \cos u \quad \frac{dy}{du} =$$

$$(3) \ell = 3t^2 - 2t \quad \frac{d\ell}{dt} = \quad (4) S = \pi r^2 \quad \frac{dS}{dr} =$$

$$(5) V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \frac{dV}{dr} =$$

問 2 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dx} x^5 \quad (2) \frac{d}{dt} (t^7 - 5t^4)$$

$$(3) \frac{d}{du} \sqrt{u} \quad (4) \frac{d}{dt} \cos t$$

$$(5) \frac{d}{du} \tan u \quad (6) \frac{d}{du} \sin u \cos u$$

< 微分と極限 1 >

関数 $f(x)$ の導関数の極限による定義式は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。変数が x でなく、他の文字でも同様である。

$$f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$f'(u) = \frac{d}{du}f(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h}$$

例

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^4 - t^4}{h} = \frac{d}{dt}(t^4) = 4t^3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(u+h) - \sin u}{h} = \frac{d}{du}(\sin u) = \cos u$$

問 次の極限值を微分の公式を使って求めよ。

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(u+h) - \cos u}{h}$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(r+h) - \tan r}{h}$$

< 微分と極限 2 >

関数 $f(x)$ の導関数の極限による定義式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{f(x+\ell) - f(x)}{\ell}$$

ここで、0 へ収束する変数は h だけでなく ℓ でも良いし、他の文字を使っても良い。

例

$$(1) \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\ell) - \sin x}{\ell} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(t+h) - \cos t}{h} = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$$

$$(3) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tan(u+r) - \tan u}{r} = \frac{d}{du}(\tan u) = \frac{1}{\cos^2 u}$$

問 次の極限值を微分の公式を使って求めよ。

$$(1) \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\cos(x+\ell) - \cos x}{\ell}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(u+h) - \sin u}{h}$$

$$(3) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(u+r)^4 - u^4}{r}$$

$$(4) \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(t+v)^6 - t^6}{v}$$

$$(5) \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\tan(t+\ell) - \tan t}{\ell}$$

< 合成関数の微分 1 >

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数 $f(g(x))$ の導関数は $u = g(x)$ とおくと

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{ \frac{d}{du}f(u) \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}g(x) \right\}$$

で計算される。

< 証明 >

$$u = g(x) \quad , \quad g(x+h) - g(x) = \ell \quad \text{とおくと}$$

$$h \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad \ell \rightarrow 0 \quad \text{であり,} \quad g(x+h) = g(x) + \ell = u + \ell \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+\ell) - f(u)}{\ell} \times \frac{\ell}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \ell \rightarrow 0}} \frac{f(u+\ell) - f(u)}{\ell} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{f(u+\ell) - f(u)}{\ell} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \left\{ \frac{d}{du}f(u) \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}g(x) \right\} \quad \text{(証明終)} \end{aligned}$$

例 $\sin(x^3)$ の導関数を求めたい。 $u = x^3$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\sin(x^3) = \left\{ \frac{d}{du}\sin u \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}x^3 \right\} = \cos(u) \times 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$$

問 次を求めよ。

(1) $\frac{d}{dx}\cos(x^4)$

(2) $\frac{d}{dx}\tan(x^5)$

< 合成関数の微分 2 >

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{ \frac{d}{du}f(u) \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}g(x) \right\}} \quad (\text{ただし } u = g(x))$$

例 1 $\sin(4x + 3)$ の導関数を求めたい。 $u = 4x + 3$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(4x + 3) &= \left\{ \frac{d}{du} \sin u \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx} (4x + 3) \right\} = \cos(u) \times 4 \\ &= 4 \cos u = 4 \cos(4x + 3) \end{aligned}$$

例 2 $\cos(x^2 + x^3)$ の導関数を求めたい。 $u = x^2 + x^3$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos(x^2 + x^3) &= \left\{ \frac{d}{du} \cos u \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + x^3) \right\} = -\sin(u) \times (2x + 3x^2) \\ &= -(2x + 3x^2) \sin u = -(2x + 3x^2) \sin(x^2 + x^3) \end{aligned}$$

問 次を求めよ。

(1) $\frac{d}{dx} \sin(5x)$

(2) $\frac{d}{dx} \cos(7x)$

(3) $\frac{d}{dx} \sin(4x - 5)$

(4) $\frac{d}{dx} \cos(2x + 3)$

(5) $\frac{d}{dx} \tan(8x - 7)$

(6) $\frac{d}{dx} \sin(x^3 + 2x^4)$

< 合成関数の微分 3 >

合成関数 $f(g(x))$ の微分公式

$$(*) \quad \boxed{\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{ \frac{d}{du}f(u) \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}g(x) \right\}} \quad (\text{ただし } u = g(x))$$

は $y = f(g(x))$, $u = g(x)$ とおくと $y = f(u)$ より

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{du}f(u) = \frac{dy}{du}, \quad \frac{d}{dx}g(x) = \frac{du}{dx}$$

と書ける。従って、公式 (*) は

$$(*)' \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

と書きなおせる。この (*)' 式の方がおぼえやすい。

例 $y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。 $u = x^3 + 5x^2$ とおくと、 $y = u^7$ より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{d}{du}y \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}u \right\} = \left\{ \frac{d}{du}(u^7) \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}(x^3 + 5x^2) \right\} = (7u^6) \times (3x^2 + 10x) \\ &= 7(3x^2 + 10x)u^6 = 7(3x^2 + 10x)(x^3 + 5x^2)^6 \end{aligned}$$

問 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = (3x + 4)^5 \quad \frac{dy}{dx} =$$

$$(2) \quad y = (4x - 5)^{10} \quad \frac{dy}{dx} =$$

$$(3) \quad y = (x^2 + 3x)^6 \quad \frac{dy}{dx} =$$

$$(4) \quad y = \cos(x^2 - 3x) \quad \frac{dy}{dx} =$$

< 微分の練習 2 >

問 1 次の導関数を求めよ。ただし n は自然数である。

$$(1) \frac{d}{dx}(4x^5 - 7x^9 + 12) \qquad (2) \frac{d}{dt}(4t^2 - 8t + 5)$$

$$(3) \frac{d}{du}(\sin u) \qquad (4) \frac{d}{du}(\cos u)$$

$$(5) \frac{d}{du}(\tan u) \qquad (6) \frac{d}{du}(u^n)$$

問 2 合成関数の微分法を用いて次の導関数を求めよ。

$$(1) y = \sin(x^2) \qquad (2) y = \cos(x^3)$$

$$(3) y = \tan(x^4) \qquad (4) y = \sin(2x - 3)$$

$$(5) y = \cos(3x + 5) \qquad (6) y = \tan(7x + 6)$$

$$(7) y = \sin(x^2 + 2x) \qquad (8) y = (3x + 4)^6$$

$$(9) y = (4x - 3)^7 \qquad (10) y = (5x + 8)^{10}$$

$$(11) y = (x^2 - 3x)^5 \qquad (12) y = (1 + \sin x)^8$$

$$(13) y = (2 + \cos x)^9$$

問 3 合成関数の微分法と積の微分法を用いて、次の関数を微分せよ。

$$(1) y = x^2 \sin(4x) \qquad (2) y = x^3 \cos(5x) \qquad (3) y = \sin(2x) \cos(3x)$$

問 4 3つの関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ に対し、次式の導関数を求めよ。

$$(1) f(x) \{g(x) - h(x)\} \qquad (2) f(g(h(x))) \qquad (3) \frac{f(x)h(x)}{g(x)}$$

< ネピアの数 >

a を 1 でない正の数とするとき、対数関数 $\log_a x$ の導関数を求めたい。導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ に従って計算する。}$$

$$(\log_a x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)$$

ここで $\frac{h}{x} = k$ とおくと $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ より

$$(\log_a x)' = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{xk} \log_a(1+k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

となる。そこで $k \rightarrow 0$ のときの $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の極限を調べてみる。 k に 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ... および -0.1, -0.01, -0.001, -0.0001, ... を代入して、 $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値を計算すると、次の表が得られる。

k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$	k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$
0.1	2.59342...	-0.1	2.867971...
0.01	2.704813...	-0.01	2.731999...
0.001	2.716923...	-0.001	2.719642...
0.0001	2.718145...	-0.0001	2.718417...
0.00001	2.718268...	-0.00001	2.718295...

