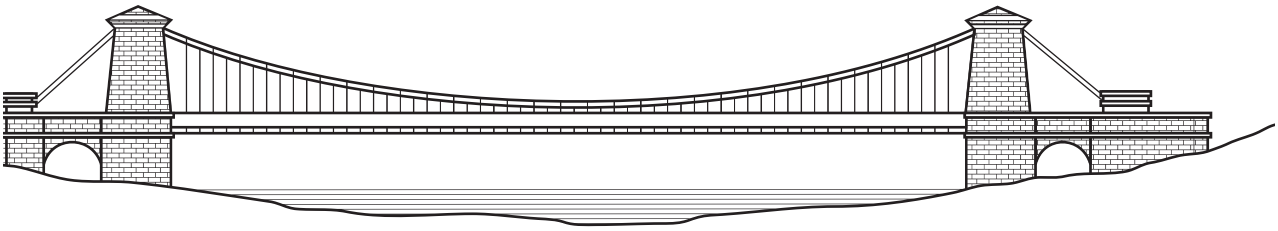
高知工科大学
Kochi University of Technology

基 礎 数 学

（2009年度版）



式の計算，関数
指数・対数，三角関数
合成関数，逆関数，極限

山﨑 和雄，井上昌昭　著

< 数と多項式の計算 >

①　数の表し方

わたしたちは,

一を１０個集めたものを　十

十を１０個集めたものを　百

といっている。このように

１０個集まるごとに位が一つ上がる数の表しかた

のことを十進法という。

例えば,

百が２個，十が４個，一が３個

あるとき，これを 243 と表す。式で書くと,

$$243 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 1$$

となる。

また，百，十，一をそれぞれ図-1 のような四角形で表すと，243 は図 2 のように表せる。

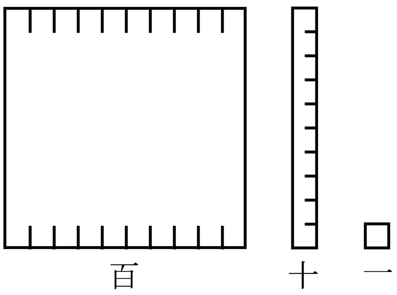


図 1

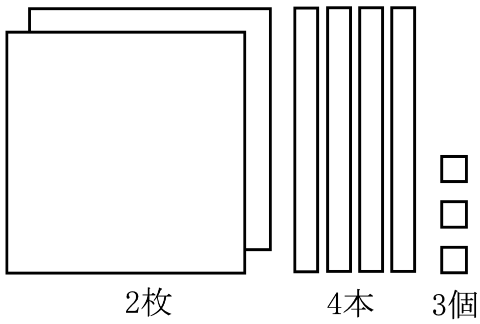


図 2

問　次の数を上のような図で表せ。

(1)　325　　　(2)　547　　　(3)　302

また

５個集まるごとに位が一つ上がる

という数えかたもあり，このような数えかたを五進法という。五進法で 243 というのは

$$243 = 2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3 \times 1$$

のことである。これを計算すると十進法の 73 に等しいことがわかる。

＜数と多項式の計算＞

②　多項式

十進法で 243 は

$$2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3 \times 1$$

五進法で 243 は

$$2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 3 \times 1$$

であった。

このとき，10 や 5 のかわりに文字 x を用いて，

$$2 \times x^2 + 4 \times x + 3$$

すなわち

$$2x^2 + 4x + 3$$

のような式について考えてみる。$2x^2$ や $4x$ や 3 のことを **項**という。

また，上の式のように，数と文字の積をいくつか加えてできる式を**多項式**という。

多項式の一つの項の中で，掛け合あわせた文字の個数をその項の**次数**という。

$2x^2$ の次数は 2，$4x$ の次数は 1 である。文字を含まない項を**定数項**という。

定数項の次数は 0 である。各項の次数の中で最大のものを，その多項式の

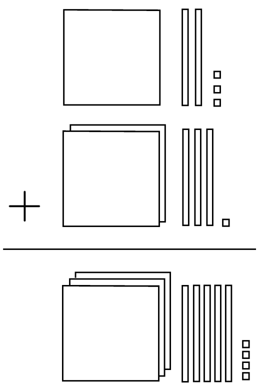
次数という。$2x^2 + 4x + 3$ の次数は 2 である。

問 1　$7x^3, -5x^2, 3x, 1$ の次数はいくらか。また，多項式 $-5x^2 + 1 + 7x^3 + 3x$ の次数はいくらか。

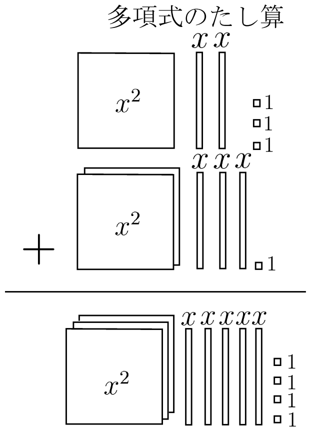
また，多項式の計算の仕方は下の図のように考えるとわかりやすい。

数のたし算

$$\begin{array}{r} 123 \\ +\ 231 \\ \hline 354 \end{array}$$



多項式のたし算



$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 3 \\ +\ 2x^2 + 3x + 1 \\ \hline 3x^2 + 5x + 4 \end{array}$$

多項式のひき算についても，同様に考えて計算ができる。

問 2 次の多項式の和 $A + B$，差 $A - B$ を計算せよ。

(1)　$A = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 7$,　$B = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 4$

(2)　$A = 7 + y^2 - 5y^6 + 3y$,　$B = y^2 + 3y^3 - 7y^4 + 5y - 9$

＜数と多項式の計算＞

③　多項式の積

多項式、

$$3x + 5 \text{ と } 4x + 2$$

の積を計算してみる。

図- 1 のように考えると、この積は、

$$3x \times 4x,\ 3x \times 2$$

$$5 \times 4x,\ 5 \times 2$$

を加えたものになるから、

$$\begin{aligned}(3x+5)(4x+2) &= 12x^2 + 6x + 20x + 10 \\ &= 12x^2 + 26x + 10\end{aligned}$$

となる。

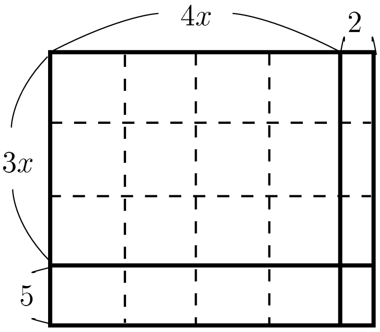


図-1 $(3x+5)(4x+2)$

このように多項式の積を計算して、単項式の和に表す（和の式に表す）ことを**展開する**という。

例 1　$(a+b)^2$ を展開せよ。

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

問 1　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ となることを計算と図を使って示せ。

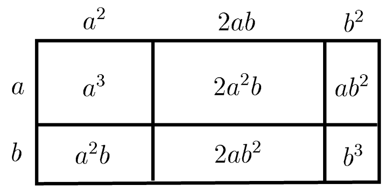
問 2　$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ となることを計算と図を使って示せ。

例 2　$(a+b)^3$ を展開せよ。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

であるから、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$



$(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

問 3　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+1)(5x-3)$

(2)　$(3x-1)(5y+2)$

(3)　$(x-1)(x^2+x+1)$

(4)　$(3x+2y)(x^2+2xy+3y^2)$

(5)　$(a-b)^3$

(6)　$(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(7)　$(a+b+c)^2$

(8)　$(x+y+z)(x-y+z)$

＜数と多項式の計算＞

④　因数分解 (1)

多項式の積　$(x+3)(x+4)$　を展開すると，

$$x^2+7x+12$$

となる。逆に　$x^2+7x+12$　は

$$(x+3)(x+4)$$

と表されることがわかる。このように，１つの多項式をいくつかの多項式の積で表すことを**因数分解する**という。ここで，　$x+3$　と　$x+4$　を　$x^2+7x+12$　の**因数**という。

例１　$x^2+14x+45$ を因数分解せよ。

$$x^2+14x+45=(x+\bigcirc)(x+\triangle)$$

としたい。

右辺を展開すると　$x^2+(\bigcirc+\triangle)x+\bigcirc\times\triangle$

となる。両辺を比較して，

$$\bigcirc+\triangle=14$$

$$\bigcirc\times\triangle=45$$

となる○と△を見つければよいことがわかる。

○を 5，△を 9 にすれば，和が 14，積が 45 となるから，

$$x^2+14x+45=(x+5)(x+9).$$

問１　次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+8x+15$

(2) x^2+6x+5

(3) $x^2+10x+21$

(4) $x^2-11x+24$

(5) $x^2+2x-15$

(6) x^2-6x-7

次に，$2x^2+11x+15$ のように，x^2 の係数が 1 以外の 2 次式の因数分解を考えてみる。

$$2x^2+11x+15=(x+\bigcirc)(2x+\triangle)$$

とおくと

$$2\times\bigcirc+\triangle=11$$

$$\bigcirc\times\triangle=15$$

となる。

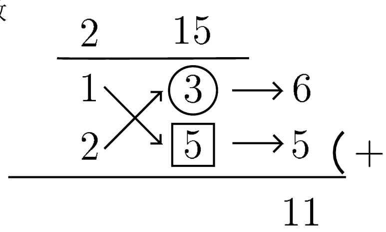


図-1　○と□を見つける

○と△は図-1 のような図式で見つけることができる。

問２　次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2+5x+2$

(2) $4x^2+16x+15$

(3) $2x^2-5x-3$

(4) $3x^2-4x-4$

(5) $3x^2-10x+3$

(6) $6x^2-x-2$

＜数と多項式の計算＞

⑤　因数分解 (2)

$m(a+b)$ を展開すると，$ma+mb$ になる。したがって，
$ma+mb$ は $m(a+b)$ と因数分解される。
すなわち，多項式の中に共通の因数があれば，それを括弧（カッコ）の外にくくり出すことによって因数分解ができる。

例 1　$3xy^2+6x^2y$ を因数分解せよ。

$3xy$ が共通の因数であるので，これをくくり出して

$$3xy^2+6x^2y=3xy(y+2x)$$

と因数分解できる。

例 2　$x(3a+5)-y(3a+5)$ を因数分解せよ。

$(3a+5)$ が共通の因数であるので，これをくくり出して

$$x(3a+5)-y(3a+5)=(3a+5)(x-y)$$

と因数分解できる。

次に，a^2-b^2 は $(a+b)(a-b)$ と因数分解される。
すなわち，多項式が 2 乗の差の形をしている場合は，和と差の積として因数分解できる。

問 1　次の式を因数分解せよ。

(1) $3ax^2-27a$

(2) $2a^3-18ab^2$

(3) $(x-y)a+(y-x)b$

(4) $ax^2-5ax+6a$

(5) $(a-b)x^2-(a-b)y^2$

(6) $11x^2-99$

問 2　次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2y+6xy^2$

(2) $(a+2b)^2-3(a+2b)$

(3) $9x^2-49$

(4) $(x+y)a-(x+y)b$

(5) $3a^2-75b^2$

(6) $1-9x^2$

< 数と多項式の計算 >

⑥　多項式の割り算

数の割り算 $679 \div 32$ について考えてみよう。

式の割り算 $(6x^2 + 7x + 9) \div (3x + 2)$ について考えてみよう。

$$\begin{array}{rr} & 2 \\ 32 & \overline{)\,679} \end{array}$$

立てる

$$\begin{array}{rr} & 2x \\ 3x+2 & \overline{)\,6x^2+7x+9} \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{rr} & 2 \\ 32 & \overline{)\,679} \\ & 64 \end{array}$$

掛ける

$$\begin{array}{rr} & 2x \\ 3x+2 & \overline{)\,6x^2+7x+9} \\ & 6x^2+4x \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{rr} & 2 \\ 32 & \overline{)\,679} \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}$$

引く

$$\begin{array}{rr} & 2x \\ 3x+2 & \overline{)\,6x^2+7x+9} \\ & 6x^2+4x \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{rr} & 2 \\ 32 & \overline{)\,679} \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 39 \end{array}$$

下ろす

$$\begin{array}{rr} & 2x \\ 3x+2 & \overline{)\,6x^2+7x+9} \\ & 6x^2+4x \\ \cline{2-2} & 3x+9 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{rr} & 21 \\ 32 & \overline{)\,679} \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 39 \end{array}$$

立てる

$$\begin{array}{rr} & 2x+1 \\ 3x+2 & \overline{)\,6x^2+7x+9} \\ & 6x^2+4x \\ \cline{2-2} & 3x+9 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{rr} & 21 \\ 32 & \overline{)\,679} \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 39 \\ & 32 \end{array}$$

掛ける

$$\begin{array}{rr} & 2x+1 \\ 3x+2 & \overline{)\,6x^2+7x+9} \\ & 6x^2+4x \\ \cline{2-2} & 3x+9 \\ & 3x+2 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{rr} & 21 \\ 32 & \overline{)\,679} \\ & 64 \\ \cline{2-2} & 39 \\ & 32 \\ \cline{2-2} & 7 \end{array}$$

引く

$$\begin{array}{rr} & 2x+1 \\ 3x+2 & \overline{)\,6x^2+7x+9} \\ & 6x^2+4x \\ \cline{2-2} & 3x+9 \\ & 3x+2 \\ \cline{2-2} & 7 \end{array}$$

$$679 = 32 \times 21 + 7$$

$$6x^2 + 7x + 9 = (3x + 2)(2x + 1) + 7$$

＜数と多項式の計算＞

⑦　多項式の割り算

$$\begin{array}{rl} & \;\;21 \text{ --- 商}\\ 32 \big) & 679\\ & 64\\ \hline & \;\;39\\ & \;\;32\\ \hline & \;\;\;\;7 \text{ -- 余り} \end{array}$$

図-1　$679 \div 32$

$$\begin{array}{rl} & 2\times 10+1 \text{ ------------ 商}\\ 3\times 10+2 \big) & 6\times 10^2+7\times 10+9\\ & 6\times 10^2+4\times 10\\ \hline & \qquad\qquad 3\times 10+9\\ & \qquad\qquad 3\times 10+2\\ \hline & \qquad\qquad\qquad\; 7 \text{ --- 余り} \end{array}$$

図-2

$$\begin{array}{rl} & 2x\ +\ 1 \text{ ---------- 商}\\ 3x+2 \big) & 6x^2+\ 7x+9\\ & 6x^2+\ 4x\\ \hline & \qquad\quad 3x+9\\ & \qquad\quad 3x+2\\ \hline & \qquad\qquad\; 7 \text{ ----- 余り} \end{array}$$

図-3　$(6x^2+7x+9)\div(3x+2)$

多項式 A を多項式 B で割ったとき，商が Q で余りが R となったとすると，$A=BQ+R$ がなりたつ。このとき，**R の次数は必ず B の次数より低くなる**ことに注意する。

また，多項式の割り算は整数のときと同じように,「商を立てる」,「掛ける」,「引く」,「下ろす」の４種類の計算を繰り返して求めることができる。ただ，整数の計算と違って，係数が分数であってもよい。

問１　下の□のなかに適当な数を入れて，
$(6x^2+7x+3)\div(2x+1)$　を計算せよ。

$$\begin{array}{rl} & \square x+\square \text{ ---------- 商}\\ 2x+1 \big) & 6x^2+\ 7x\ +\ 3\\ & \square x^2+\square x\\ \hline & \qquad\quad \square x+\ 3\\ & \qquad\quad \square x+\square\\ \hline & \qquad\qquad\quad \square \text{ ----- 余り} \end{array}$$

問２　次の割り算を行い，商と余りを求めよ。

(1)　$(x^2+5x+9)\div(x+2)$

(2)　$(3x^2+5x+7)\div(x+2)$

(3)　$(2x^3+3x^2+5x+7)\div(2x+1)$

(4)　$(2x^3+5x^2-2x+1)\div(x^2-x+2)$

(5)　$(x^3-8)\div(x-2)$

< 数と多項式の計算 >

分数式の掛け算・割り算

分母に文字を含んだ式，例えば

$$\frac{1}{x^2}\ ,\ \frac{5}{x-3}\ ,\ \frac{2y+3}{y^2+1}$$

などの式を，分数式という。

例 1 $\displaystyle \frac{6xy^3}{15x^3y}=\frac{2\times 3\times x\times y^2\times y}{5\times 3\times x^2\times x\times y}=\frac{2y^2}{5x^2}$

例 2 $\displaystyle \frac{x^2+x}{x^2-x-2}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x}{x-2}$

問 1 次の分数式を約分せよ。

(1) $\displaystyle \frac{21x^3y^2}{3xy}$

(2) $\displaystyle \frac{x^2+4x-21}{x^2-9}$

(3) $\displaystyle \frac{x^5}{x^3-3x^2}$

(4) $\displaystyle \frac{6x^2+7x-3}{2x^2+x-3}$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

(2) $\displaystyle \frac{x^2+xy}{x-y}\times\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$

(3) $\displaystyle \frac{a^2-a-2}{a^2-2a+4}\div\frac{(a+1)^2}{a^3+8}$

(4) $\displaystyle \frac{4x^2-y^2}{x^3+8y^3}\div\frac{6x^2-xy-y^2}{x^2-2xy+4y^2}$

< 数と多項式の計算 >

分数式のたし算・ひき算

例 1

$$\frac{5x}{x^3-4x} - \frac{10}{x^3-4x} = \frac{5x-10}{x^3-4x} = \frac{5(x-2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{5}{x(x+2)}$$

例 2

$$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-2)(x-1)-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-3x+2-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x+1)} = \frac{-7x-1}{(x+3)(x-1)}$$

問　次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{2}{yz}$

(2) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x-2}$

(3) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+3} - \dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$

(4) $\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}$

(5) $\dfrac{x-1}{x(x+1)} + \dfrac{x+1}{x(x-1)}$

(6) $\dfrac{1}{x^2+5x+6} + \dfrac{3}{x^2-x-6}$

(7) $\dfrac{x+5}{x^2+8x+7} - \dfrac{2x}{2x^2+x-1}$

< 式の問題 >

1 次の割り算を行い，商と余りを求めよ。

(1) $(2x^2+13x+20)\div(x+5)$

(2) $(2x^3+3x^2+5x+8)\div(2x+1)$

(3) $(3x^4-2x^3+7x^2+5x+6)\div(x^2-x+2)$

2 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{4x-2}{x^2-x-2}\times\dfrac{x+1}{2x-1}$

(2) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}$

(3) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x}\times\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-6}$

(4) $\dfrac{x-y}{x^2+xy}\times\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$

(5) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-5x+6}$

(6) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+6x+8}\div\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

(7) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x}\div\dfrac{x^2-x-6}{x^2-x-2}$

(8) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a+b}{a-b}$

3 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}$

(2) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}$

(3) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}-\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}$

(4) $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$

(5) $\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x-1}{x+1}$

＜ 平方根 ＞

ある数を２乗すると a になるとき，その数を a の**平方根**という。したがって，例えば $3^2 = 9, (-3)^2 = 9$ であるから，3 と -3 は，9 の平方根である。

正の数 a の平方根は，２つあり正のほうを $\sqrt{a}$，負のほうを $-\sqrt{a}$ と表す。

平方根の積と商について，次のことが成り立つ。

a と b が正の数のとき

(1)　$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$　　　(2)　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(1) の証明

$\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$，$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$ となる。２乗して ab になる正の数が $\sqrt{ab}$ であるから，$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

＊ a の平方根は，
$x^2 = a$ にあてはまる
x の値のことである

＊ $a \geqq 0$ のとき，
・$a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$
・$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$
・$m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$
・$m\sqrt{a} - n\sqrt{a} = (m-n)\sqrt{a}$

問 1 上の証明と同じ方法で，(2) を証明せよ。

問 2　次の式を簡単にせよ。

(1) $(\sqrt{12})^2$　　(2) $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$

(3) $\sqrt{2}\sqrt{3}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

(5) $\sqrt{12}$　　(6) $\sqrt{32}$

(7) $\sqrt{3} + \sqrt{12}$　　(8) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$

(9) $\sqrt{27} \times \sqrt{12}$　　(10) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2$

(11) $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$　　(12) $2\sqrt{3} - \dfrac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{27}$

例 1　$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

例 2　$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1 \times (\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

問 3　次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{12}{\sqrt{12}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}-3}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

< 展開・因数分解の練習問題 >

次の式を展開せよ。

1.

(1) $3x\ (\ x-4\ )$

(2) $\dfrac{2}{3}\ (\ 9x^2-6x+12\ )$

(3) $-3\ (\ x-7\ )$

(4) $-3x\ (\ x^2-8x+5\ )$

(5) $(\ 2x^2-3x+4\ )\times 3x$

2.

(1) $(\ 2x-3y\ )(\ 2x+3y\ )$

(2) $(\ 9x+7y\ )(\ 9x-7y\ )$

(3) $(-a+2b\ )(\ -a-2b\ )$

(4) $(\ x^2-x-5\ )(\ x^2-x+5\ )$

(5) $(\ x-3y+1\ )(\ x+1+3y\ )$

3.

(1) $(\ a+2b\ )^2$

(2) $(\ 3x-2y\ )^2$

(3) $(-2x-y\ )^2$

(4) $(\ 2p+3q\ )^2$

(5) $(\ xy-yz\ )^2$

4.

(1) $(\ x+3\ )(\ x+4\ )$

(2) $(\ x-3\ )(\ x+5\ )$

(3) $(\ 2x-3\ )(\ 4x+5\ )$

(4) $(\ 5x-3\ )(\ 3x-4\ )$

(5) $(-2x+y\ )(\ 3x-2y\ )$

5.

(1) $(\ a+b+c\ )^2$

(2) $(\ x+1\ )(\ x-1\ )(\ x+2\ )(\ x-2\ )$

(3) $(\ x+y\ )^3$

次の式を因数分解せよ。

1.

(1) $ab-bc$

(2) $3ab^2+9a^2b$

(3) $2x^2-6x$

(4) $x\ (\ x-1\ )-2\ (\ x-1\ )$

(5) $ab\ (\ x-y\ )+a\ (\ y-x\ )$

2.

(1) x^2-16

(2) $25x^2-4$

(3) $9x^2-4y^2$

(4) $3x^2-27y^2$

(5) $(\ x-y\ )^2-(\ a-b\ )^2$

3.

(1) $x^2+10x+25$

(2) $4x^2-4x+1$

(3) $9x^2-6x+1$

(4) $9x^2+12x+4$

(5) $a^2b^2+2abcd+c^2d^2$

4.

(1) $x^2+11x+24$

(2) x^2-x-12

(3) x^2+x-12

(4) $(\ a-b\ )^2-2\ (\ a-b\ )-15$

(5) $3x^2+5x-2$

5.

(1) $(\ a^2-b^2\ )\ x^2-a^2+b^2$

(2) $1-\dfrac{x^2}{4}$

(3) $x-x^5$

(4) $x-27x^3$

(5) $ax^2-(\ a+1\ )x+1$

(6) $x^4-\ y^4$

＜ 2 次方程式の解の公式 ＞

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を求める

x^2 の係数を 1 にするために，両辺を a で割ると

定数項を移項すると

両辺に，x の係数の半分の 2 乗を加えると

左辺を平方の形 (○ + △)^2 にすると

両辺の平方根をとると

解は

問題　解の公式を使って次の方程式を解け。

(1) $x^2 + x - 1 = 0$　　(2) $2x^2 + 2x - 1 = 0$

＜ 2 次方程式 ＞

② 2 次方程式

$$x^2=1,\qquad x^2+2x+1=0,\qquad 3x^2-5x=1$$

のように x^2 を含む方程式を 2 次方程式といい、x のように未知の値を表す文字を**未知数**という。

次に、未知数 x の値を**解**といい、**解を求めることを方程式を解く**という。

(1) 因数分解による方法

$$2x^2+5x-3=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x+3)(2x-1)=0$$

となるから

$$x+3=0 \text{ または } 2x-1=0$$

したがって

$$x=-3 \text{ または } x=\frac{1}{2}$$

(2) 解の公式による方法

$ax^2+bx+c=0$ の解は,

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ と } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

の 2 つである。これを解の公式という。

問 次の方程式を解け。

(1) $(x+2)(3x-4)=0$

(2) $x(x+7)=0$

(3) $x^2+2x-15=0$

(4) $x^2-6x+8=0$

(5) $x^2=12$

(6) $(x+3)^2=2$

(7) $x^2+5x+1=0$

(8) $3x^2-7x+3=0$

(9) $12x-4=x^2$

(10) $x^2-9=8x$

< 連立 1 次方程式 >

② 連立 3 元 1 次方程式

ある店で，ケーキとプリンとドーナツを販売している。

ケーキ 1 個，プリン 2 個，ドーナツ 3 個では 390 円

ケーキ 2 個，プリン 3 個，ドーナツ 1 個では 460 円

ケーキ 3 個，プリン 4 個，ドーナツ 2 個では 680 円

であった。ケーキ，プリン，ドーナツはそれぞれ 1 個いくらになるか。

この問題を式で表すと，1 組の方程式ができる。このような方程式の組を連立 3 元 1 次方程式という。この方程式を解くには，**順に一文字ずつ消去する**とよい。上の問題を解きなさい。

問 100 円硬貨 1 枚，50 円硬貨 1 枚，1 円硬貨 1 枚，の重さは $10g$，

100 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 3 枚，1 円硬貨 4 枚，の重さは $26g$，

100 円硬貨 3 枚，50 円硬貨 1 枚，1 円硬貨 2 枚，の重さは $21g$，

である。100 円硬貨，50 円硬貨，1 円硬貨の重さは，それぞれいくらか。

< 連立１次方程式の問題 >

1 A さんは，家から 7km 離れた駅まで行くのに，家から途中の友達の家までは自転車でいき，そこから駅まで歩いたら，全体で 45 分かかった。自転車の速さは毎時 12km，歩く速さは毎時 4km のとき，家から友達の家までの道のりを求めよ。(ヒント:問題の内容を図で表す。何を x，y とおけば方程式を作りやすいかを考える)

2 K さんは，家から 1500m 離れた学校へ向かった。最初は毎分 60m の速さで歩き，途中から毎分 180m の速さで走り，家を出てから 21 分後に学校に着いた。走った道のりは何 m か。

3 ある大学の今年度の学生数は，昨年度にくらべて，男子の学生数が 4 %増加し，女子の学生数は 1 %減少した。全体としては 8 人増加して，583 人になった。この大学の今年度の男子，女子の学生数をそれぞれ求めよ。(ヒント:問題の内容を表で表す。何を x，y で表すかきめる。)

4 A，B 2 種類の食塩水が 400g ずつある。食塩水 A から 200g，食塩水 B から 100g とって混ぜたら，8 %の食塩水ができた。また，食塩水 B の残りの 300g に 20g の食塩を混ぜたら，食塩水 A と同じ濃度になった。食塩水 A，B のはじめの濃度はそれぞれ何%か。

5 花屋で，バラを 4 本とカーネーションを 6 本買い，代金として 1800 円払った。ところが，店の人が，バラとカーネーションの値段を取り違えて計算していたことに気づき，100 円返してくれた。バラ 1 本，カーネーション 1 本の値段を求めなさい。

＜ 関数の意味 ＞

関数

ある量とそれにともなって変わる他の量があり，それぞれを変数（いろいろな値を とる文字のこと）x，y で表す。**x の値をきめるとそれに応じて y の値もただ 1 つきまるとき，y は x の関数である**という。

例 1　ある車は，ガソリン 1 リットルで 15km 走行できる。このとき，この車はガ ソリン x リットルで走行できる距離を y km とすると，$y = 15x$ と表すことができる。

例 2　風呂に水を入れるとき，水の深さとその時間がわかれば水を入れ始めてから 何分後に水を止めればよいか推測できる。

例 3　気温は，上空へ行けば行くほど低くなる。調査の結果

1km 高くなると　6 ℃だけ気温が下がる

ということがわかった。地上の気温が 15 ℃のとき，高さ x km の場所 の気温を y ℃とする。高さを決めると，そのときの気温がきまるから，この働きは関数になっている。この関係を式で表すと

$$y = 15 - 6x$$

となる。

問 1　50 リットルのお湯がたまっているバスタブに，1 分間に 10 リットルの割合 でお湯を入れる。x 分後にたまったお湯の量を y リットルとする。y を x の 式で表せ。

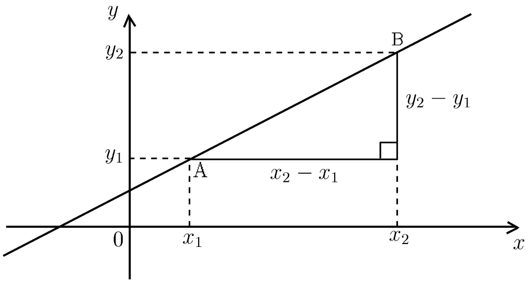
問 2　長さ 30cm のろうそくに火をつけたら，毎分 $\dfrac{1}{3}$ cm の速さで短くなっていった。火をつけてから x 分後の長さを y cm とするとき，y を x の式で 表せ。

＜傾きの意味 (直線の傾き) ＞

あなたは，直線というと何を思い浮かべますか。ピンと張った糸，まっすぐな棒などでしょうか。数学では，直線は平面上の異なる 2 点を結ぶ最短の図形，または平面と平面が交わってできる図形であると考えています。

では，平面に描かれたいろいろな直線にある共通な性質として，傾きということを考えてみます。平面上に x 軸，y 軸をとる。そのとき，平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,y_2)$ を通る直線の傾き m を

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



と決めます。これは坂道の勾配を表していると考えてもよいでしょう。

また，定点 $\mathrm{A}(a,b)$ を通る直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y)$ とするとその直線の傾き m は

$$\frac{y-b}{x-a}=m$$

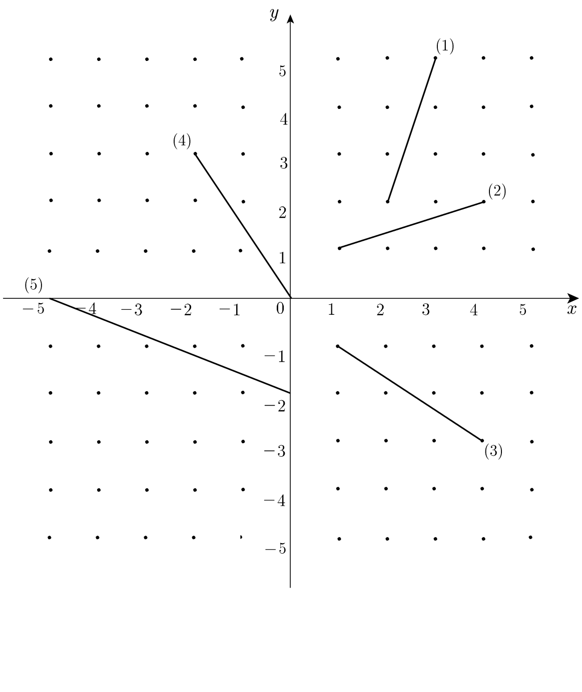
となる。この両辺に $x-a$ をかけると次式が得られる。

$$y-b=m(x-a)$$

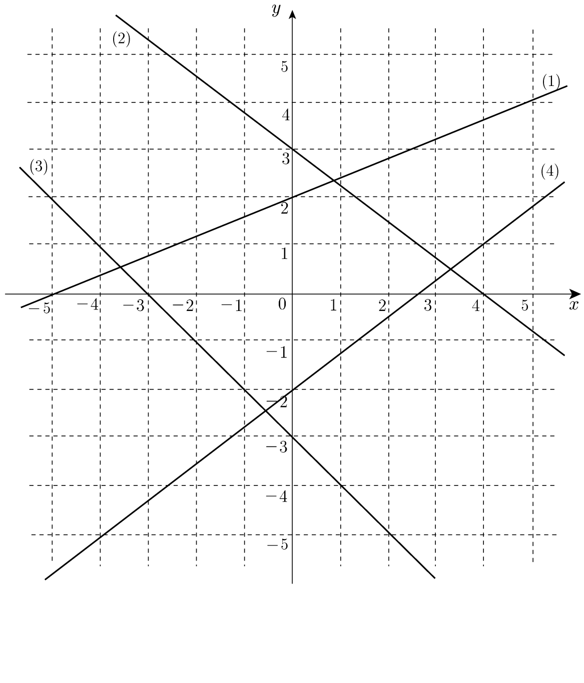
この式は定点 (a,b) を通り傾きが m である直線の式を表すことになる。

また，傾きが同じ直線は同じ性質を持つ直線と考えてよい。なぜなら，平行移動すれば重なるからである。

問 1　(1)〜(5) の線分の傾きを求めよ。



問 2　(1)〜(4) の直線の傾きを求めよ。



＜ 1 次関数のグラフ ＞

座標軸を書きこんだ平面上に直線があり，

この直線は，x 軸の正の方向に 1 増加すると，

y 軸の正の方向には m 増加したとする。

このようなとき，m を直線の傾きという。

また，

$$\frac{(y\text{ の増加量})}{(x\text{ の増加量})} = m \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と考えてもよい。