この表から予想されるように、 $k \rightarrow 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に近づく。この極限値を e で表す。

$$e = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$$

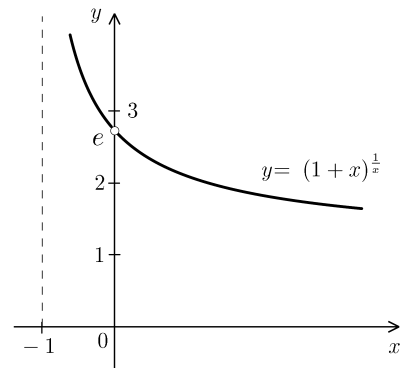
e は無理数で、その値は

$$e = 2.71828182845 \dots$$

であることが知られている。 e をネピアの数

または自然対数の底という。右図は $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ の

グラフである。



問 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(3) $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \log_a(1+k)$

< 対数関数の導関数 >

例 関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。定義 (P.4) から

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_{10}(2+h) - \log_{10} 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_{10} \left(\frac{2+h}{2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_{10} \left(1 + \frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで $\frac{h}{2} = k$ とおくと、 $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ より

$$f'(2) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2k} \log_{10}(1+k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} \log_{10}(1+k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \log_{10} e$$

(注) ここで前のページの結果 $\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$ を使った。

問 1 例と同じ関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(3)$ と導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。

(1) $f'(3) =$

(2) $f'(x) =$

問 2 a を 1 でない正の数とする。 $f(x) = \log_a x$ の導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。

$f'(x) =$

< 自然対数 >

問 1 前ページの問の結果を用いて次の対数関数の導関数を求めよ。(ただし $a > 0, a \neq 1$)

(1) $(\log_{10} x)' =$

(2) $(\log_a x)' =$

問 2 底が e (ネピアの数 ≈ 2.718) である対数関数 $\log_e x$ の導関数を求め、できるだけ簡単にせよ。

(答) $(\log_e x)' =$

底がネピアの数 e である対数 $\log_e x$ を **自然対数** と呼び、底を省略する。

$\log_e x = \log x$	(自然対数)
---------------------	--------

今後底を省略した対数 $\log x$ は必ず自然対数を意味する。

(注) 常用対数 $\log_{10} x$ と区別するため、自然対数を $\ln x$ と書くこともある。

例 $\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$ $\ln \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \frac{1}{2}$
 $\log\left(\frac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\frac{1}{e^2}\right) = \log_e(e^{-2}) = -2$ $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2$

問 3 次の自然対数の値を求めよ。

(1) $\log e$ (2) $\log(\sqrt[3]{e})$ (3) $\log\left(\frac{1}{e}\right)$ (4) $\log 1$

(5) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ (6) $\ln(\sqrt[4]{e})$ (7) $\ln(e)$ (8) $\ln(e\sqrt{e})$

問 4 問 2 の結果を使って自然対数の導関数を求めよ。

$(\log x)' =$

$(\ln x)' =$

問 5 $y = \log x$ のグラフを描け。

< log f(x) の導関数 >

例 関数 $y = \log(x^2 + 3x + 4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^2 + 3x + 4$ とおくと $y = \log u$ となる。

合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\log u) \times \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 4) = (\log u)' \times (x^2 + 3x + 4)' \\ &= \frac{1}{u} \times (2x + 3) = \frac{1}{x^2 + 3x + 4} \times (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4} \end{aligned}$$

問 1 例にならって、次の関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y = \log(x^3 + 2x - 5)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(2) $y = \log(1 + \sin x)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(3) $y = \log(5 - \cos x)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

問 2 上の結果から、一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し合成関数 $y = \log(f(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = (\log(f(x)))'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)

$(\log(f(x)))' =$

例 2 $(\log(\cos x))' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

問 3 問 2 の結果を用いて次の導関数を求めよ。

(1) $(\log(x^2 + 2x))'$

=

(2) $(\log(x^6 + 3x^4))'$

=

(3) $(\log(\sin x))'$

=

< 指数関数の導関数 1 >

23 ページの結果から

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。この極限式①より

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1} \quad \dots \textcircled{2}$$

が導かれる。

< ②式の証明の概略 >

$$\textcircled{1} \text{式より } h \doteq 0 \text{ のとき } e \doteq (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

である。両辺を h 乗すると

$$h \doteq 0 \text{ のとき } e^h \doteq 1+h$$

$$\text{だから } h \doteq 0 \text{ のとき } \frac{e^h - 1}{h} \doteq 1$$

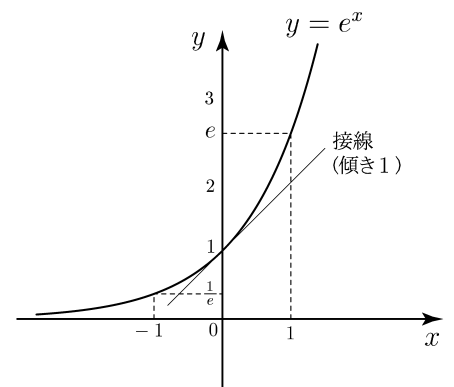
より②式が導かれる。

(注) 指数関数 $f(x) = e^x$ に対し、

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

より、曲線 $y = e^x$ の $x = 0$ における接線の

傾きが $f'(0) = 1$ であることが②式からわかる。



例 $f(x) = e^x$ に対し

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2+h} - e^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^2 \times e^h - e^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^2 \times \frac{e^h - 1}{h} = e^2 \times 1 = e^2 \end{aligned}$$

問 $f(x) = e^x$ に対し、微分係数 $f'(3)$ および導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f'(3) =$

(2) $f'(x) =$

< 指数関数の導関数 2 >

前のページの結果より、ネピアの数 e を底とする指数関数 $f(x) = e^x$ の導関数は $f'(x) = e^x$ である。すなわち

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x}$$

このように微分しても変わらない関数は e^x の定数倍だけである。そこでこの指数関数を特に $e^x = \text{EXP}(x)$ という記号で表すことがある。

例 1 $y = e^{5x}$ の導関数を求めたい。 $u = 5x$ とおくと $y = e^u$ より合成関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{d}{du}e^u \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}(5x) \right\} = e^u \times 5 = 5e^{5x}$$

例 2 $y = e^{x^2}$ の導関数を求めたい。 $u = x^2$ とおくと $y = e^u$ より合成関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{d}{du}e^u \right\} \times \left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \right\} = e^u \times 2x = 2xe^{x^2}$$

問 1 次の関数を微分せよ。ただし a, K は定数で $a > 0, a \neq 1$ とする。

(1) $y = e^{2x} \quad \frac{dy}{dx} =$

(2) $y = e^{-3x} \quad \frac{dy}{dx} =$

(3) $y = e^{2x-1} \quad \frac{dy}{dx} =$

(4) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \frac{dy}{dx} =$

(5) $y = e^{Kx} \quad \frac{dy}{dx} =$

(6) $y = e^{x \log a} \quad \frac{dy}{dx} =$

問 2 $a > 0, a \neq 1$ とする。このとき等式 $a = e^{\log a}$ が成立する。ただし $\log a = \log_e a$ は自然対数である。この等式を用いて、一般の指数関数 $y = a^x$ の導関数を求めよ。