したがって，右の図-1 と図-2 を見比べてみると，

点 (a , b) を通り，傾き m の直線の式は

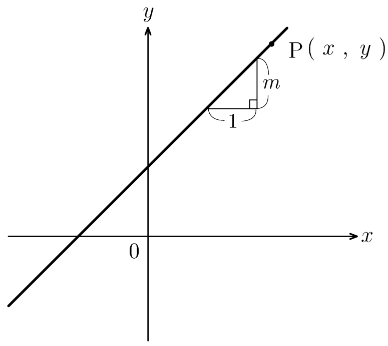
①の式を利用して，

$$\frac{y-b}{x-a} = m$$

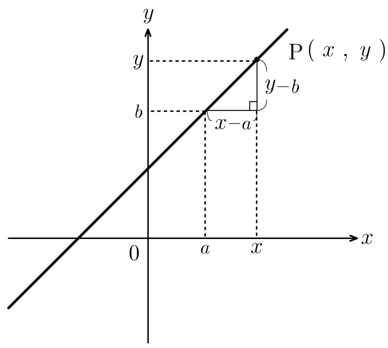
である。この両辺に $x-a$ をかけると，

$$\boxed{y-b = m(x-a)}$$

で与えられる。



図− 1



図− 2

問　次の直線を表す 1 次関数の方程式を求めよ。

(1)　点 (0 , 3) を通り，傾き 4 の直線

(2)　点 (3 , 0) を通り，傾き 5 の直線

(3)　点 (2 , 3) を通り，傾き 4 の直線

(4)　点 (-1 , 2) を通り，傾き -1 の直線

(5)　点 (-2 , 3) を通り，傾き 0 の直線

(6)　2 点 (0 , 1) , (3 , 2) を通る直線

(7)　2 点 (1 , 0) , (2 , 2) を通る直線

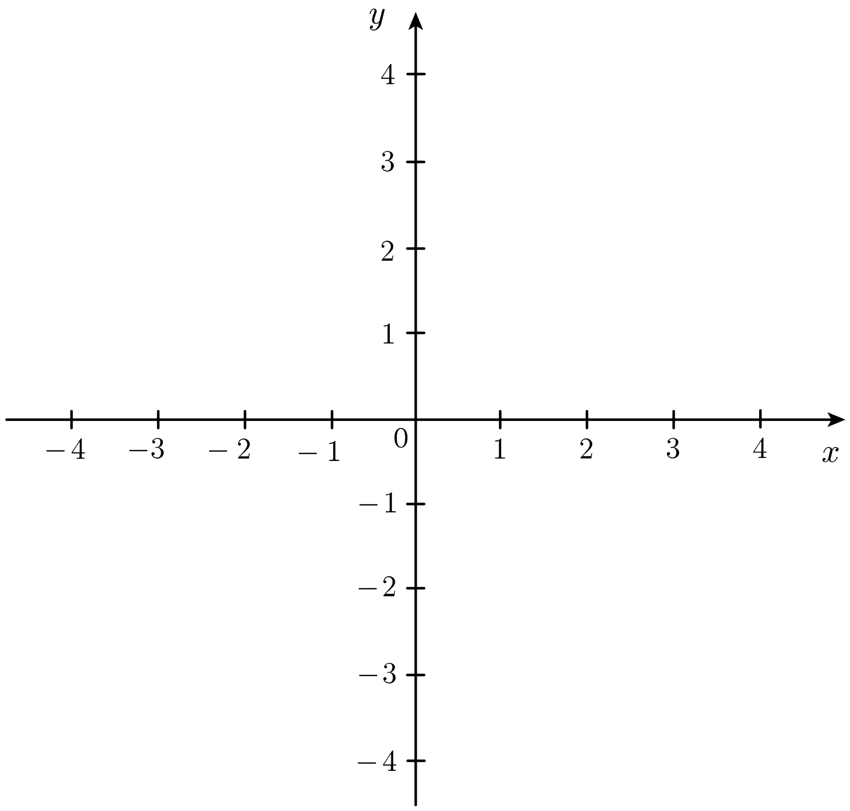
(8)　2 点 (0 , 4) , (3 , 0) を通る直線

＜ 1 次関数のグラフの問題 (1) ＞

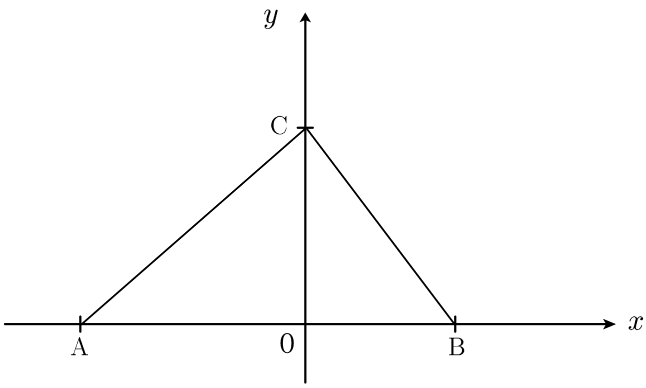
1　次の方程式のグラフをかけ。

(1)　$2x - 3y = 9$　　(2)　$x + 2y = 3$

(3)　$y - 2 = 0$　　(4)　$4x - 12 = 0$



問 2　下の図のように，3 点 A(-6,0)，B(4,0)，C(0,5) がある。
点 C を通り，△ ABC の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

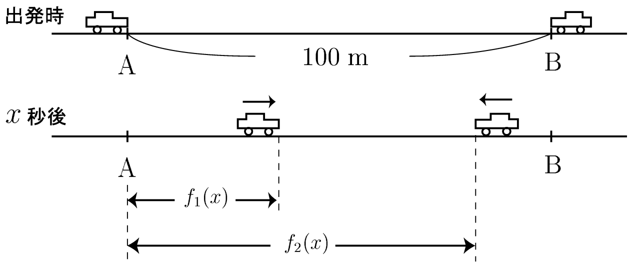


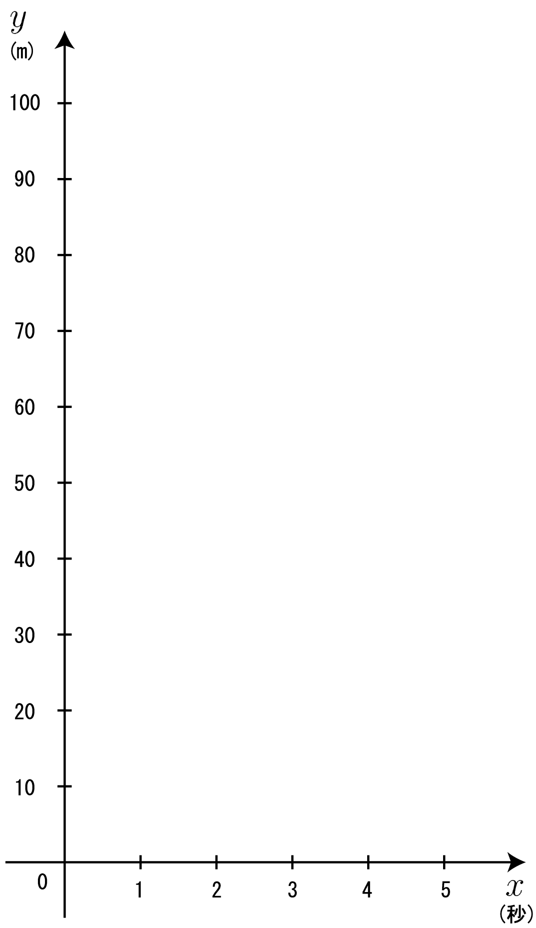
＜１次関数のグラフの問題 (2) ＞

1 長さ 15cm のロウソクに火をつけると , 毎分 0.5cm の割合でロウソクが短くなっていく。火をつけてから x 分後のロウソクの長さを y cm とするとき , 火をつけてからロウソクが燃えつきるまでの x と y の関係を表すグラフをかけ。

2 ある人が家から 800m 離れた駅まで分速 80m で歩いていく。
家を出発してから x 分後の駅までの残りの道のりを y m とするとき ,
家を出発してから駅に着くまでの x と y の関係を表すグラフをかけ。

3 100m ある直線道路を 2 つの車が走る。A 地点から B 地点に向かって走る車は秒速 20m で走る。B 地点から A 地点に向かって走る車は秒速 10m で走る。同時に出発し , x 秒後の A 地点からの距離をそれぞれ $f_1(x)$, $f_2(x)$ とする。





(1) $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を x の式で表せ。

$f_1(x) =$, $f_2(x) =$

(2) $y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$ のグラフを右図に描け。

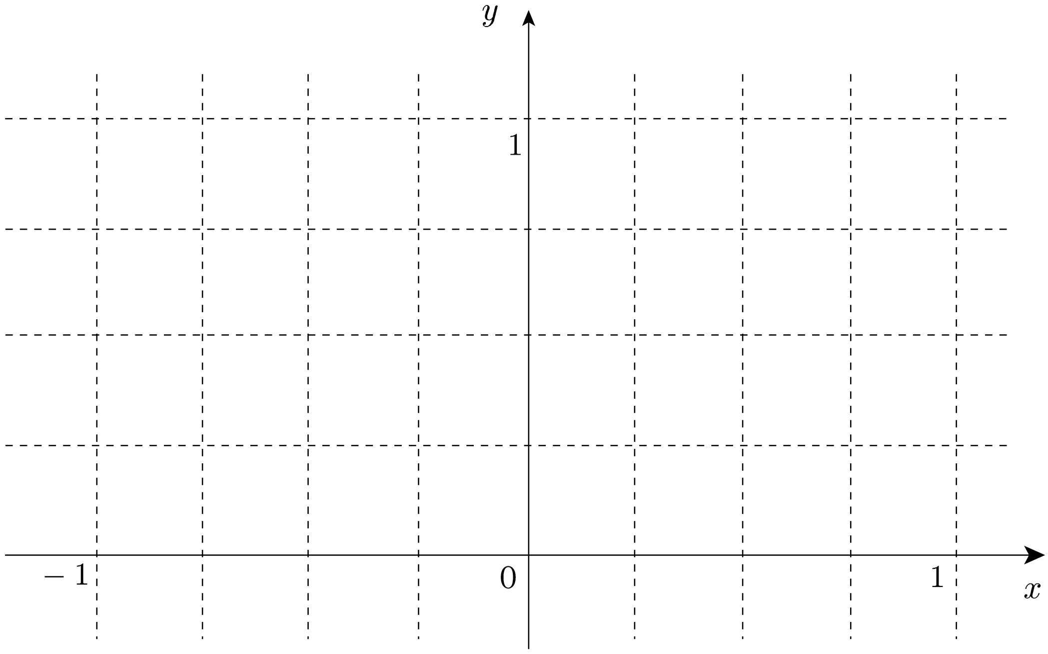
(3) 2 直線 ($y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$) の交点の座標を求めよ。

(4) 交点の座標は何を意味するか詳しく 答えよ。

$< y = x^2$ のグラフ $>$

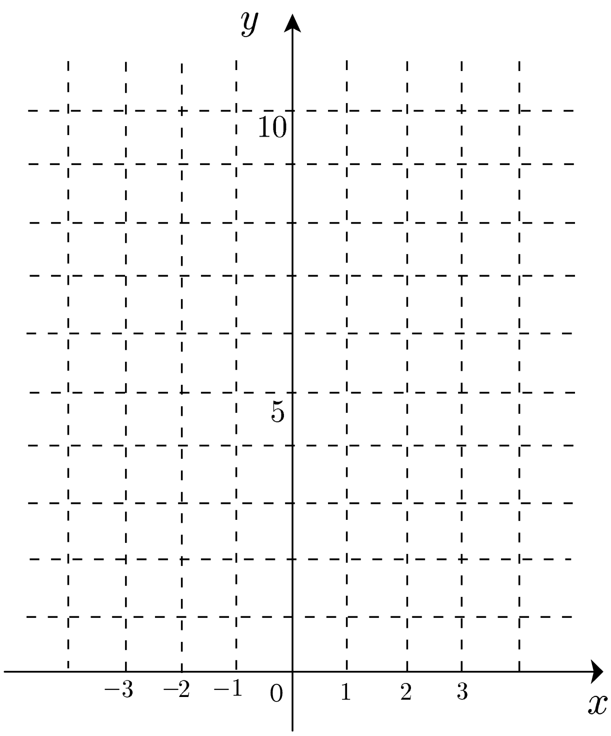
1 次の表を完成してから，$y = x^2$ のグラフをかけ。

x	$\cdots$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\cdots$
y	$\cdots$												$\cdots$



2 次の表を完成してから，$y = x^2$ のグラフをかけ。

x	y
$\vdots$	$\vdots$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
$\vdots$	$\vdots$



< 2 次関数のグラフ (1) >

① 2 次関数とそのグラフ

2 次関数の中で，最も基本的な関数は

$$y = x^2$$

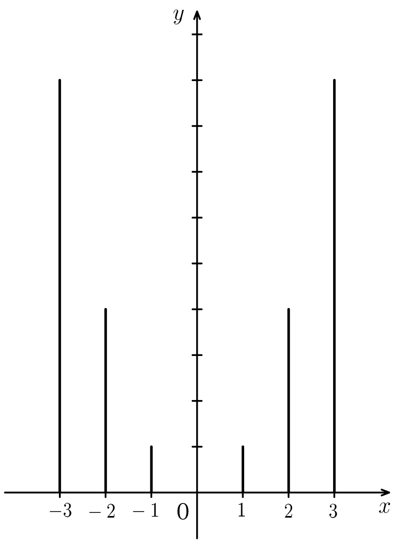
である。この関数のグラフをかいてみよう。

最初に，x の値が整数であるときの y の値を求める。

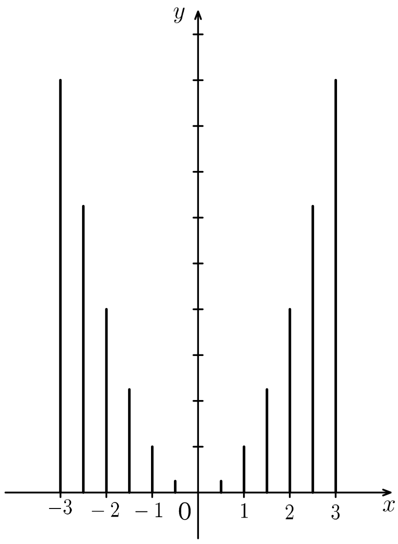
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

次に，x 軸上の目盛りの上に，対応する y の長さの棒を立てる。

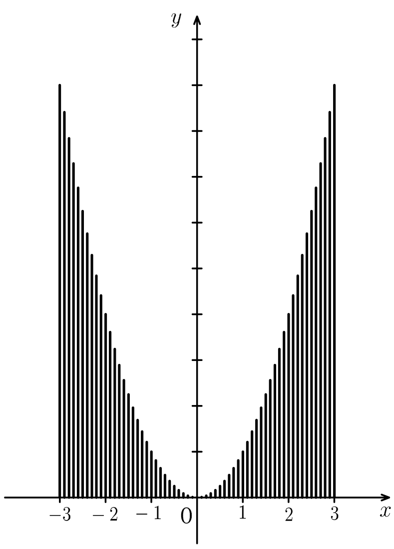
x の値の間隔を 1 ずつにすると



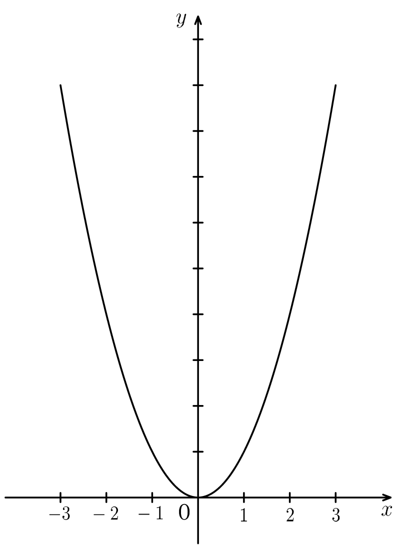
x の値の間隔を 0.5 ずつにすると



x の値の間隔を 0.1 ずつにすると



$y = x^2$ のグラフ



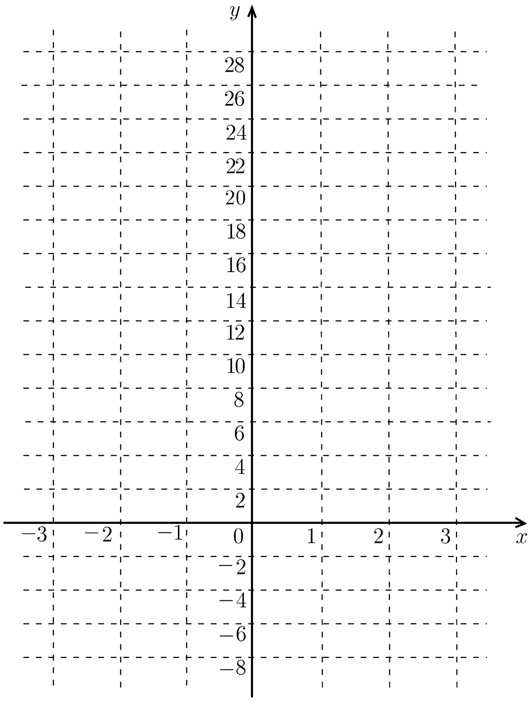
「関数のグラフとは，棒グラフのことである」を理解すること。

＜ 2 次関数のグラフ (2) ＞

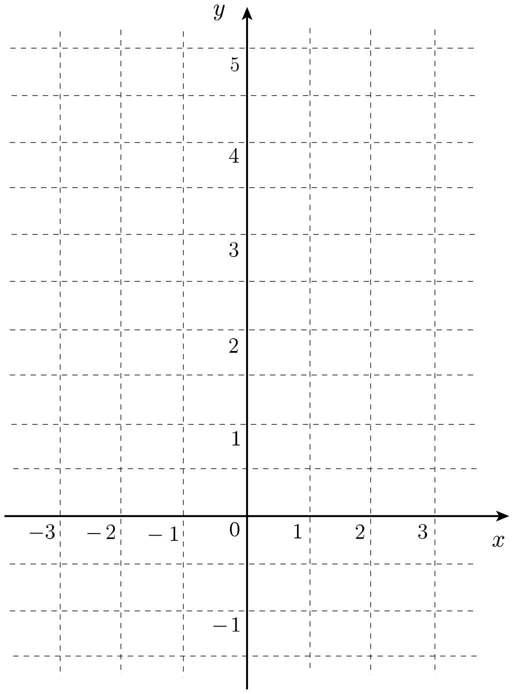
②　$y = ax^2$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

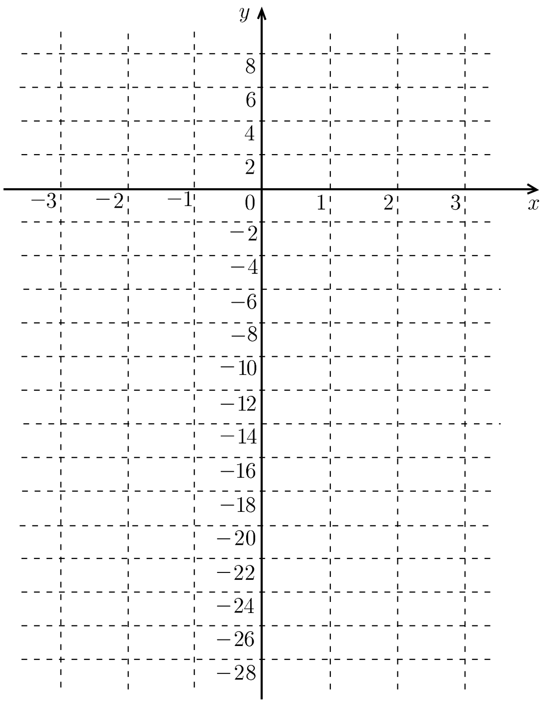
(1)　$y = 2x^2$,　　$y = 3x^2$



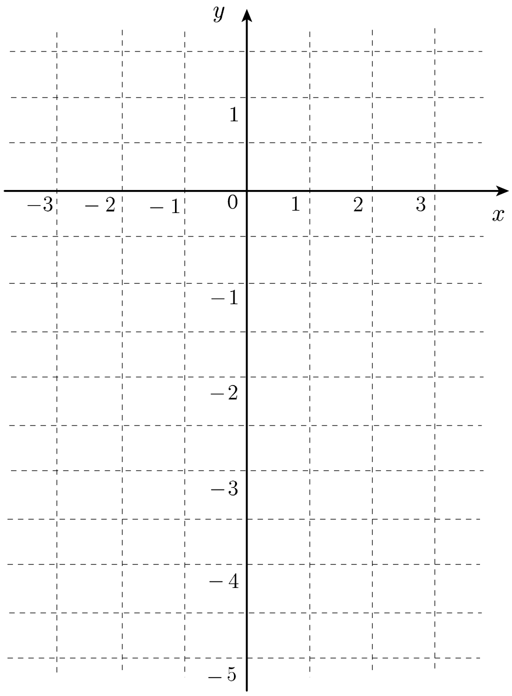
(2)　$y = \dfrac{1}{2}x^2$,　　$y = \dfrac{1}{4}x^2$



(3)　$y = -2x^2$,　　$y = -3x^2$



(4)　$y = -\dfrac{1}{2}x^2$,　　$y = -\dfrac{1}{4}x^2$

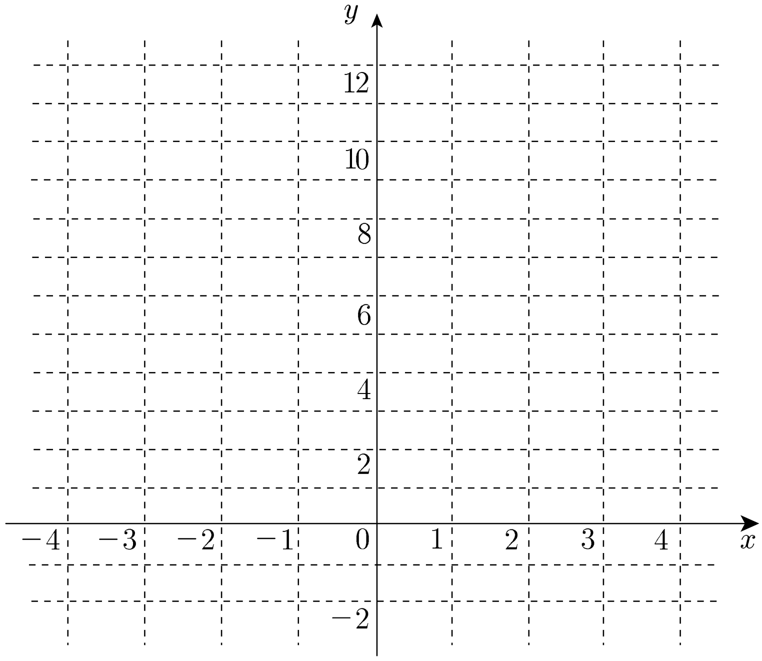


< 2 次関数のグラフ (3) >

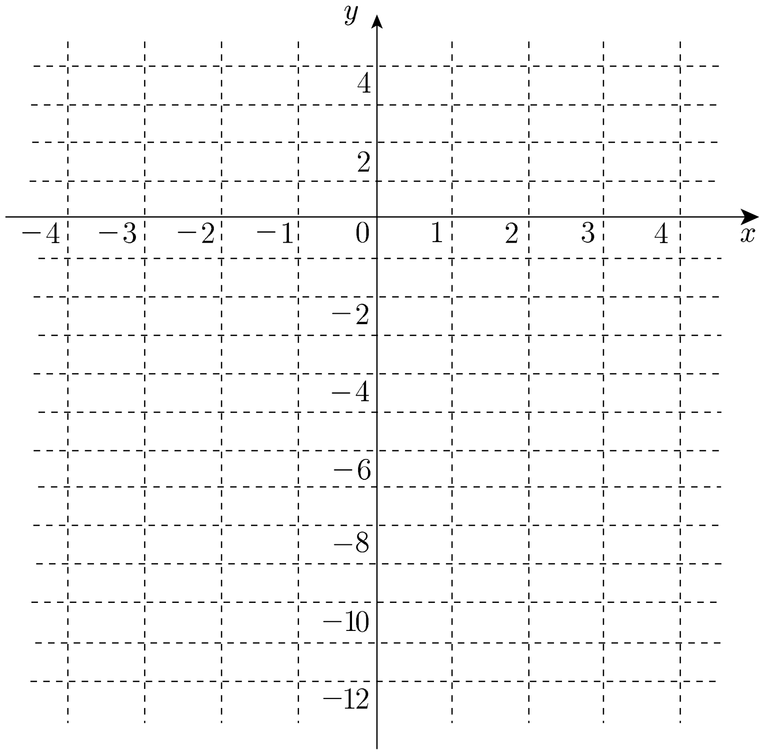
③ $y = x^2 + q$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = x^2 + 1,\qquad y = x^2 + 3,\qquad y = x^2 - 1$



(2) $y = -x^2 + 1,\qquad y = -x^2 + 3,\qquad y = -x^2 - 3$

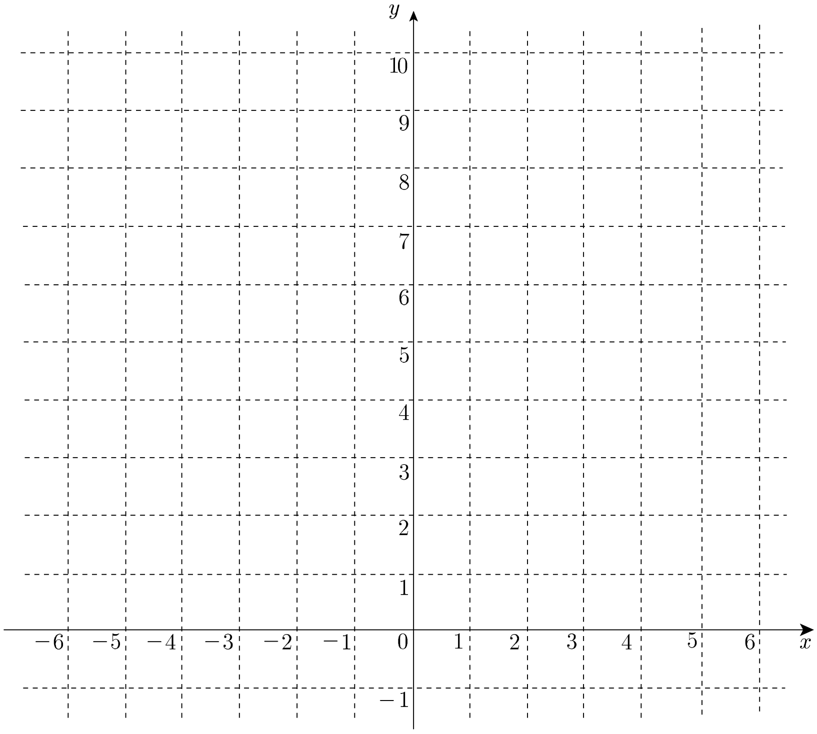


＜ 2 次関数のグラフ (4) ＞

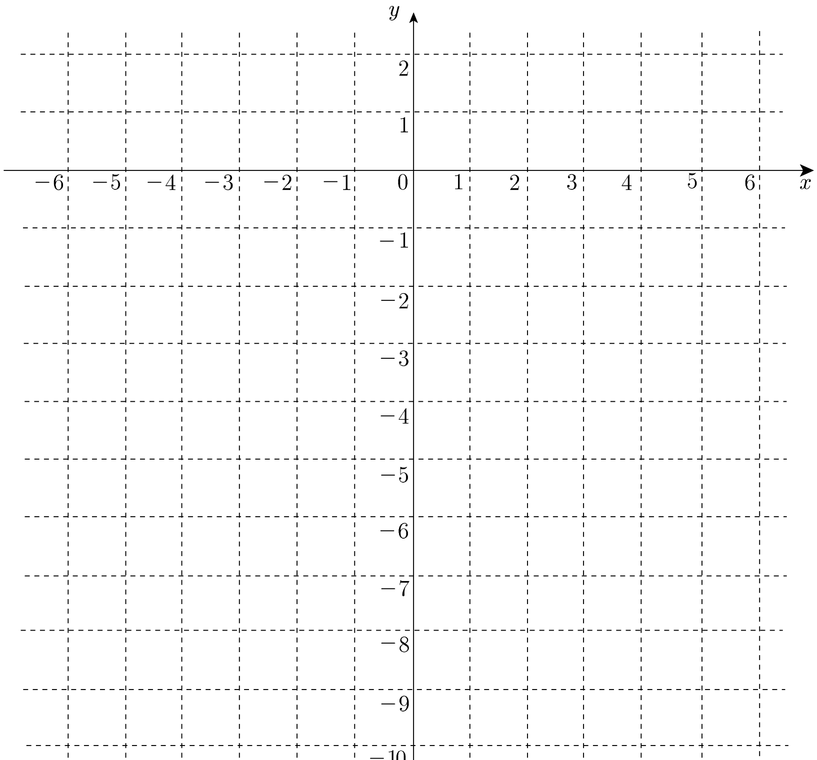
④ $y = (x - p)^2$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$



(2) $y = -(x-1)^2$, $y = -(x+1)^2$



< 2 次式の変形 >

定数　a , b , c $(a \neq 0)$　に対して，2 次式を

$$ax^2 + bx + c = a(x + \square)^2 + \bigcirc$$

の形に変形する。

例

$2x^2 + 12x = 2(x^2 + 6x)$　→　x^2 の係数 2 でくくる

$= 2(x^2 + 2 \times 3x + 3^2 - 3^2)$　→　$(x$ の係数の半分$)^2$ をたしてひく

$= 2\left\{(x+3)^2 - 3^2\right\}$　→　平方の形にする

$= 2(x+3)^2 - 18$　→　｛　｝を除く

問　次の□と○に適する数をかけ。

(1) $x^2 + 8x = \left(x + \square\right)^2 - \bigcirc$

(2) $x^2 - 2x + 3 = \left(x - \square\right)^2 + \bigcirc$

(3) $x^2 + x + 1 = \left(x + \square\right)^2 + \bigcirc$

(4) $x^2 - 3x - 1 = \left(x - \square\right)^2 - \bigcirc$

(5) $2x^2 - 8x + 3 = 2\left(x - \square\right)^2 - \bigcirc$

(6) $-2x^2 + 4x - 1 = -2\left(x - \square\right)^2 + \bigcirc$

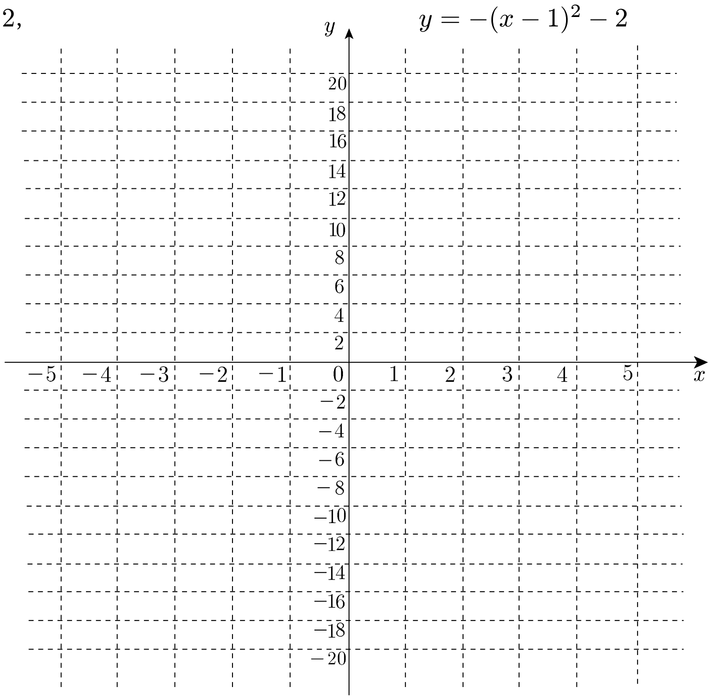
(7) $2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x + \square\right)^2 - \bigcirc$

＜ 2 次関数のグラフ (5) ＞

⑤　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1)　$y=(x-1)^2+2$,　　　　$y=-(x-1)^2-2$

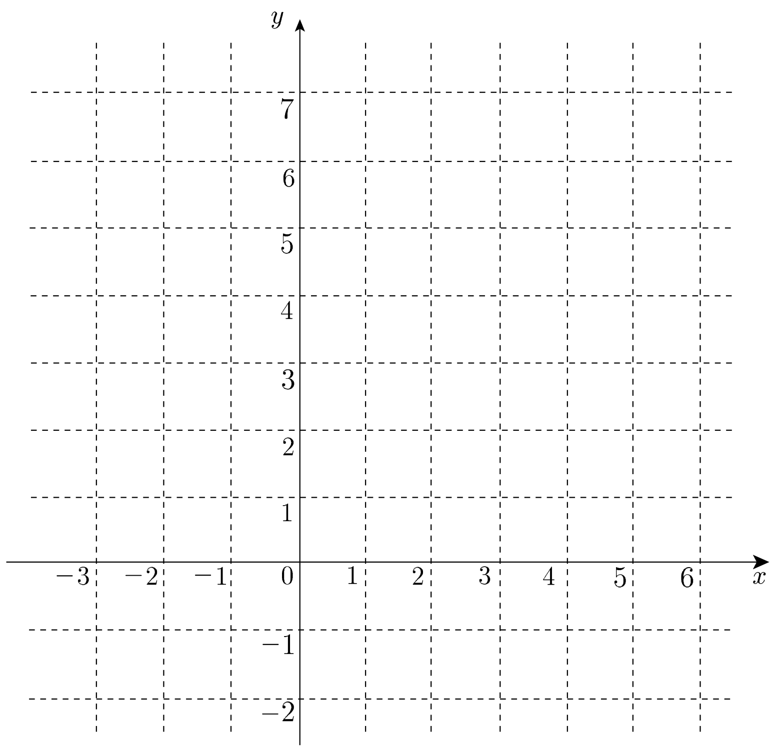


問　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-6x+13$

(2)　$y=2x^2-8x+8$

(3)　$y=-x^2+6x-4$

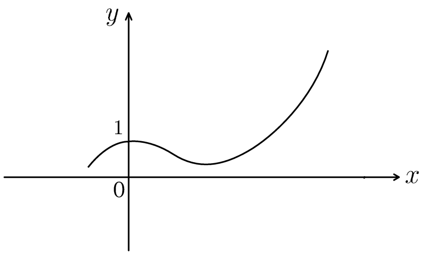


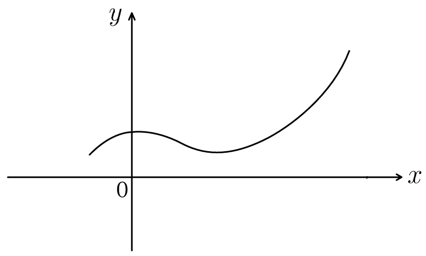
まとめると，私たちは $y=ax^2$ のグラフから，$y=ax^2+q$，$y=a(x-p)^2$ をへて，$y=a(x-p)^2+q$ のグラフを書くことを学びました。したがって，$y=ax^2+bx+c$ のグラフは，2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ に変形して描けばよいということが分かります。また、$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを x 軸の正の方向に p，y 軸の正の方向に q だけ，平行移動させればよいことが分かります。さらに見方を変えれば，$y=ax^2+bx+c$ のグラフすなわち $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，頂点の座標 (p,q) を原点とみなして $y=ax^2$ のグラフを描くとよいことが分かります。そのことは，$y=ax^2+bx+c$ のグラフを，基本形 $y=ax^2$ のグラフに帰着させるということです。このように**基本形に帰着させることは，数学のいろいろな場面で活用される強力な手段**となります。

＜ 練習問題 ＞

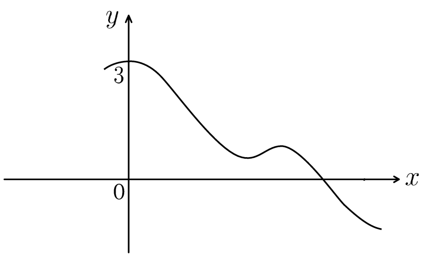
1　$y = f(x)$ のグラフが次のようなグラフであるとき，次の関数のグラフをかけ。

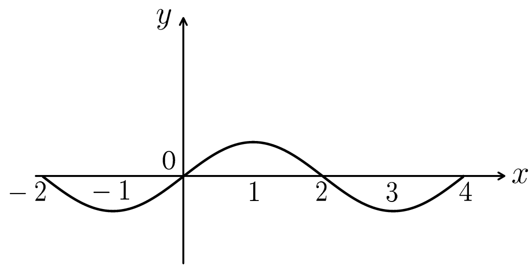
(1)　$y = f(x) + 1$　　　(2)　$y = \dfrac{1}{2}f(x)$





(3)　$y = f(x) - 3$　　　(4)　$y = f(x - 1)$





2　次のグラフについて考える。

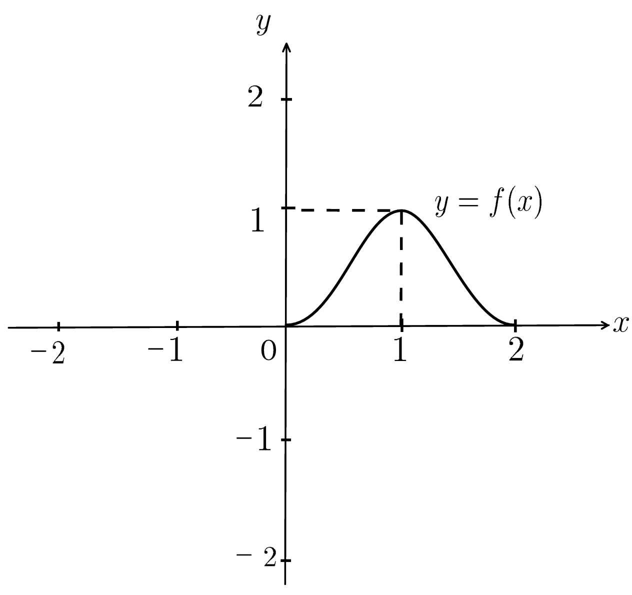
$y = f(x)$　　$(0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1)$