< 逆関数の微分 1 >

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数は次式で与えられる。

$$(*) \quad \boxed{\frac{d}{dx}\{f^{-1}(x)\} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\{f(y)\}}} \quad (\text{ただし } y = f^{-1}(x))$$

<証明> $y = f^{-1}(x)$, $\ell = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)$ とおくと

$\ell = f^{-1}(x+h) - y \Rightarrow y + \ell = f^{-1}(x+h)$ となる。ここで逆関数の定義から

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y + \ell = f^{-1}(x+h) \Leftrightarrow x+h = f(y+\ell) \quad \dots \textcircled{2}$$

② - ① より

$$h = f(y+\ell) - f(y)$$

また $h \rightarrow 0$ のとき $\ell = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x) \rightarrow 0$ となる。導関数の定義から

$$\frac{d}{dx}\{f^{-1}(x)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ell}{f(y+\ell) - f(y)}$$

$$= \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(y+\ell) - f(y)}{\ell}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\{f(y)\}} \quad (\text{証明終})$$

(注) $y = f^{-1}(x)$ とおくと $x = f(y)$ であり $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dy}f(y) = \frac{dx}{dy}$ より上の

公式 (*) は次式 (**) のように書ける。この (**) 式の方が覚えやすい。

$$(**) \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}} \quad (\text{逆関数の微分公式})$$

例 $y = \sqrt[3]{x}$ の導関数を求めたい。 $x = y^3$ より

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}x} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^3)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

問 次の導関数を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$

(2) $y = \sqrt[4]{x}$

< 逆関数の微分 2 >

例 逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。ここで定義域は $-1 \leq x \leq 1$, 値域は $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 $x = \sin y$ より

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} x} = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin y} = \frac{1}{\cos y}$$

ここで $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ で, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ だから $\cos y \geq 0$ より

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

だから

$$\text{(答)} \quad \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

問 1 $y = \cos^{-1} x$ の導関数を求めよ。ただし $\cos^{-1} x$ の定義域は $-1 \leq x \leq 1$, 値域は $0 \leq y \leq \pi$ とする。

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x =$$

問 2 $y = \tan^{-1} x$ の導関数を求めよ。ただし $\tan^{-1} x$ の定義域は実数全体, 値域は $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ とする。

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x$$

< 対数微分法 1 >

一般の関数 $y = f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$

の導関数は (26 ページの結果より)

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{であるから,} \quad \frac{d}{dx} \log y = \frac{y'}{y}$$

(注) $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$

例 指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を次のようにして求める。

Step1. 両辺の自然対数をとる

$$\log y = \log(2^x) = x \log 2$$

Step2. 両辺を x で微分する

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x \log 2)$$

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

(注) このように両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1 $y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 2 $a > 0$ ($a \neq 1$) に対し、 $y = a^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 3 $y = x^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

< 対数微分法 2 >

例 $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($= \sqrt{x^3}$) の導関数を対数微分法で求める。

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

Step1. 両辺の自然対数をとる

$$\log y = \log \left(x^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{3}{2} \log x$$

Step2. 両辺を x で微分する

$$\frac{d}{dx} \log y = \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2} \log x \right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

より

$$y' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\left(x^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \quad \left(= \frac{3}{2} \sqrt{x} \right)$$

問 1 $y = x^{\frac{4}{3}}$ ($= \sqrt[3]{x^4}$) の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $\left(x^{\frac{4}{3}} \right)' =$

問 2 一般の実数 r に対し、関数 $y = x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $(x^r)' =$

< x^r の導関数 >

前のページより任意の実数 r に対し,

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

が成り立つ。

例 1 $y = \sqrt[3]{x^5}$ の導関数を求めたい。分数指数の定義 $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$ から

$$\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

問 1 次の導関数を求め、結果を根号 ($\sqrt{\quad}$, $\sqrt[n]{\quad}$ 等) で表せ。

$$(1) \left(\sqrt[4]{x^5}\right)' = \quad (2) \left(\sqrt[5]{x^7}\right)' = \quad (3) \left(\sqrt{x^3}\right)' =$$

例 2 $y = \frac{1}{x^2}$ の導関数を求めたい。負の指数の定義 $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ から

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2 \times \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$$

問 2 次の導関数を求め、結果を分数の形にせよ。

$$(1) \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \quad (2) \left(\frac{1}{x^4}\right)' = \quad (3) \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

例 3 $(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

問 3 次の導関数を求め、結果を例 3 のように根号で表せ。

$$(1) (\sqrt[4]{x})' = \quad (2) \left(\sqrt[5]{x^4}\right)' = \quad (3) (\sqrt{x})' =$$

例 4 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{3}+1}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

(注) $\sqrt[3]{x^4} = x\sqrt[3]{x}$

問 4 次の導関数を求め、結果を例 4 のように根号で表せ。

$$(1) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' \quad (2) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' \quad (3) \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$

< $\log|x|$ の導関数 >

例 1 関数 $y = \log|x|$ を考える。

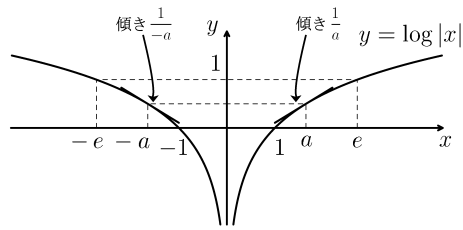
絶対値の定義から、 $a > 0$ に対し

$$\log|-a| = \log a = \log|a|$$

より、 $y = \log|x|$ のグラフは右図

のように y 軸対称となる。

この導関数は



(1) $x > 0$ のとき $|x| = x$ より $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$

(2) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ より $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log(-x) = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

(1), (2) より $x \neq 0$ のとき

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{x}} \text{ となる。}$$

例 2 関数 $y = \log|\cos x|$ を微分したい。

$u = \cos x$ とおくと $y = \log|u|$

より合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{du} \log|u| \right) \times \left(\frac{d}{dx} \cos x \right) = \frac{1}{u} \times (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x) \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \end{aligned}$$

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \log|\tan x|$, $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = \log|x^2 + 3x|$, $\frac{dy}{dx} =$

(3) $y = \log|f(x)|$, $\frac{dy}{dx} =$

< 微分の練習 3 >

問 1 次の極限値を求めよ。ただし e は自然対数の底であり、 $\log x$ は自然対数である。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \log(1+k)$

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$

問 2 $f(x) = \log_2 x$ の導関数 $f'(x)$ を、導関数の定義に従って求めよ。

問 3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 2e^x$

(2) $y = 3 \log x$

(3) $y = \sqrt[3]{x}$

(4) $y = \frac{1}{x^3}$

(5) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(6) $y = e^{4x+1}$

(7) $y = \log(5x)$

(8) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(9) $y = \log(x^3)$

(10) $y = \log|4x|$

(11) $y = \log|\sin x|$

(12) $y = x\sqrt{x}$

(13) $y = e^x \sin x$

(14) $y = e^{3x} \cos(4x)$

(15) $y = xe^{-x}$

(16) $y = x^2 \log|x|$

問 4 次の関数を対数微分法を用いて微分せよ。

(1) $y = 4^x$

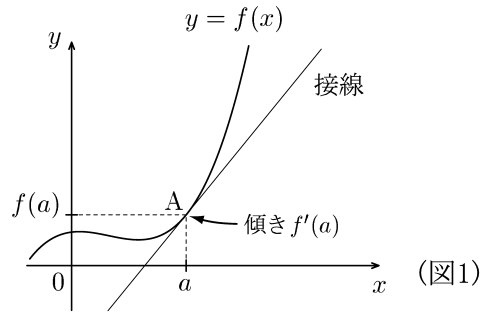
(2) $y = (x+1)^x$

< 微分係数と傾き >

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は $y = f(x)$ のグラフ上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きを表す。