そのときに，(1)〜(6) のグラフをかけ。

(1)　$y = f(x) + 1$　　　(2)　$y = f(x) - 2$

(3)　$y = 2f(x)$　　　(4)　$y = -f(x)$

(5)　$y = f(x + 2)$　　　(6)　$y = f(x - 1)$



< 2 次不等式 >

不等式

$$x^2 - 1 > 0, \qquad x^2 - 2x - 1 < 0$$

のように、左辺が x の 2 次式となるように整理できる不等式を 2 次不等式という。

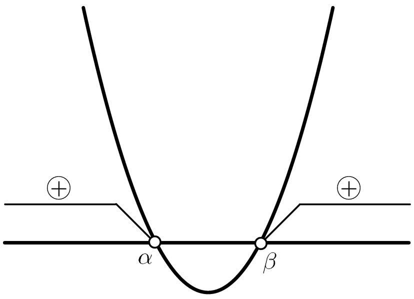
$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a > 0)$ の 2 つの解を α、$\beta \quad (\alpha < \beta)$ とすると、

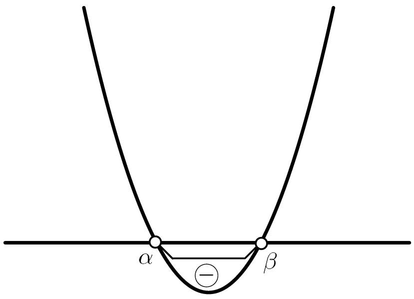
$ax^2 + bx + c > 0$ の解は

$$x < \alpha, \quad \beta < x$$

$ax^2 + bx + c < 0$ の解は

$$\alpha < x < \beta$$





問　次の 2 次不等式を解け。

(1) $(x-2)(x-3) > 0$

(2) $x(x+7) < 0$

(3) $x^2 + 2x - 3 > 0$

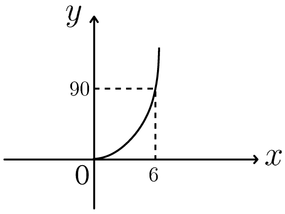
(4) $x^2 - 4 < 0$

(5) $-x^2 - x + 12 \geqq 0$

(6) $-3x^2 + 2x + 4 \leqq 1$

＜ 2 次関数の問題 ＞

1 自動車が O 地点を出発してから、x 秒間に進む距離を y m とする。$0 \leqq x \leqq 6$ の範囲で、y は x の 2 乗に比例した。下のグラフはそのときの様子を表したものである。



(1) y を x の式であらわせ。

(2) 自動車が O 地点を出発すると同時に、秒速 12 mで走っているバイクが O 地点を通過した。自動車がバイクに追いつくのは、O 地点を出発してから何秒後か求めよ。(ヒント：バイクのグラフをかく)

2 傾きが一定の坂の頂上からボールを転がしたところ、ボールが転がり始めてから x 秒間に転がった距離を y m とすると、x と y には $y = \dfrac{1}{2}x^2$ という関係があるという。(ヒント：問題の内容を図にかく)

(1) ボールが転がると同時に、A君は頂上からこの坂を秒速 $1m$ の速さで歩き始めた。A君は、ボールが転がり始めてから何秒後にボールに追いつかれるか。

(2) B君は、ボールが転がり始めてからしばらくして、頂上から一定の速さで走り始めた。B君は、ボールが転がり始めてから 3 秒後にボールに追いつき、7 秒後にボールに追い抜かれた。B君は毎秒何mで走ったか。

3 時速 x km で走っている自動車にブレーキをかけて、ブレーキがきき始めて から停止するまで進む距離を y m とする。x と y の間には $y = ax^2$ の関係がある。
時速 60 km で走っている自動車にブレーキをかけると、効き始めてか ら 18m 走って止まる。

(1) y を x の式であらわせ。

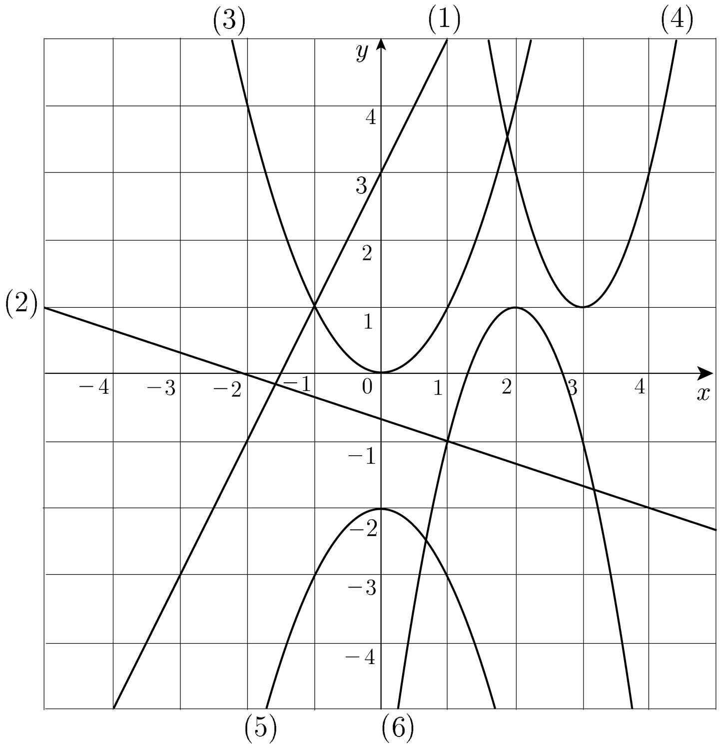
(2) 時速 80km で走っている自動車にブレーキをかけると、効き始めてから何m走って止まるか。

(3) ブレーキが効き始めてから 50m 走って止まるときの速さを求めよ。

< 練習問題 1 >

問 1

右のグラフ (1)〜(6) に
相当する 1 次関数または
2 次関数の方程式をかけ。



(1)

(2)

(3)

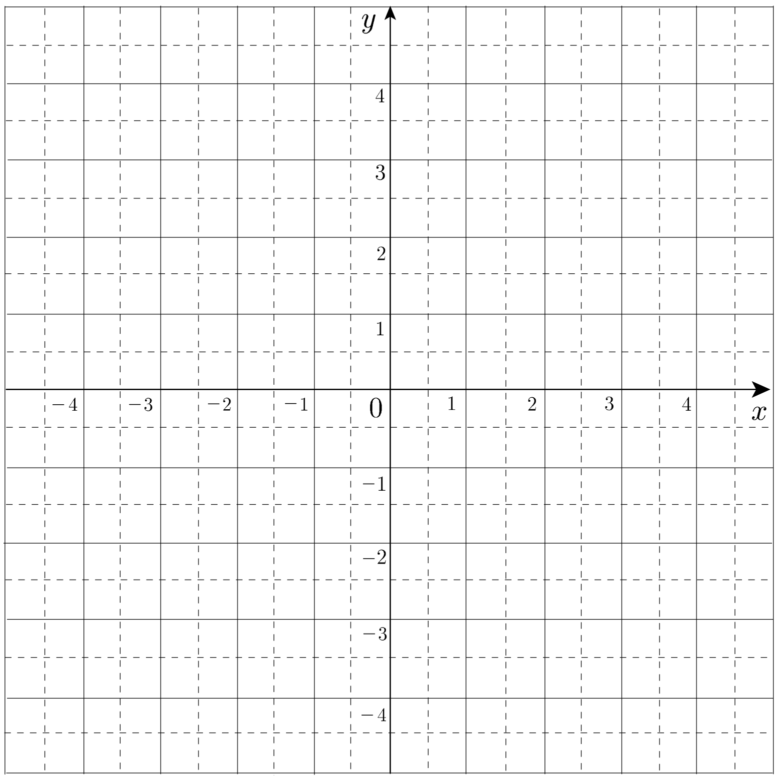
(4)

(5)

(6)

問 2

次の 1 次関数または
2 次関数のグラフをかけ。



(1) $y = 2x - 1$

(2) $x = -2$

(3) $y = 3$

(4) $y = x^2 + 1$

(5) $y = (x - 2)^2$

(6) $y = -x^2 - 2x$

< 練習問題 2 >

1　次の連立方程式を解け。

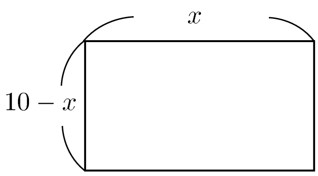
(1) $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a - 2b + 3c = -14 \\ 2a - 3b + c = -11 \\ 3a + b - 2c = 5 \end{cases}$

2　次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。。

(1) $y = (x-1)^2$　　(2) $y = -3(x+2)^2$

(3) $y = (x-2)^2 + 5$　　(4) $y = -\dfrac{1}{2}(x+3)^2 + 4$

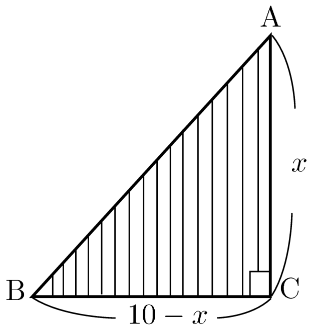
3　長さ 20cm の針金を折り曲げて長方形を作る。



(1)1 辺の長さを x とするとき，x の値の範囲を求めよ。

(2) 長方形の面積が 16cm^2 以上となる x の値の範囲を求めよ。

4



直角三角形 ABC があり直角をはさむ 2 辺 AC，BC の長さ の和は 10cm である。辺 AC の長さを x とおくとき，次の問に 答えよ。

(1) x のとり得る範囲はいくらか。

(2) 直角三角形 ABC の面積を y とするとき y を x で表せ。

(3) y の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

(4) 辺 AB の長さの平方を z とするとき，z を x で表せ。

(5) z の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

< 指数の拡張 >

a を n 個掛け合わせたものを a の n 乗といい、a^n で表す。

このとき、n を a^n の**指数**という。

m, n が自然数のとき、次の指数法則が成り立つ。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

問 1　次の計算をせよ。

(1)　$x^3 \times x^4$　(2)　$x^2 \times x$　(3)　$(x^3)^4$

(4)　$(x^2)^4$　(5)　$(ab)^3$　(6)　$(a^2b^3)^4$

指数が 0 や負の整数について、次のように定める。

$$a \neq 0 \text{ とき、} \qquad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

問 2　次の値を求めよ。

(1)　3^0　(2)　5^{-1}

(3)　5^{-2}　(4)　0.1^{-1}

(5)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　(6)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$

問 3　次の計算を行い、結果を負の指数を用いないで表せ。

(1)　$3x \div 5x^2$　(2)　$(-3x^2)^3$

(3)　$x^3y \div xy^3$　(4)　$\left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)^2 \times 27x^2y$

(5)　$12x^2y^3 \div \left(-2xy^2\right)^2$　(6)　$(-3ab^2)^2 \div (-a^2b)$

< 分数の指数 >

正の数 a と正の整数 n に対し

$$x^n = a$$

となる正の数 x を a の n **乗根**といい

$$x = \sqrt[n]{a}$$

で表す。$n = 2$ のとき

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} \ \text{(平方根)}$$

と略記する。整数 m に対し,

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

が成り立つ。

$a > 0$, m が整数, n が正の整数のとき, 分数の指数を次式で定める。

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad\qquad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})}$$

また, 指数がどのような整数や分数 (有理数) であっても, 次の指数法則が成り立つ。

$a > 0$, $b > 0$ で, p, q が有理数のとき,

$$\boxed{a^p \times a^q = a^{p+q} \qquad\qquad (a^p)^q = a^{pq} \qquad\qquad (ab)^p = a^p b^p}$$

例 $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = a^1 = a$

問 1 次の計算をせよ。(ただし, $a > 0$, $b > 0$ とする)

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5}$

(2) $a\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $\sqrt{ab^3} \div \sqrt[3]{a^2 b}$

(4) $\sqrt[6]{a^3 b} \times \sqrt[3]{ab} \div \sqrt[3]{ab^2}$

問 2 次の値を求めなさい。

(1) $4^{\frac{1}{2}}$

(2) $27^{\frac{2}{3}}$

(3) $8^{\frac{2}{3}}$

(4) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

(5) $(-4)^3$

(6) $(64)^{\frac{1}{3}}$

(7) $9^{\frac{3}{2}}$

(8) $16^{\frac{3}{4}}$

< 指数関数とそのグラフ >

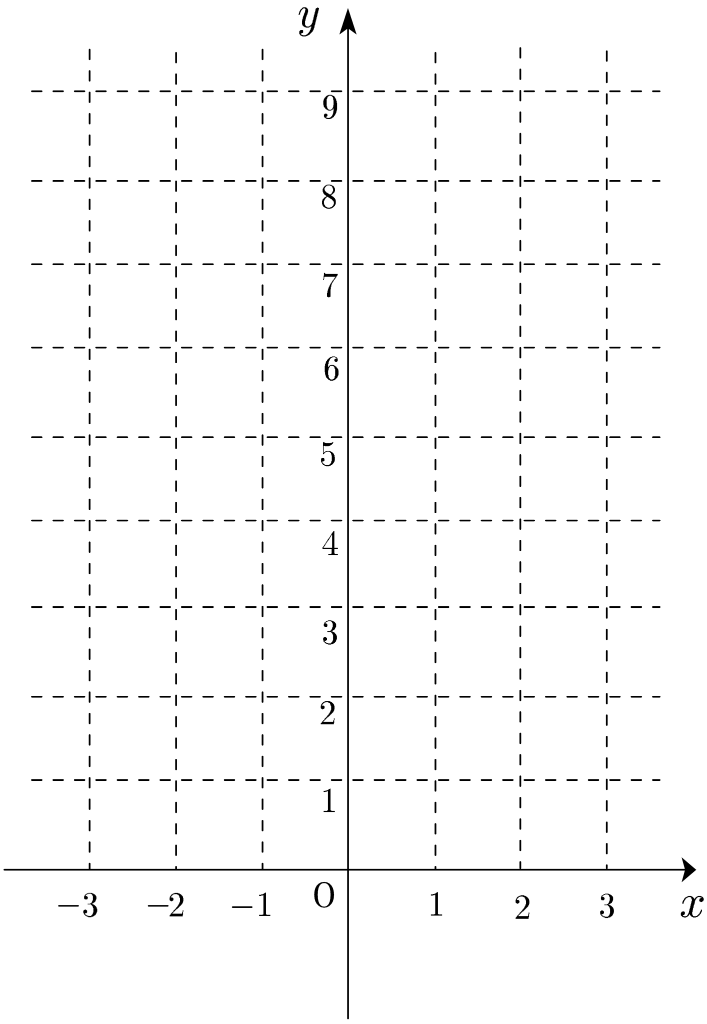
問　(1) $y = 2^x$ と, (2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = 2^x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$

(2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$



< 常用対数 >

「$100 = 10^r$ となる r の値はいくらか」という問題の答えは 2 である。

このことを

$\log_{10} 100 = 2$　　　　(log はログと読む。)

と表す。

$\log_{10} 100$ ということは、「100 は 10 の何乗になるか」という意味である。

このことを、一般化すると、正の数 R に対して

$$R = 10^r$$

となるような数 r を、

$$r = \log_{10} R$$

と表す。$\log_{10} R$ を R の**常用対数**という。また 10 を**底**という。

100 は 10^2 である。これを $\log_{10} 100 = 2$ と表し、100 の常用対数は 2 であることを意味する。

つまり、対数という意味は「与えられた数に対する指数のこと」と考えるとよい。

問 1　次の式を $r = \log_{10} R$ の形の式になおせ。

(1)　$1000 = 10^3$　　(2)　$1 = 10^0$

(3)　$0.01 = 10^{-2}$　　(4)　$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

問 2　次の値を求めよ。

(1)　$\log_{10} 100$　　(2)　$\log_{10} 1$

(3)　$\log_{10} 0.1$　　(4)　$\log_{10} \sqrt{10}$

< 一般の対数 >

$8 = 2^3$ である。このことを

$$\log_2 8 = 3$$

と表して、これを

「2 を底とする 8 の対数は 3 である。」という。

一般に、$R = a^r$ のとき　　(a は 1 でない正の数とする)

$$\log_a R = r$$

と表し、

「a を底とする R の対数は r である」という。

$$\boxed{\begin{array}{c} R = a^r \\ \Updownarrow \\ r = \log_a R \end{array}}$$

つぎに、$\log_a M, \log_a N$ の値が与えられているとき、

1. $\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$

の式が成り立つ。

(証明)

$$\log_a M = m, \qquad \log_a N = n$$

とおくと、

$$M = a^m, \qquad N = a^n$$

となる。

$$MN = M \times N = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

であるから

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

となる。(証明終)

研究　指数法則

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

を利用して、次の性質を証明せよ。

2. $\boxed{\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$

3. $\boxed{\log_a M^n = n \log_a M}$

問 1　次式を $r = \log_a R$ の形にせよ。

(1)　$32 = 2^5$　　(2)　$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$　　(3)　$\dfrac{1}{4} = 2^{-2}$

問 2　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\log_3 27$　　(2)　$\log_{10} \dfrac{1}{10000}$

(3)　$\log_4 2 + \log_4 32$　　(4)　$\log_3 \sqrt{54} - \log_3 \sqrt{6}$

(5)　$\log_2 \dfrac{8}{3} + \log_2 6$　　(6)　$\log_5 75 - \log_5 3$

< 底の変換公式 >

a を正の数で，$a \neq 1$ とする。

$a^0 = 1$,　$a^1 = a$ であるから、

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

が成り立つことがわかる。

次に、a を底とする対数 $\log_a b$ を、正数 $c(\neq 1)$ を底とする対数で表してみよう。

$$\log_a b = p$$

とおくと

$$a^p = b$$

c を底とする両辺の対数をとると

$$\log_c a^p = \log_c b \qquad p\log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ であるから、$\log_c a \neq 0$