問 1 $f(x) = \sin x$ の導関数および次の微分係数を求め、図 2 の 内に傾きを記入せよ。

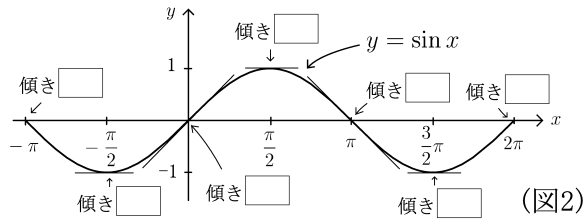
$f'(x) =$

$f'(-\pi) =$ $f'(-\frac{\pi}{2}) =$

$f'(0) =$ $f'(\frac{\pi}{2}) =$

$f'(\pi) =$ $f'(\frac{3}{2}\pi) =$

$f'(2\pi) =$



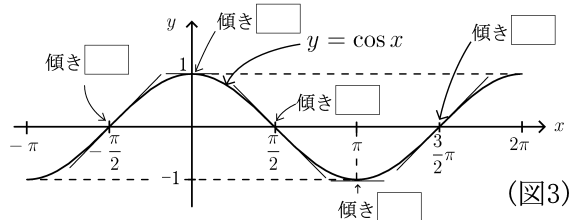
問 2 $f(x) = \cos x$ の導関数および次の微分係数を求め、図 3 の 内に傾きを記入せよ。

$f'(x) =$

$f'(-\frac{\pi}{2}) =$ $f'(0) =$

$f'(\frac{\pi}{2}) =$ $f'(\pi) =$

$f'(\frac{3}{2}\pi) =$



問 3 $f(x) = e^x$ とする。

(1) $f^{-1}(x)$ を求めよ。 $f^{-1}(x) =$

(2) $g(x) = f^{-1}(x)$ とする。以下の導関数および微分係数を求めよ。

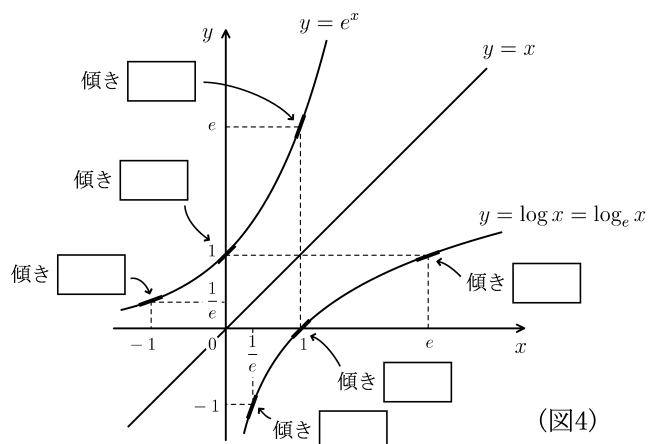
$f'(x) =$ $g'(x) =$

$f'(-1) =$ $g'(\frac{1}{e}) =$

$f'(0) =$ $g'(1) =$

$f'(1) =$ $g'(e) =$

(3) 図 4 の 内に傾きを入れよ。

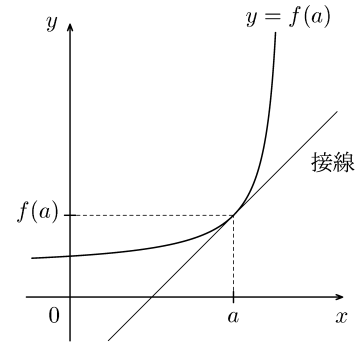


< 接線の方程式 >

$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の方程式は

$$\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)} \quad (\text{接線の方程式})$$

である。



例 1 $y = \log x$ の $x = e$ における接線の方程式を求めよ。

$$f(x) = \log x \text{ のとき } f(e) = \log e = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f'(e) = \frac{1}{e}$$

よって $y = \log x$ の $x = e$ における接線の方程式は

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x \text{ より (答) } \underline{y = \frac{1}{e}x}$$

例 2 $y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{2}$ における接線の方程式を求めよ。

$$f(x) = \cos x \text{ のとき } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

よって $y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{2}$ における接線の方程式は

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \text{ より (答) } \underline{y = -x + \frac{\pi}{2}}$$

問 以下の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 0$ における接線

(2) $y = \log x$ の $x = 1$ における接線

(3) $y = \sin x$ の $x = 0$ における接線

(4) $y = \sqrt{x}$ の $x = 4$ における接線

(5) $y = \frac{1}{x}$ の $x = 1$ における接線

< 関数の増減 1 >

定数 a, b に対して, $a \leq x \leq b$ である実数 x の集合を $\{x : a \leq x \leq b\}$ という記号で書くことにする。

実数の集合

$$\{x : a \leq x \leq b\}, \quad \{x : a < x < b\}, \quad \{x : x \geq a\}, \quad \{x : x < b\}$$

などを, 一般に**区間**という。

例 2次関数 $y = -x^2 + 6x$ のグラフは右図のような放物線である。導関数は

$$y' = -2x + 6 = -2(x - 3)$$

であるから, y' の符号は

$$y' > 0 \Leftrightarrow x < 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow x > 3$$

となり, 次のことがわかる。

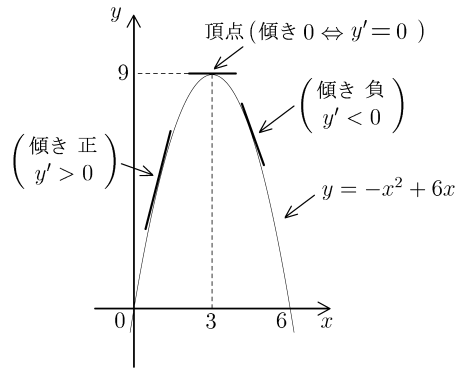
$y' > 0 \Rightarrow$ 傾き正 \Rightarrow この区間 ($x < 3$) で単調増加 (グラフは右上がり ↗)

$y' < 0 \Rightarrow$ 傾き負 \Rightarrow この区間 ($x > 3$) で単調減少 (グラフは右下がり ↘)

$y' = 0 \Rightarrow$ 傾き0 \Rightarrow 頂点 ($x = 3$ のとき $y = 9$)

以上の結果をまとめたのが右の表である。

このような表を**増減表**という。このような増減表を作れば頂点の座標 (3, 9) がわかる。



x	$x < 3$	3	$3 < x$
y'	+	0	-
y	↗	9	↘

問 この関数を微分し, 増減表を作り, 頂点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x + 3$

$y' =$

頂点 (,)

x			
y'			
y			

(2) $y = -2x^2 + 8x - 1$

$y' =$

頂点 (,)

x			
y'			
y			

< 関数の増減 2 >

関数 $y = f(x)$ に対し、その増減は $y' = f'(x)$ の符号によって次のようになる。

$f'(x) > 0$ である区間では $y = f(x)$ は増加 (↗)
$f'(x) < 0$ である区間では $y = f(x)$ は減少 (↘)

例 $y = x^3 - 3x$ の増減を調べる。導関数は

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

である。 $y' = 0$ とおくと $x = \pm 1$ であるから、 y' の符号は

$$y' > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ または } 1 < x \Leftrightarrow y \text{ は増加 (↗)}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow y \text{ は減少 (↘)}$$