したがって

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

(底の変換の公式)

とくに

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

問 1　次の式を計算せよ。

(1)　$\log_{10} 60 + 2\log_{10}\sqrt{5} - \log_{10} 3$

(2)　$\log_2 4 - \log_2 3 + \log_2 6$

(3)　$\log_8 5 \cdot \log_{49} 16 \cdot \log_5 7$

(4)　$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

問 2　次の対数計算で正解ならば○を，間違いの場合は正解を書け。

(1)　$\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10}(2+3) = \log_{10} 5$

(2)　$\log_{10}\dfrac{1}{8} = \log_{10} 1 - \log_{10} 8 = 1 - \log_{10} 2^3 = 1 - 3\log_{10} 2$

(3)　$2\log_{10} 5 + \log_{10} 7 = 2\log_{10}(5\times 7) = 2\log_{10} 35$

(4)　$\log_{10} 3 - \log_{10} 6 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 6}$

＜ 対数関数とそのグラフ ＞

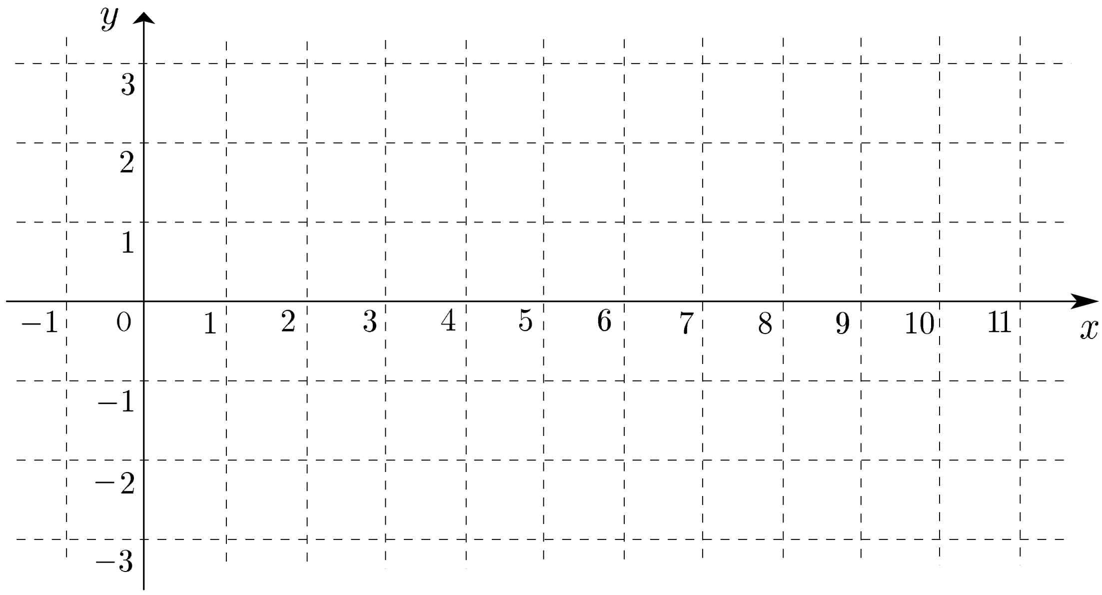
問 (1) $y = \log_2 x$ と, (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = \log_2 x$

x	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y										

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

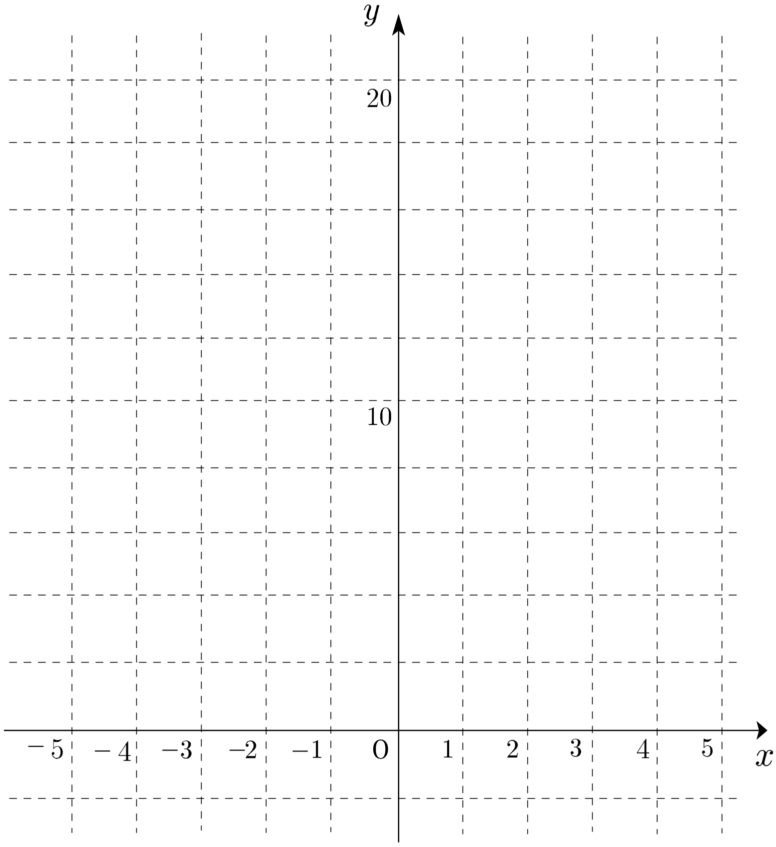
x	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y										



< 関数のグラフ >

問 1　次の関数のグラフを同じ座標平面上にかけ。

1. $y = x^2$
2. $y = x$
3. $y = 2^x$
4. $y = 2^{-x}$



問 2　1. $y = x$ と $y = x^2$ の交点の座標を求めよ。

2. $x \geqq 0$ のとき、$y = x^2$ と $y = 2^x$ の交点の座標を求めよ。

3. $x \leqq 0$ のとき、$y = x^2$ と $y = 2^{-x}$ の交点の座標を求めよ。

< 指数方程式・対数方程式 >

例題 1　$2^{3x-2} = 32$ を解け。

(解)　$32 = 2^5$　より　$2^{3x-2} = 2^5$　よって　$3x - 2 = 5 \Rightarrow$ $\boxed{x = \dfrac{7}{3}}$

問 1　次の方程式を解け。

(1)　$3^x = 81$

(2)　$2^{2x-1} = 64$

(3)　$3^{2x-1} = 243$

(4)　$2^{3x} = \dfrac{1}{4}$

(5)　$3^{x+1} = \sqrt{3}$

(6)　$4^{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

例題 2　$\log_3 x - \log_3 4 + \log_3 5 = 2$ を解け。

(解)　$\log_3 \dfrac{x \times 5}{4} = \log_3 9$　より　$\dfrac{5x}{4} = 9 \Rightarrow$ $\boxed{x = \dfrac{36}{5}}$

問 2　次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x = 3$

(2)　$\log_3 3x = 4$

(3)　$\log_2 (x+1) - \log_2 3 = 1$

(4)　$\log_3 \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$

(5)　$\log_2 (x-1) + \log_2 5 = -1$

(6)　$\log_3 6x - \log_3 5 + \log_3 2 = 3$

< 指数関数と対数関数の比較 >

指数関数 $y = 2^x$ 　　　　　　　　　対数関数 $y = \log_2 x$

1. 定義

真数 $M > 0$

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

底 $a > 0$ ， $a \neq 1$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad\qquad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

2. 指数法則

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\longleftrightarrow$ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $\longleftrightarrow$ $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$ $\longleftrightarrow$ $\log_a M^k = k \log_a M$

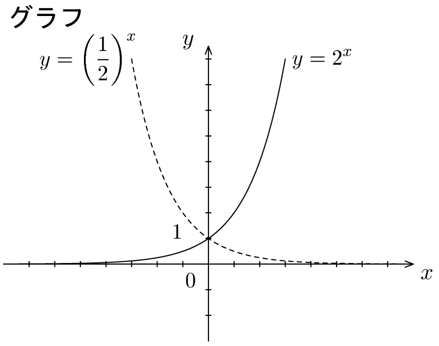
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ 　(底の変換の公式)

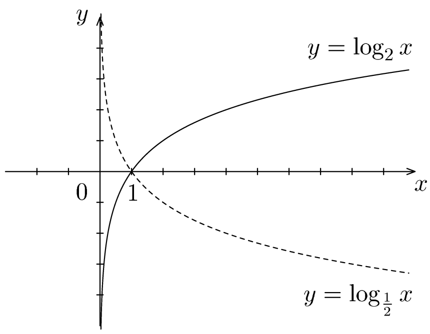
④ $(ab)^n = a^n b^n$

(条件. $a > 0$, $b > 0$, m , n は実数)

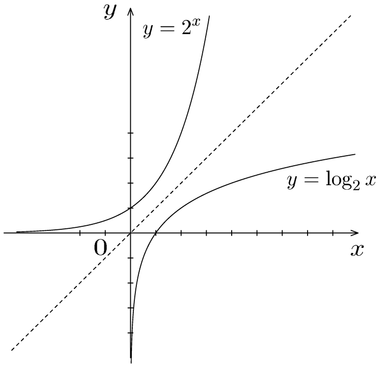
(条件. $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, k は実数
$b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$)

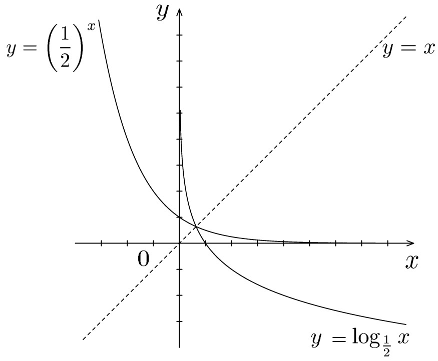
3. グラフ





4. グラフ





＜ 指数・対数の練習 ＞

1. 次の計算をせよ。 ただし $a>0$, $b>0$ とする。

(1) $a^5 \times a^{-3}$ (2) $(a^{-3})^2$ (3) $(a^2b^{-1})^2$ (4) $(ab^{-2})^{-2}$

(5) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$ (6) $a^2 \div a^{-3}$ (7) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}}$

2. 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$ (3) $\sqrt[4]{16}$ (4) $\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2^4}$

(5) $(0.1)^{-1}$ (6) $27^{\frac{2}{3}}$ (7) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}}$ (8) $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[6]{125}$

3. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=3^x$ (2) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

4. 次の値を計算せよ。

(1) $\log_{10} 1$ (2) $\log_{10} 10$ (3) $\log_{10} 100$ (4) $\log_{10} 0.1$

(5) $\log_{10} \dfrac{1}{100}$ (6) $\log_2 4$ (7) $\log_6 4 + \log_6 9$ (8) $\log_3 15 - \log_3 5$

(9) $\dfrac{1}{2}\log_7 49$ (10) $(\log_2 3) \times (\log_3 2)$

5. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=\log_3 x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

6. 次の方程式を解け。

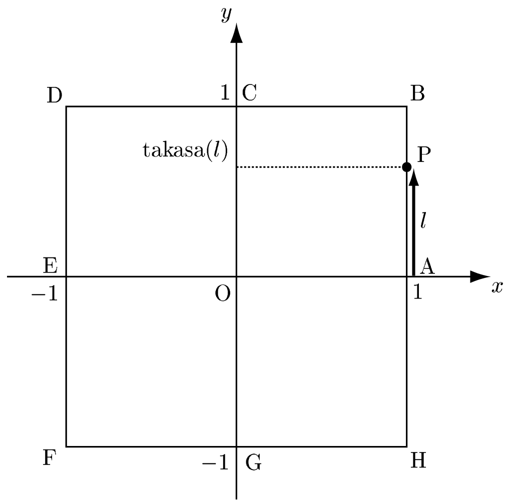
(1) $2^{x+2}=16$ (2) $\log_5 x - \log_5 2 = 2$

< 四角関数 >

一辺の長さ 2 の正方形を右の図のように置く。点 P はこの正方形の周上を点 A からスタートして、左回りに動いていく。点 A から測った道のりの長さを l とし、その点 P の高さ (y 座標の値) を

$$\mathrm{takasa}(l)$$

で表す。



(1) 点 P が半周したとき (点 E の位置) の l の値を求めなさい。

(2) 次の各値を求めなさい。

$\mathrm{takasa}\left(\frac{1}{2}\right) =$ $\quad$ $\mathrm{takasa}(1) =$ $\quad$ $\mathrm{takasa}\left(\frac{3}{2}\right) =$

$\mathrm{takasa}(2) =$

$\mathrm{takasa}\left(\frac{7}{2}\right) =$ $\quad$ $\mathrm{takasa}(3) =$ $\quad$ $\mathrm{takasa}\left(\frac{5}{2}\right) =$

$\mathrm{takasa}(4) =$

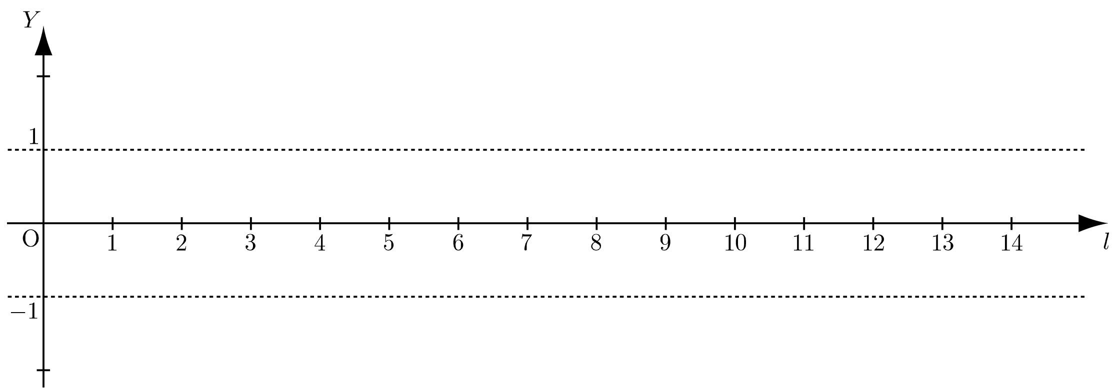
$\mathrm{takasa}\left(\frac{9}{2}\right) =$ $\quad$ $\mathrm{takasa}(5) =$ $\quad$ $\mathrm{takasa}\left(\frac{11}{2}\right) =$

$\mathrm{takasa}(6) =$

$\mathrm{takasa}\left(\frac{15}{2}\right) =$ $\quad$ $\mathrm{takasa}(7) =$ $\quad$ $\mathrm{takasa}\left(\frac{13}{2}\right) =$

$\mathrm{takasa}(8) =$

(3) 点 P が 1 周半するまでの $Y = \mathrm{takasa}(l)$ の変化の様子をグラフに描きなさい。

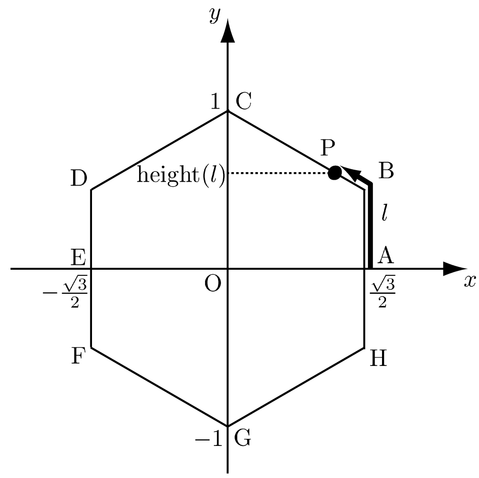


< 六角関数 >

一辺の長さ 1 の正六角形を右の図のように置く。点 P はこの正六角形の周上を点 A からスタートして、左回りに動いていく。点 A から測った道のりの長さを l とし、その点 P の高さ (y 座標の値) を

$$\mathrm{height}(l)$$

で表す。



(1) 点 P が半周したとき (点 E の位置) の l の値を求めなさい。

(2) 次の各値を求めなさい。

$$\mathrm{height}\left(\frac{1}{2}\right) = \qquad \mathrm{height}(1) =$$

$$\mathrm{height}\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$\mathrm{height}\left(\frac{5}{2}\right) = \qquad \mathrm{height}(2) =$$

$$\mathrm{height}(3) =$$

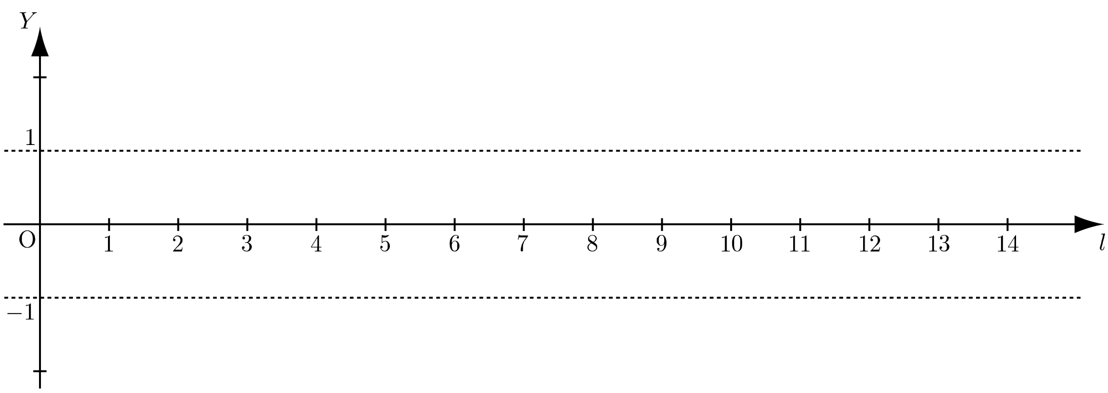
$$\mathrm{height}\left(\frac{7}{2}\right) = \qquad \mathrm{height}(4) =$$

$$\mathrm{height}\left(\frac{9}{2}\right) =$$

$$\mathrm{height}\left(\frac{11}{2}\right) = \qquad \mathrm{height}(5) =$$

$$\mathrm{height}(6) =$$

(3) 点 P が 2 周するまでの $Y = \mathrm{height}(l)$ の変化の様子をグラフに描きなさい。

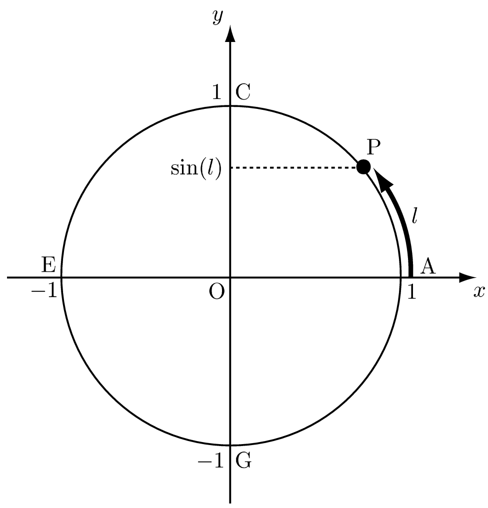


< 円関数 >

半径の長さ 1 の円を右の図のように置く。点 P はこの円周上を点 A からスタートして、左回りに動いていく。点 A から測った道のりの長さを l とし、その点 P の高さ (y 座標の値) を

$$\sin(l)$$

で表す。



(1) 点 P が半周したとき (点 E の位置) の l の値を求めなさい。

(2) 次の各値を求めなさい。

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$ $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$ $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$