となり

$$x = 1 \text{ のとき } y = 1^3 - 3 \times 1 = -2$$

$$x = -1 \text{ のとき } y = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2$$

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗

である。以上をまとめると右の表

のようになる。

なお右の増減表で x 欄は右のほうが x の値が大きい範囲であるように書く。その場合 x の範囲 ($x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x$) を略して ... と書いても良い。

問 次の関数の導関数を求め、増減表を作れ。

(1) $y = -x^3 + 3x^2$

$$y' =$$

x					
y'					
y					

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$y' =$$

x					
y'					
y					

< 極大・極小 1 >

関数 $f(x)$ について、 a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

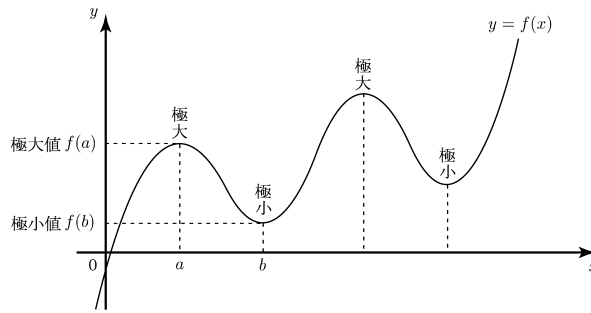
が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で極大になるといい、 $f(a)$ を極大値という。

また、 b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = b$ で極小になるといい、 $f(b)$ を極小値という。

極大値と極小値をまとめて極値という。



例 3次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには、増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき

$y' = 0$ となる。

x	...	1	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	3	↘	2	↗

極大 極小

増減表より

$x = 1$ のとき 極大値 $y = 3$

$x = 2$ のとき 極小値 $y = 2$

であることがわかる。

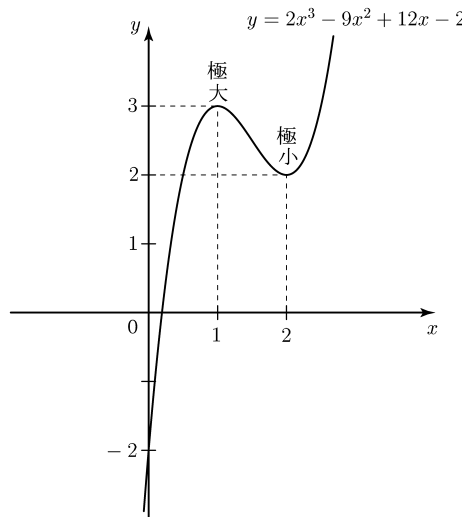
(注) 上の増減表の x の欄の ... は以下の意味である。

x	...	1	...	2	...
-----	-----	---	-----	---	-----

 \iff

x	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x$
-----	---------	---	-------------	---	---------

今後はこのように x の範囲を省略してよい。



問 1 3次関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の増減表を作り、極値を調べよ。

$x =$ のとき極大値 $y =$

$x =$ のとき極小値 $y =$

x	
y'	
y	

< 極大・極小 2 >

例 4 次関数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$

の極値を調べるには、3 次関数と同様に増減表を作ればよい。

微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 3) \\ &= 12x(x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

より、 $x = 0, x = 1, x = 3$ のとき

$y' = 0$ となる。

x	...	0	...	1	...	3	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	8	↗	13	↘	-19	↗

極 極 極
 小 大 小

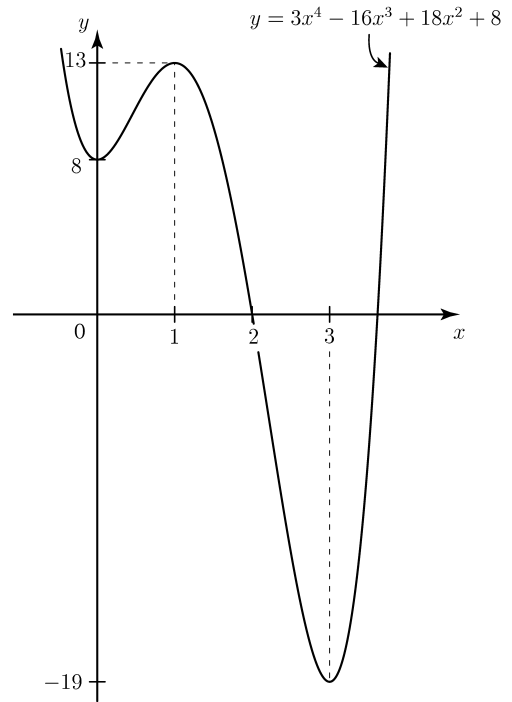
増減表より

$x = 1$ のとき極大値 $y = 13$

$x = 0$ のとき極小値 $y = 8$

$x = 3$ のとき極小値 $y = -19$

であることがわかる。



問 以下の関数の増減表を作り、極値を調べよ。

(1) $y = -x^4 + 2x^2 + 5$

x	
y'	
y	

(2) $y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2$

x	
y'	
y	

< 極大・極小 3 >

例題 $y = x^4 e^{-x}$ の極値を調べよ。

(解) 導関数は積の微分公式により

$$y' = (x^4)' \times e^{-x} + x^4 \times (e^{-x})' = 4x^3 \times e^{-x} + x^4 \times (-e^{-x}) = (4-x)x^3 e^{-x}$$

となる従って $y' = 0$ となる x は $x = 0$ と $x = 4$ である。

増減表は右表のようになるので、

求める極値は次のようになる。

x	...	0	...	4	...
y'	-	0	+	0	-
y	\	0	/	$\frac{256}{e^4}$	\

(答) $x = 4$ のとき極大値 $\frac{256}{e^4}$

$x = 0$ のとき極小値 0

問 次の関数の増減表を作り、極値を調べよ。ただし () 内は定義域である。

(1) $y = e^x - x$

(2) $y = x^2 e^{-x}$

(3) $y = x \log x \quad (x > 0)$

< 関数のグラフ >

問 次の関数を微分し，増減表を作り，極値を調べ，グラフを描け。

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

(2) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 20$

(3) $y = x^2 e^x$

< 最大・最小 1 >

例題 次の関数の最大値と最小値を、指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -1 \leq x \leq 5)$$

(解) 導関数

$$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$$

を求め、 $y' = 0$ とおくと

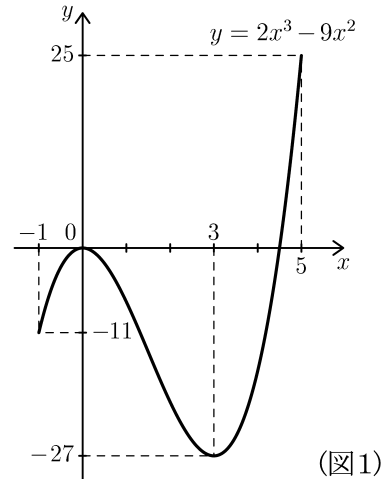
$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } x = 3$$

であるから $-1 \leq x \leq 5$ の範囲で増減表

は次のようになる。

x	-1	...	0	...	3	...	5
y'	\times	+	0	-	0	+	\times
y	-11	\nearrow	0	\searrow	-27	\nearrow	25

この表よりグラフは図 1 のようになるから



(図 1)

(答) $x = 5$ のとき 最大値 $y = 25$ をとり、 $x = 3$ のとき 最小値 $y = -27$ をとる。

(注) 最大や最小は定義域によって違って

くる。たとえば

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -2 \leq x \leq 4)$$

のとき増減表は右表のようになり、

この場合の答えは $x = 0$ のとき 最大値 $y = 0$ 、 $x = -2$ のとき 最小値 $y = -52$ である。

x	-2	...	0	...	3	...	4
y'	\times	+	0	-	0	+	\times
y	-52	\nearrow	0	\searrow	-27	\nearrow	-16

問 次の関数に対し、指定された定義域内で増減表を書き、最大値と最小値を求めよ。

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \quad (\text{定義域 } -1 \leq x \leq 3)$$

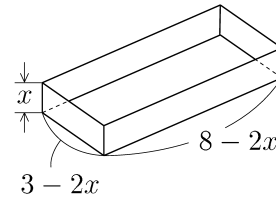
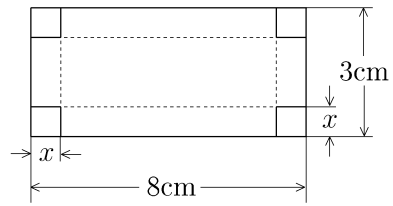
x	-1		3
y'	\times		\times
y			

(答) $x =$ _____ のとき 最大値 $y =$ _____

$x =$ _____ のとき 最小値 $y =$ _____

< 最大・最小 2 >

例題 縦 3cm, 横 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から, 一辺 x cm の正方形を切り取り, 右上図の点線のところを折り曲げて, 右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 y cm³ を最大にするには, 切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか?



(解) 容器の縦は $3 - 2x$ (cm), 横は $8 - 2x$ (cm), 高さは x (cm) だから, 容積 y (cm³) は

$$y = (3 - 2x)(8 - 2x)x = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

である。題意より $x > 0$ でしかも $2x < 3$ であるから, x の範囲は $0 < x < \frac{3}{2}$ である。

この範囲内で増減表を作り, y の最大値を求める。 y を微分すれば

$$y' = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x - 2)(x - 3)$$

でかつ,

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$y = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{27}$$

より, 増減表は右のようになる。よって

(答) $x = \frac{2}{3}$ (cm) のとき, 最大容積 $y = \frac{200}{27}$ (cm³) をとる。

x	0	...	$\frac{2}{3}$...	$\frac{3}{2}$
y'	\times	+	0	-	\times
y	0	\nearrow	$\frac{200}{27}$	\searrow	0

問 一辺 4cm の正方形のブリキの板から, 例題と同様にして, ふたのない容器を作るとき, 容器の容積 y (cm³) を最大にするには, 切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか?

x の範囲を求め, その範囲内で増減表を作り, y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	
y'	\times		0		\times
y					

< 微分の応用問題 >

問 1 次の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 1$ における接線

(2) $y = \log x$ の $x = e$ における接線

(3) $y = \sin x$ の $x = \pi$ における接線

(4) $y = \cos x$ の $x = -\frac{\pi}{2}$ における接線

(5) $y = \sqrt{x}$ の $x = 9$ における接線

(6) $y = \frac{1}{x^2}$ の $x = 1$ における接線

問 2 次の関数の導関数を求め、増減表を作り、極値を調べよ。また、グラフを描け。

(1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

(2) $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2$

(3) $y = x^4 e^x$

問 3 縦 9cm, 横 24cm の長方形の板の四角から一辺 x (cm) の正方形をそれぞれ切り取り、折り曲げてふたのない容器を作る。容器の容積 y (cm³) を最大にするには切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか? x の範囲を求め、その範囲内で増減表を作り、 y の最大値を求めよ。

< 付録 1. 数学史年表 BC 600 ~ 0 >

年代	数学史	一般史
BC600	<p>ターレス (BC624~BC542 頃)(ミレトス) (三角形の相似を用いてピラミッドの高さを測る, 初等幾何)</p> <p>ピタゴラス学派 (BC580~BC500 頃) (サモス => クロトン) (三平方の定理, 黄金比, 正多面体, 無理数の発見, 天文学他)</p>	
BC500	<p>ゼノン (BC450 頃) 運動の逆理 (エレア) (空間と時間の無限分割から起こる矛盾)</p> <p>デモクリストス (BC460~BC370) (アブデラ) (原子論、錐の体積を無限小的方法で求める)</p>	<p>ソクラテス (BC470~BC399)</p> <p>プラトン (BC427~BC347)</p>
BC400	<p>エウドクソス (BC408~BC355) (クニドス) (比例論 (分数の原理), 取り尽くし法, 天文学)</p>	<p>アリストテレス (BC384~322)</p> <p>アレクサンダー大王 (BC323 没)</p>
BC300	<p>ユークリッド (BC300 頃) 原論 (アレクサンドリア) (幾何学を公理・公準から厳密に証明した最初の教科書)</p> <p>アルキメデス (BC285~BC212) (シラクサ) (てこの原理, 浮力の原理, 面積・体積の計算法, 円周率 3.14)</p> <p>エラトステネス (BC276~BC194) (アレクサンドリア) (地球の半径を測る, 素数のふるい分け)</p> <p>アポロニオス (BC270~BC190) (ペルガ => アレクサンドリア) (円錐曲線論, 円周率 3.1416)</p>	<p>アリスタルコス 天文学 (BC310~BC230)(サモス) (太陽・地球・月の距離を測る, 地動説)</p>
BC200	<p>ヒッパルコス (BC180~BC125) (ニカイア) (三角法の表を作る, 星図作成)</p> <p>プトレマイオス (BC127~BC151 頃) (アレクサンドリア) (円を 360 度に分割, 三角関数の加法定理)</p>	

< 付録 2. 数学史年表 0 ~ 600 >

年代	数学史	一般史
0		ローマ帝国 (ヨーロッパ)
100	ヘロン (100 頃)(アレクサンドリア) (ヘロンの公式, 測量術) メネラオス (100 頃)(アレクサンドリア) (球面三角法, 天文学)	
200	プトレマイオス・クラウディオス (85~165 頃) (アレクサンドリア) (30 分ごとの正弦表, トレミーの定理 (円に内接する四角形の辺と対角線の関係), 円錐図法, 天文学)	
300	劉徽 (300 頃)(中国) (「九章算術」の注釈, 極限の概念, 円周率 3.14159) パップス (300 頃)(アレクサンドリア) (「数学集成」(幾何学), 三平方の定理の拡張, 1 点と 1 直線からの距離の比が一定な点の軌跡として楕円・放物線・双曲線を分類, 回転曲面の表面積, 回転体の体積)	後漢 (中国) 晋 (中国)
400	祖沖之 (429 頃~500 頃)(中国) ($3.1415926 < \pi < 3.1415927$, 暦法の改訂, 地球の歳差運動に起因する天文定数, 1 回帰年 = 365.2428145 日 (現行との差 46 秒))	東ローマ帝国 (ビザンチン帝国) 南朝 (中国)
500	アールヤバタ (478 頃~550 頃)(インド) (平方根・立方根の求め方, 等差数列・2 乗数列・3 乗数列の和, 比例の計算, 連立一次方程式の解法, 2 次方程式の (正の) 解の公式, 円周率 3.1416, 半弦値の表 (現在の正弦表と同じ)) ボエティウス (480 頃~524 頃)(アテネ) (ラテン語の入門書「算術教程」, 連比の応用問題) アンティミオス (500 頃)(コンスタンティノープル) (放物鏡・楕円鏡の焦点を通る光の軌道, 楕円上の点から二つの焦点までの距離の和は一定)	グプタ朝 (インド) マホメット (アラビア)
600	ブラフマーグプタ (598 頃~660 頃)(インド) (比例の計算, 2 次方程式の解の公式, 正数・負数・ゼロの計算法則)	紙の使用 (中国) 大化の改新 (日本) 木版による印刷 (中国)