$\sin(\pi) =$

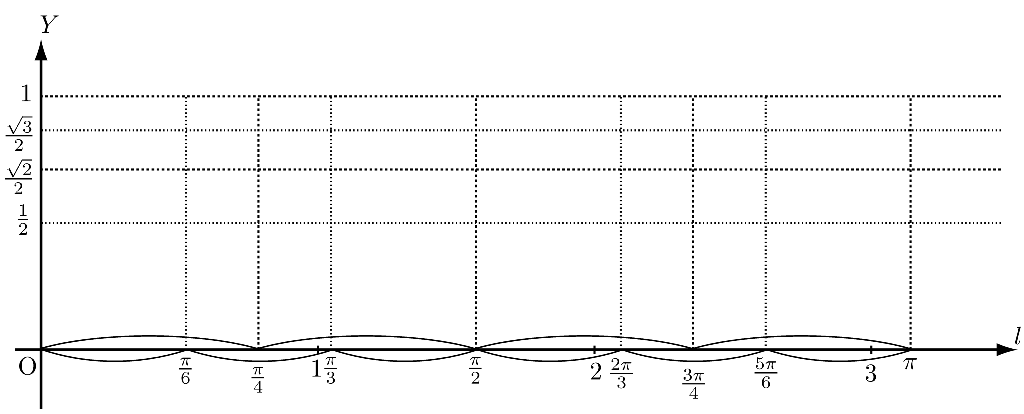
$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) =$ $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$ $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$

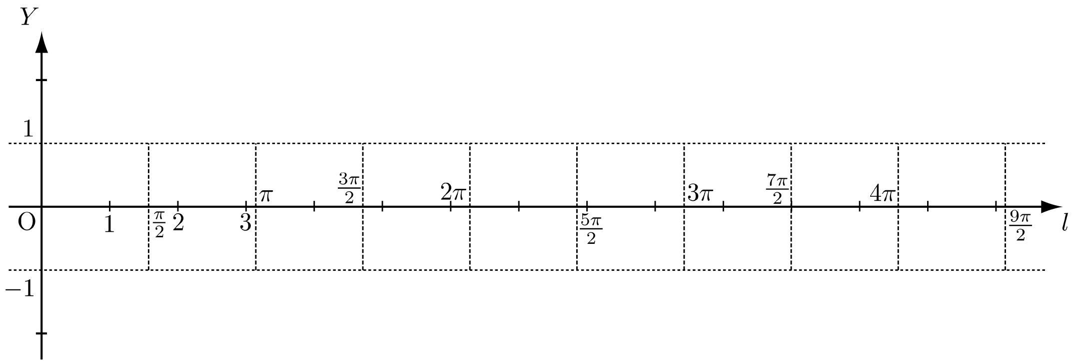
$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$ $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$ $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$\sin(2\pi) =$

(3) 点 P が半周するまでの $Y = \sin(l)$ の変化の様子をグラフに描きなさい。

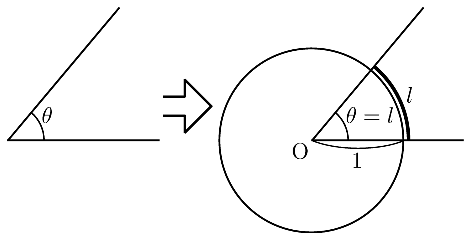


(4)　点 P が 2 周するまでの $Y = \sin(l)$ の変化の様子をグラフに描きなさい。

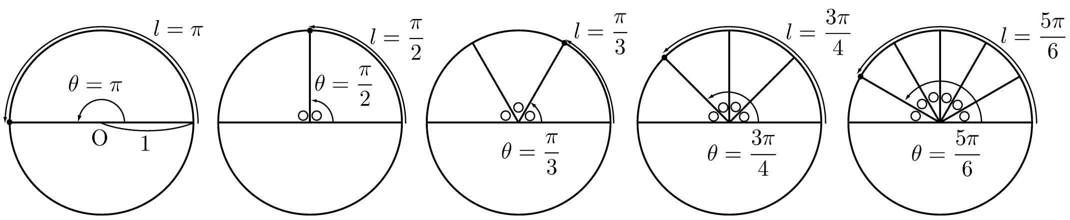


＜ラジアン＞

角 θ の大きさを表す数値として、その角を半径 1 の円の中心角としたときに対応する弧の長さの数値をそのまま流用する。この角度の測り方を **ラジアン** (弧度法) という。すなわち、



$\boxed{\text{半周の回転角} = \pi}$

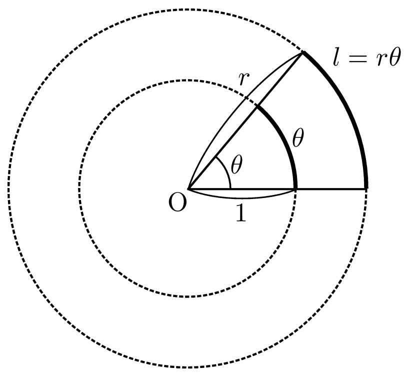


中心角の大きさが θ (ラジアン) のおうぎ形を考える。

(1)　弧の長さ

その半径が 1 ならば、おうぎ形の弧の長さは θ である。半径が r ならば、そのまま r 倍して、弧の長さ l は

$$\boxed{l = r\theta}$$



(2)　面積

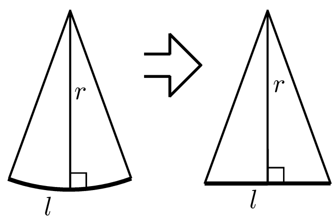
半径 r の円の面積は πr^2 だったから、中心角の大きさが θ (ラジアン) のおうぎ形の面積を S とすると

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{つまり} \quad \boxed{S = \frac{1}{2} r^2 \theta}$$

ところで、$l = r\theta$ だったから

$$S = \frac{1}{2} r\theta \times r = \frac{1}{2} lr$$

が成り立つ。



つまり、おうぎ形の弧の長さと半径がわかっていれば、中心角を使わなくても面積を求めることができる。

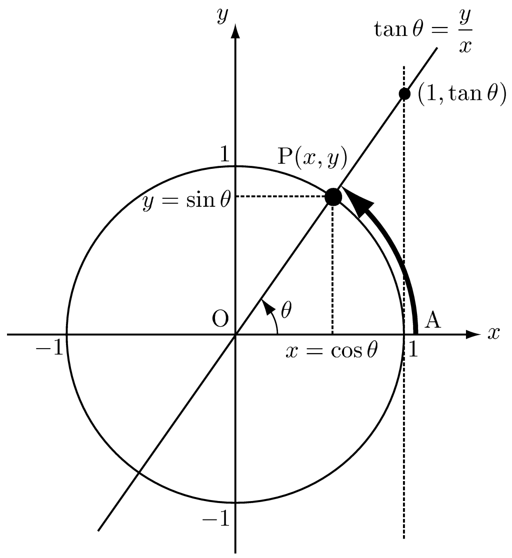
< 円関数としての三角関数 >

- 三角関数の定義

xy 座標平面において、原点を中心とする半径 1 の円 (これを **単位円** という) を考える。点 P がこの円周上を点 A$(1, 0)$ からスタートして、左回りに $\angle\mathrm{AOP} = \theta$ の位置まで動いたとき、

点 P の x 座標の値を $\cos\theta$
点 P の y 座標の値を $\sin\theta$
直線 OP の傾きの値を $\tan\theta$

で表す。



すなわち、点 P の座標を P(x, y) とすると、

$$\begin{aligned} \cos\theta &= x \\ \sin\theta &= y \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} \quad (\text{ただし、} x \neq 0 \text{ とする}) \end{aligned}$$

$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ の大きさを決めると、単位円周上の点 P の位置が決まる。

その x 座標や y 座標の **目盛り** を読み取ったものをそれぞれ $\cos\theta, \sin\theta$ で表している。例えば、点 P が y 軸よりも左側で止まれば、その x 座標すなわち $\cos\theta$ の値はマイナス (負) になる。点 P が x 軸よりも下側で止まれば、$\sin\theta$ の値がマイナスになる。($\cos\theta, \sin\theta$ は、三角形の辺の長さの比という意味だけでは納まらない)

また、直線 OP について、右へ 1 進んだとき、どれだけ上がったか (あるいは下がったか) を読み取った値を $\tan\theta$ で表している。

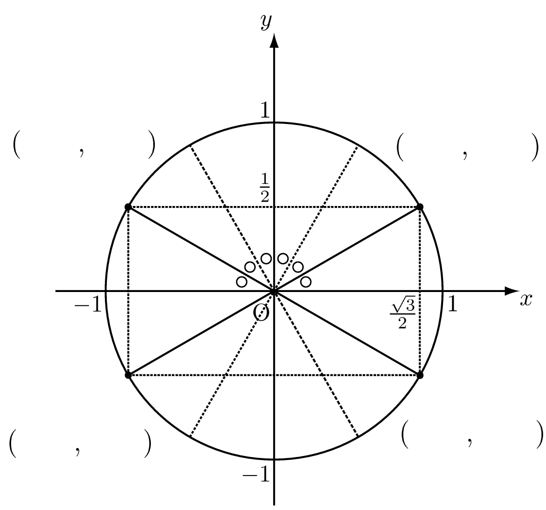
どれも、中学校で学んだものを、新しい記号で書き直しただけである。

- 三角関数の代表的な値

(1) 分母が 6「横長」

$$\begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{6} = \\[2ex] \sin\dfrac{5\pi}{6} = \\[2ex] \tan\dfrac{5\pi}{6} = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{6} = \\[2ex] \sin\dfrac{\pi}{6} = \\[2ex] \tan\dfrac{\pi}{6} = \end{cases}$$

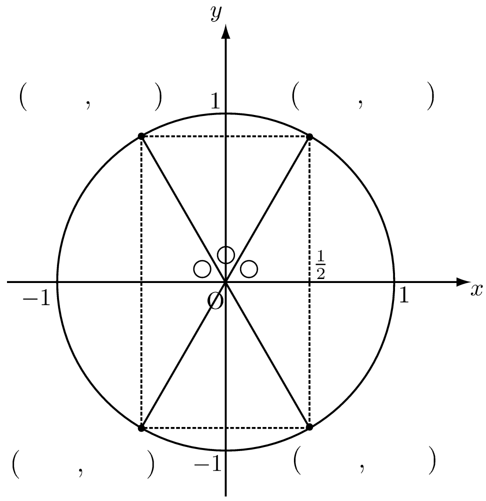
$$\begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{6} = \\[2ex] \sin\dfrac{7\pi}{6} = \\[2ex] \tan\dfrac{7\pi}{6} = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{11\pi}{6} = \\[2ex] \sin\dfrac{11\pi}{6} = \\[2ex] \tan\dfrac{11\pi}{6} = \end{cases}$$



(2) 分母が 3「縦長」

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2\pi}{3} = \\ \sin\dfrac{2\pi}{3} = \\ \tan\dfrac{2\pi}{3} = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{3} = \\ \sin\dfrac{\pi}{3} = \\ \tan\dfrac{\pi}{3} = \end{cases}$$

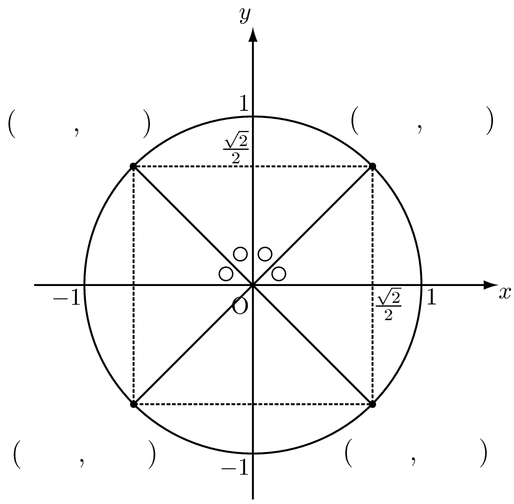
$$\begin{cases} \cos\dfrac{4\pi}{3} = \\ \sin\dfrac{4\pi}{3} = \\ \tan\dfrac{4\pi}{3} = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{3} = \\ \sin\dfrac{5\pi}{3} = \\ \tan\dfrac{5\pi}{3} = \end{cases}$$



(3) 分母が 4「正方形」

$$\begin{cases} \cos\dfrac{3\pi}{4} = \\ \sin\dfrac{3\pi}{4} = \\ \tan\dfrac{3\pi}{4} = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{4} = \\ \sin\dfrac{\pi}{4} = \\ \tan\dfrac{\pi}{4} = \end{cases}$$

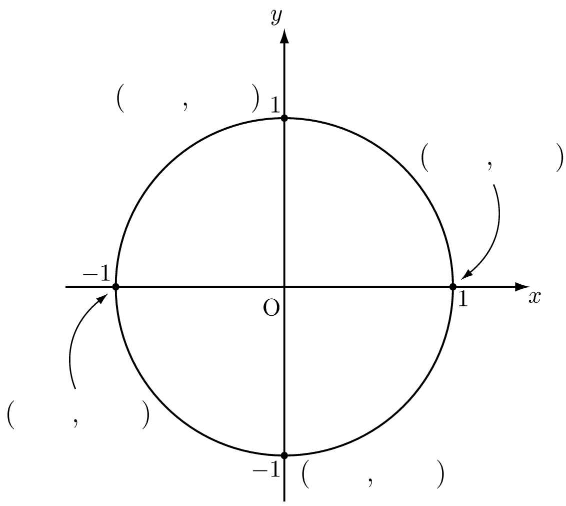
$$\begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{4} = \\ \sin\dfrac{5\pi}{4} = \\ \tan\dfrac{5\pi}{4} = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{4} = \\ \sin\dfrac{7\pi}{4} = \\ \tan\dfrac{7\pi}{4} = \end{cases}$$



(4) 分母が 1 と 2「座標軸上」

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2} = \\ \sin\dfrac{\pi}{2} = \\ \tan\dfrac{\pi}{2} = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 0 = \\ \sin 0 = \\ \tan 0 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\pi = \\ \sin\pi = \\ \tan\pi = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{3\pi}{2} = \\ \sin\dfrac{3\pi}{2} = \\ \tan\dfrac{3\pi}{2} = \end{cases}$$



- いろいろな公式

(1) 基本公式

単位円 (原点中心の半径 1 の円) の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1$$

である。単位円上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ について

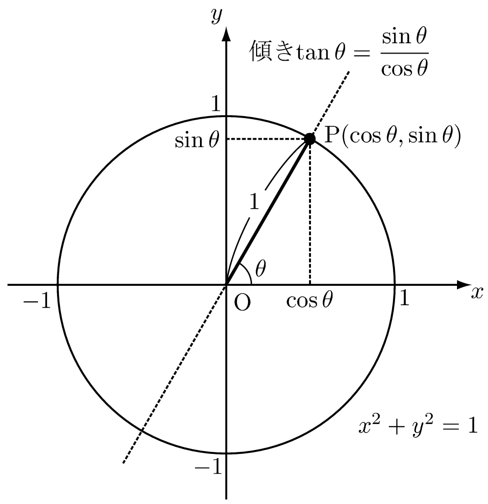
$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

が成り立つ。$(\cos\theta)^2$ を $\cos^2\theta$ と略記すると約束して、

基本公式

$$\text{(I)} \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

が得られる。



この式は、$\sin^2\theta$ あるいは $\cos^2\theta$ を移行して

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = (1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = (1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)$$

の形で用いることも多い。

(注) $\cos\theta^2$ と書いたら、$\cos(\theta \times \theta)$ の意味として読み取る。2 乗の位置に注意。

直線 OP の傾きである $\tan\theta$ はそのまま

$$\text{(II)} \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

となる。

公式 (I) の両辺を $\cos^2\theta$ で割り、(II) を代入すると、公式 (III) が得られる：

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta + \sin^2\theta &= 1 \\
\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\
1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\
\text{(III)} \quad 1 + \tan^2\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