< 付録3. 数学史年表 700 ~ 1000 >

年代	数学史	一般史
700	アル・フワーリズミー (780 頃～850 頃) (ペルシャ → バグダード)	イスラム帝国 (アラビア周辺をイスラム教団が支配…アレクサンドリアの図書館・博物館を破壊 → ヨーロッパの科学が衰退)
800	著書1「インド数学による計算法」(インド数字・十進法による位取り記数法の紹介, ゼロ記号の使い方=減法で何も残らないとき, 空白にならないように, 小さな円を書く)(…後世(12世紀)にこの計算法をアラビア式算法(アルゴリズム)と呼ばれた。)	アッバース朝(イスラム帝国)(首都バグダード, ギリシャ・インド等の学術書がアラビア語に翻訳される → アラビアで科学が発展)
	著書2「ジャブルとムカーバラの算法書」(方程式の解法, 測量・遺産分配, ジャブル=負の数を移項して正の項に直す, ムカーバラ=同類項を整理する)(…代数学「アルジェブラ」の語源)	紙幣の使用(中国)
	アル・バッターニー (858 頃～929 頃)(メソポタミアのバスラ)(イスラムの天文学者, 1年 = 365日5時間46分24秒(現在は365日5時間48分46秒), 三角法に正弦(sin), 余弦(cos)のほかに正接(tan), 余接(cot)を使用…ただし最初に導入した人はわからない。)	フランク王国の分裂(西ヨーロッパ) → イタリア・神聖ローマ帝国(ドイツ)・西フランク(フランス)
900	アル・ビールーニー (973～1048)(ウズベキスタン)(天文学, 球面三角法)	宋(中国)
	イブン・ユヌス (1009 没)(エジプトのカイロ)(イスラムの天文学者, 天文表の改訂, 三角比の積を和に直す公式)	
	ジェルベール (940 頃～1003 頃)(フランス)(インド・アラビア数字1～9の紹介)	
	アルハーゼン (=イブヌル・ハイサム)(965 頃～1039 頃)(メソポタミアのハラン) 著書「光学の書」(太陽が地球を照射する範囲, 太陽光線の屈折による薄明かりの時間から大気層の厚さ(約90km)を計算, 球面鏡・放物面鏡・柱面鏡について光源と目の位置から反射する点の位置を計算する)	
1000	分数の表記 インド → アラビア	平安時代末期(日本)(武士(平氏)の台頭)
	$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$	

< 付録 4. 数学史年表 1000 ~ 1500 >

年代	数学史	一般史
1000	<p>ジェルベール (940 頃~1003 頃)(フランス) (インド・アラビア 数字 1~9 の紹介)</p> <p>割り算記号 \div の使用 (アラビア) (発明者不明)</p>	<p>トルコ帝国エルサレムを占領</p> <p>東ローマ帝国十字軍の東征開始</p>
1100	<p>バースカラ II 世 (1114 頃~1185 頃)(インド)</p> <p>著書「ビージャニカ」</p> <p>(代数学, 負の数, 正の数の平方根は正と負の 2 個)</p>	<p>羅針盤の発明 (中国)</p> <p>イタリアの海港都市=地中海</p> <p>貿易で栄える → 「読み, 書き, 算数」の教育熱高まる</p>
1200	<p>フィボナッチ (1180 頃~1250 頃)(イタリアのピサ)</p> <p>著書「算盤の書」(インド・アラビア式の十進位取り記数法 の紹介, 筆算の仕方・分数計算・比例計算・2 次方程式・ 三角法の解説, フィボナッチ数列)</p>	
1300	<p>トーマス・ブラッドワーデン (1290 頃~1349 頃)(イギリス)</p> <p>著書「比例論」「算術概論」「幾何学概論」(正多面体, 星形多角形) 「運動における速度の比例について」</p> <p>ニコル・オレーム (1320 頃~1382 頃)(パリ)</p> <p>(運動論=運動をグラフで表示 (横軸を時間・縦軸を速度), 地球の自転の可能性) 著書「比例論」(分数指数の発明)</p>	<p>マルコ・ポーロ (1254~1324)</p> <p>(イタリア)「東方見聞録」 (1298 頃)</p> <p>ルネサンス (イタリア)</p> <p>ゲーテンベルグ (1390~1468)</p> <p>(ドイツ)(金属活字による印刷)</p>
1400	<p>パチョーリ (1450 頃~1520 頃)(ミラノ)</p> <p>著書「算術・幾何・比および比例大全」(式の記号化, 複式簿記)</p> <p>ヨハネス・ウイッドマン (1489 頃)(ドイツのライプチヒ)</p> <p>著書「全商業のための機敏にして親切な計算」(記号+, -)</p>	<p>コロンブス (1451 イタリア生)</p> <p>(1492 西インド諸島到達)</p> <p>レオナルド・ダ・ビンチ (1452 ~1519)(フィレンツェ)</p> <p>(絵画の遠近法), 実現可能なパラ</p>
1500	<p>クリストル・ルドルフ (1525 頃)(ドイツ)</p> <p>著書「代数学」(平方根の記号)</p>	<p>シュートの絵, ヘリコプター的设计, 毛管現象を注目, 振り子時計の図, ローラーベアリングとローラー</p> <p>製粉器の設計, 西洋式銃の絵を描く。</p>

< 付録5. 数学史年表 1500 ~ 1600 >

年代	数学史	一般史
1500	<p>シピオーネ・デル・フェットロ (1465~1526 頃) (イタリア ボローニア大学教授)(3 次方程式 $x^3 + cx = d$ の解法)</p> <p>タルターリア (1499~1577 頃)(イタリア) (3 次方程式の解法)</p> <p>ロバート・レコード (1510~1556 頃)(イギリス) 著書「知恵の砥石」(代数学、等号=)</p> <p>カルダーノ (1501~1576 頃)(イタリア) (代数学の本「偉大なる術」出版 (1545)…3 次方程式の解 (タルターリアの方法)・4 次方程式の解 (フェラリの方法) の紹介, 負の数, 複素数)</p> <p>フェラリ (1522~1560 頃)(イタリア)(4 次方程式の解法)</p> <p>ボンベリ (1526~1572)(イタリア) (著書「代数学 Algebra」 (1572 出版)…方程式の複素数解, 複素数の演算)</p> <p>フランキスクス・ヴィエタ (1540~1603)(フランス) 著書 「解析法入門」(数式の記号化, 等式の性質, 未知数を母音 の大文字・既知数を子音の大文字で表す)</p> <p>シモン・ステビン (1548~1620)(オランダ) 著書「小数」(1586 出版) (10 進法による分数の表現=小数 表示, 力の平行四辺形の法則, 静水の器底に及ぼす圧力は その深さのみに依存する)</p> <p>ネピア (1550~1617)(スコットランド) 著書「対数の規則 の叙述」(1614 出版)「対数の規則の構成」(1619 出版)</p> <p>オートレット (1578~1660 頃)(イギリス) (計算尺の発明 積の記号 ×)</p>	<p>アメリクス・ヴェスプッチ (新大陸探検 1497~1504)</p> <p>ヴァルトゼーミュラー (新大陸をアメリカと命名 1507)</p> <p>マゼラン (世界一周航海中 1480~1521 フィリピン群島で殺される)</p> <p>コペルニクス (ポーランド) (1473~1543)「天体の回転に ついて」(地動説)(1514 執筆 1543 出版)</p> <p>ティコ・ブラーエ (1546~ 1601)(デンマーク → ブラハ) (天文学, 超新星の発見, 視差 による彗星と地球との距離の 計算 → 彗星が大気中の現象 でないことを示す)</p> <p>ガリレオ・ガリレイ (1564~ 1642)(イタリアのピサ) (自然 落下する物体の落下距離が時間 の 2 乗に比例 → 落下速度は 時間に比例 → 加速度一定, 慣性の法則, 放物運動, 木星 の衛星・金星の満ち欠けの 観測からコペルニクス体系 の正しさを示す)</p>
1600	<p>メルセンヌ (1588~1648)(フランス)…サイクロイド, 完全数</p> <p>デカルト (1596~1650)(フランス) (解析幾何学=図形を座標 平面上の座標で表示, 放物線を 2 次方程式で表す, 軌跡)</p>	<p>ケプラー (1571~1630)(ドイツ → ブラハ)(天文学, 日食と月食 の理論, 惑星運動に関するケプ ラーの法則, 回転体の体積)</p>

< 付録 6 . 数学史年表 1600 ~ 1700 >

年代	数学史	一般史
1600	<p>カヴァリエリ (1598~1647)(ボローニア大学教授) (線の長さの比と面積比, 切断面の面積比と体積比)</p> <p>吉田光由「塵却記」(1627 日本初の算術書)</p> <p>フェルマ (1601~1665)(フランス) (分数乗の関数が表す曲線で囲まれた図形の面積, フェルマの最終定理)</p> <p>ロベルヴァル (1602~1675)(パリ) (サイクロイド。曲線上を運動する物体について, ある瞬間に おける運動の方向は, その点における曲線の接線の方向)</p> <p>N. メルカトル (1620~1689 デンマーク) 対数のべき級数展開</p> <p>ウォリス (1616~1703)(イギリス) ($y = x^n$ と x 軸, y 軸および $x = a$ で囲まれた部分の面積は $a^{(n+1)}/(n+1)$ であることを示した。虚数。分数指数。 運動量保存則)</p> <p>パスカル (1623~1662)(フランス) (円錐曲線論, 流体の圧力伝播, 賭け事の掛け金の分配= 勝つ確率の計算, 組み合わせの数の表=パスカルの三角形)</p> <p>ホイヘンス (1629~1695)(オランダ) (確率と期待値, 振り子時計, 遠心力の発見, 遠心力の大きさは 回転する物体の速度の 2 乗に比例し, 円の半径に逆比例する)</p> <p>関孝和 (日本)1674「発微算法」行列式</p> <p>バロー (1630~1677)(イギリス) (曲線上の接線の (1 次近似による) 決定法)</p>	<p>(日本 1600) 関ヶ原の戦い</p> <p>オランダ 1602 東インド会社設立</p> <p>シェークスピア 1602(英) ハムレット</p> <p>ガリレオ (伊)1609 最初の望遠鏡を作る。 月のクレーター, 土星の輪, 木星の 衛星, 太陽の黒点の発見。</p> <p>ケプラー (独)1609 面積速度一定の法則</p> <p>カッシーニ (伊 1625~1712)(天文学, 火星までの距離, 土星の環)</p> <p>デカルト (仏)「方法序説」1637</p> <p>トリチェリ (伊)1643 真空の実験</p> <p>ホップズ (英)「リヴァイアサン」1651</p> <p>ホイヘンス (蘭)1656 土星衛星タイタン</p> <p>ボイル 1660(アイルランド) 気体の体積 は圧力に反比例</p> <p>ウォリス (英)1668 運動量保存則を提案</p> <p>ルイ 14 世 (仏) ヴェルサイユ宮殿造営</p> <p>ニュートン (英)1669 反対望遠鏡</p> <p>N. ステノ 1669(デンマーク) 化石</p> <p>T. ウイリス (英)1670 糖尿病</p> <p>O. レーマー (1646~1710 デンマーク) 光の速度を測定</p> <p>レーウェンフック (蘭)1683 バクテリア</p> <p>ニュートン 1687「プリンキピア (自然哲 学の数学的原理)」刊 万有引力により, 太陽系の惑星の 運動法則 (ケプラーの法則) を数学的 に説明</p> <p>ライプニッツ 1693(ドイツ) 積と商のできる計算機の発明</p>
1700		

< 付録7. 数学史年表 1700 ~ 1750 >

年代	数学史	一般史
1700	<p>ニュートン (1682~1727)(イギリス)(点の運動の軌跡として曲線を考え、曲線上の接線の傾きを (y 方向の速度) / (x 方向の速度) と定めた。これがニュートン流の微分= 流率法である。面積を求める求積法 (=積分法) は流率法 (=微分法) の逆演算であること (=微分積分学の基本定理) を発見。微分を使った方程式 (微分方程式) からケプラーの法則を数学的に説明。一般二項定理。指数・三角関数の級数展開)</p> <p>ライプニッツ (1646~1716)(ドイツ)(無限小による微分 $(dy)/(dx)$ を定義し、曲線の極大、極小を微分計算で求めた。微分の逆計算として積分を定義し、現在の微分積分学に用いられる数学記号を作った。「座標」、「座標軸」、「関数」、「導関数」等の数学用語も作った。積・商の微分法。陰関数の微分法。微分方程式の変数分離法。行列式。2進法。計算機。)</p> <p>ロピタル (1661~1704 パリ)「無限小数析」 ロピタルの定理はヨハン・ベルヌーイから買った。</p> <p>ヤコブ・ベルヌーイ (1654~1705 スイス) 独立試行の場合の大数の法則。等時曲線がサイクロイドであることを微分方程式により証明</p> <p>ヨハン・ベルヌーイ (1667~1748 スイス) ヤコブの弟 最速降下問題の解としてサイクロイドを定義。懸垂線。 変分法を創始。</p> <p>サッケリー (1667~1733 イタリア) 平行線の公理</p> <p>J.F. リッカティ (1676~1754 イタリア) リッカティ型微分方程式</p> <p>R. コーツ (1682~1716 イギリス) オイラーの公式を最初に発見</p> <p>テイラー (1685~1731 イギリス) テイラー展開</p> <p>マクローリン (1698~1746 スコットランド) 数列の積分収束判定法 マクローリン展開</p> <p>ニコラス・ベルヌーイ (1687~1759 スイス) ベルヌーイ兄弟の甥 完全微分方程式, 全微分。偏微分の微分順序の独立性。</p>	<p>(日 1702) 赤穂浪士 吉良義央を討つ</p> <p>ハーレー (英)1705 彗星の軌道</p> <p>ホークスピー (英)1706 静電気</p> <p>ダービー (英)1709 鉄の製錬にコークスを使用</p> <p>ニューコメン (英)1712 水蒸機関</p> <p>ファーレンハイト (独)1714 水銀温度計</p> <p>ピョートル大帝 (ロシア) 没 1725 同年にペテルブルグ科学アカデミー創設 (ベルヌーイ兄弟やオイラーなどがよばれる)</p> <p>(米 1725) 黒人奴隷約 75000 人</p> <p>G. ブラント (1730 スウェーデン) コバルトの発見</p> <p>ヘールズ (英)1733 血圧の測定</p> <p>ハリソン (英)1735 航海用の時計</p> <p>セルシュウス (1742 スウェーデン) セ氏温度の目盛り</p> <p>B. フランクリン (米)1742 ストーブの発明</p> <p>メンギーニ (伊)1745 血液中に鉄分を発見</p> <p>リンド (英)1747 壊血病の治療に 柑橘類が効果的であることを発見</p>
1750	<p>ド・モアブル (1667~1754)(フランス)(確率, 二項分布の極限, 正規分布)</p>	<p>B. フランクリン (米)1750 避雷針を発明</p>