(2) 角の変換

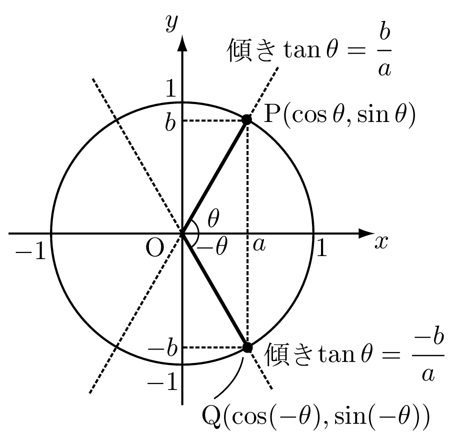
(i) $-\theta$

右回りに角 $-\theta$ 進んだ点

$$\mathrm{Q}(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$$

と左回りに角 θ 進んだ点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ は、x 軸に関して対称なので

$$\begin{cases}
\cos(-\theta) = \cos\theta & [x \text{ 座標は同じ}] \\
\sin(-\theta) = -\sin\theta & [y \text{ 座標は逆符号}] \\
\tan(-\theta) = -\tan\theta &
\end{cases}$$



(注) $\cos(-\theta)$ の括弧内のマイナスを前に出して、

$$\cos(-\theta) = -\cos\theta$$

とする **間違い** が多いので気をつけて欲しい。

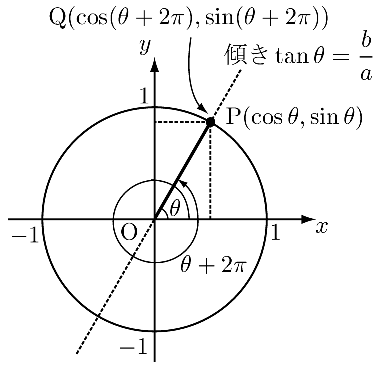
(ii) $\theta + 2n\pi$

角 $\theta + 2n\pi$ (n は整数) 進んだ点、つまり、余分に n 周した点

$$\mathrm{Q}(\cos(\theta + 2n\pi), \sin(\theta + 2n\pi))$$

は、角 θ 進んだ点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ と一致するので

$$\begin{cases} \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \\ \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta \\ \tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta \end{cases}$$



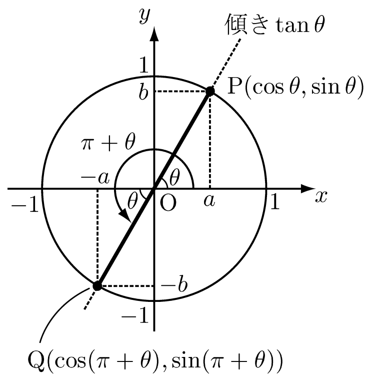
(iii) $\pi + \theta$

角 $\pi + \theta$ (半周からさらに θ) 進んだ点

$$\mathrm{Q}(\cos(\pi + \theta), \sin(\pi + \theta))$$

と角 θ 進んだ点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ は、原点に関して対称なので

$$\begin{cases} \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta & [\,x \text{ 座標は逆符号}] \\ \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta & [\,y \text{ 座標は逆符号}] \\ \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \end{cases}$$



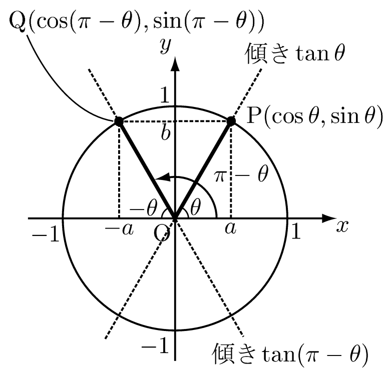
(iv) $\pi - \theta$

角 $\pi - \theta$ (半周の θ 手前) 進んだ点

$$\mathrm{Q}(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta))$$

と角 θ 進んだ点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ は、y 軸に関して対称なので

$$\begin{cases} \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta & [\,x \text{ 座標は逆符号}] \\ \sin(\pi - \theta) = \sin\theta & [\,y \text{ 座標は同じ}] \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \end{cases}$$



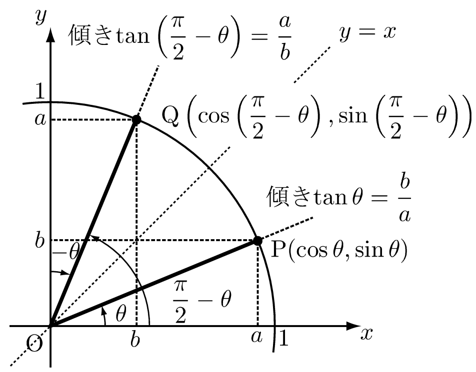
(v) $\dfrac{\pi}{2} - \theta$

角 $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ (直角の θ 手前) 進んだ点

$$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

と角 θ 進んだ点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ は、直線 $y = x$ に関して対称なので、x 座標の値と y 座標の値が入れ替わって

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$



(注) 以上の (ii) から (v) は、加法定理を使えば機械的に導くことができるので、無理に覚える必要はない。

(3) 加法定理

(i) 加法定理

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 　　 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

コス・コス、マイナス、サイン・サイン

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 　　 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

サイン・コサイン、コサイン・サイン

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 　　 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

イチ、マイ、タン・タン
タン、プラ、タン

(ii) 2 倍角公式 ($2\theta=\theta+\theta$ として、加法定理を利用)

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ 　　 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\cos^2\theta-1\quad[\sin^2\theta=1-\cos^2\theta]$

$=1-2\sin^2\theta\quad[\cos^2\theta=1-\sin^2\theta]$

(iii) 半角公式 [次数下げの公式]

$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$ 　より 　　 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ 　より

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ 　　 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

(iv) 三角関数の合成

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の一次式の形

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$

を sin だけを使った式に書き直すことができる。

$\sin\theta$ の係数の a をコサイン (x 座標)、$\cos\theta$ の係数の b をサイン (y 座標) として考えると

$$\begin{aligned} a\sin\theta+b\cos\theta &= \sin\theta\times a+\cos\theta\times b \\ &= \sin\theta\times(\text{コサイン})+\cos\theta\times(\text{サイン}) \\ &\quad \text{サイン・コサイン、コサイン・サイン} \end{aligned}$$

として、sin の加法定理の形にできる。

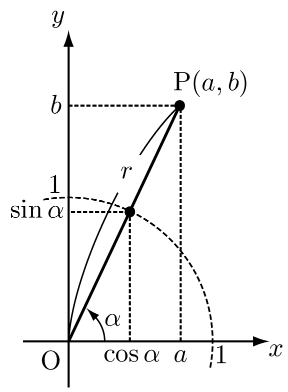
ただし、点 $\mathrm{P}(a,b)$ は単位円上にあるとは限らない。

そこで、線分 OP の長さ r とその回転角 α を測って

$r=\sqrt{a^2+b^2}$

$a=r\cos\alpha$

$b=r\sin\alpha$



とすると、

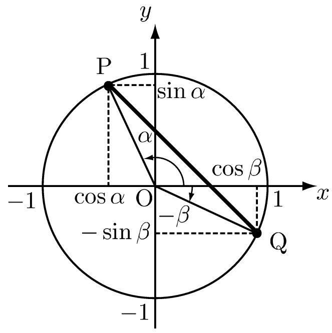
$$\begin{aligned} a\sin\theta+b\cos\theta &= \sin\theta\times a+\cos\theta\times b \\ &= \sin\theta\times r\cos\alpha+\cos\theta\times r\sin\alpha \\ &= r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha) \\ &= r\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

(v) 加法定理の証明

(注意) 加法定理の証明は、何通りもあるが、今の段階でできる証明法には、あまり率直なものはない。ベクトルや行列、オイラーの公式などを利用すると、もっと簡単な証明が得られる。加法定理については、今は「語呂合わせ」で暗記しておけばよい。

一方、加法定理から得られる 2 倍角公式などは、自力で導けるようになって欲しい。

単位円を用いた加法定理の証明を紹介するが、上でも述べたように、この証明法にそれほどこだわる必要はない。



まず、cos についての加法定理を証明する。

単位円上に回転角がそれぞれ $\alpha, -\beta$ である点 P,Q をとる。

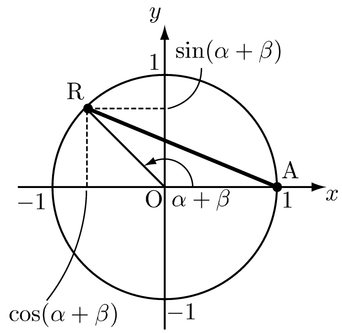
点 P の座標は

$$\mathrm{P}(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

であり、点 Q の座標は $\mathrm{Q}(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ すなわち

$$\mathrm{Q}(\cos\beta, -\sin\beta)$$

である。



一方、改めて単位円上に回転角が $\alpha+\beta$ である点 R をとると

$$\mathrm{R}(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$$

である。点 $\mathrm{A}(1, 0)$ とすると、$\triangle\mathrm{OQP} \equiv \triangle\mathrm{OAR}$ だから、$\mathrm{QP} = \mathrm{AR}$ となる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{QP}^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 \\
&= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2 + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\
\mathrm{AR}^2 &= \{\cos(\alpha+\beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha+\beta)\}^2 \\
&= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta) \\
&= 2 - 2\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

だから、$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$ となり

$$\therefore \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

ここで、β の部分に $-\beta$ を代入すれば、

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha(-\sin\beta)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

sin については、$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta), \cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ を利用して

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right\} &= \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right\} \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

β の部分に $-\beta$ を代入すれば、$\sin(\alpha-\beta)$ の公式が得られる：

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\sin\beta)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

(1) $y=\sin x$ と $y=\cos x$ のグラフ

周期 2π の周期関数であり，

$y=\sin x$ のグラフは原点に関して対称 (奇関数)

$y=\cos x$ のグラフは y 軸に関して対称 (偶関数)

グラフを描く手順

1. xy 座標平面を描くが，その横軸を長めにとる。横軸のメモリは「π」を基準とする。
ただし，横軸の「1」の長さと比べて，約「3.14」の位置に「π」をとる。

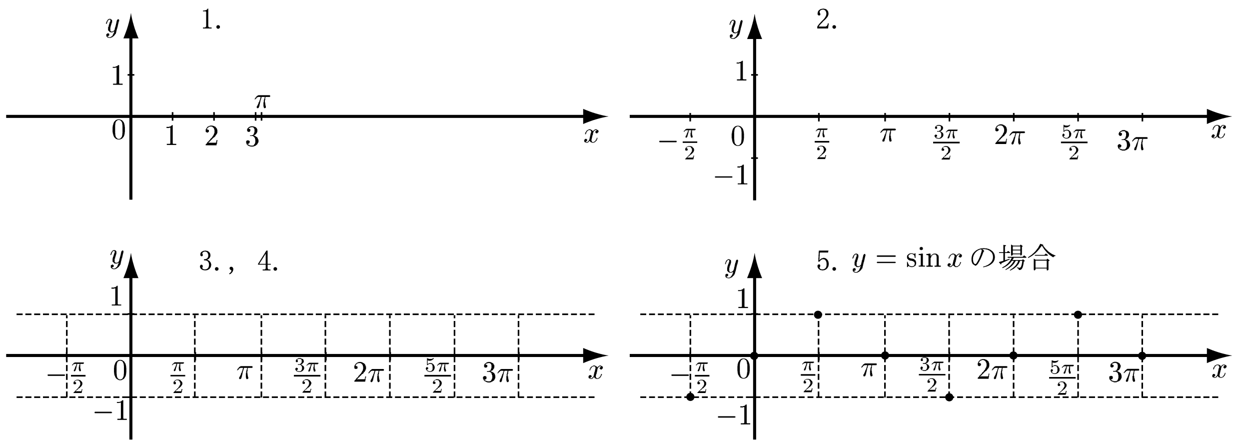
2. 横軸に $\cdots, -\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}, \cdots$ の目盛りを入れる。

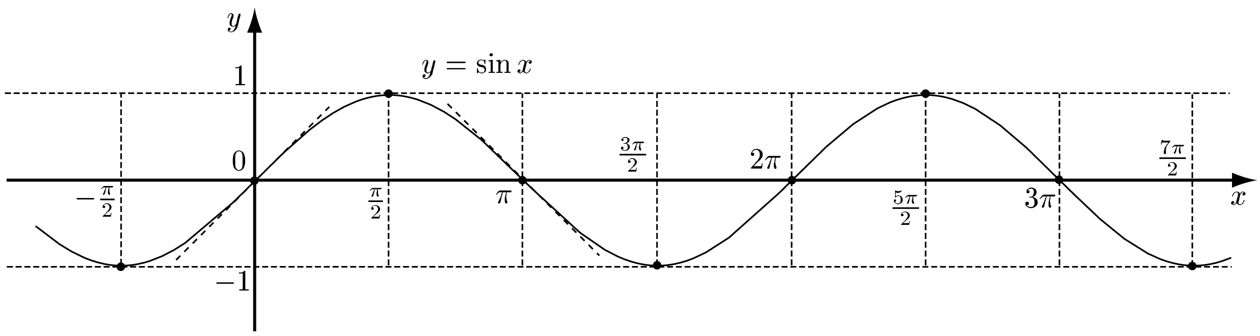
3. 水平な直線 $y=1$, $y=-1$ を点線で描く。

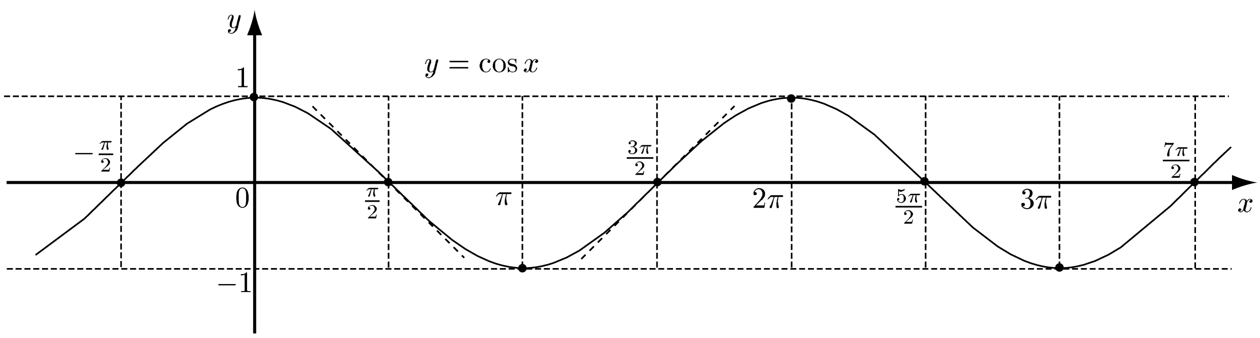
4. 横軸に目盛りをとった $\frac{\pi}{2}$, $\pi, \cdots$ などの位置に鉛直な線分 ($y=1$ と $y=-1$ の間) を点線で描く。

5. x の値が $\cdots, 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}, \cdots$ のときの y の値を求め，座標平面にプロットする。

6. 滑らかな「波」を描く。ただし，横軸と交わる点では，増加の時は傾き「1」，減少の時は傾き「-1」となるように注意する。







(2) $y = A\sin(x-p)$ のグラフ；($\sin$ の内側の x の係数が 1 なので周期は変わらない)

グラフを描く手順

1. xy 座標平面を描く。

2. 横軸に $\cdots, -\frac{\pi}{2}+p,\ p,\ \frac{\pi}{2}+p,\ \pi+p,\ \frac{3\pi}{2}+p,\ 2\pi+p,\ \frac{5\pi}{2}+p, \cdots$ の目盛りを入れる。

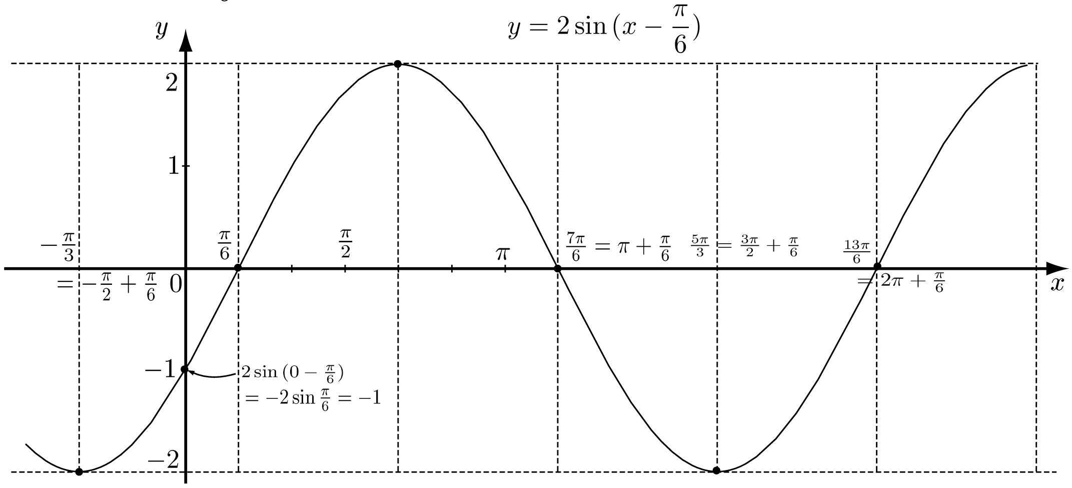
3. 水平な直線 $y = A,\ y = -A$ を点線で描く。

4. 横軸に目盛りをとった $p,\ \frac{\pi}{2}+p,\ \pi+p, \cdots$ などの位置に鉛直な線分 ($y = A$ と $y = -A$ の間) を点線で描く。

5. x の値が $\cdots, p,\ \frac{\pi}{2}+p,\ \pi+p, \cdots$ のときの y の値を求め，座標平面にプロットする。

6. 滑らかな「波」を描く。なお，$x = 0$ の時 y の値を求め，y 軸との交点の位置も記入しておく。

例： $y = 2\sin(x - \dfrac{\pi}{6})$

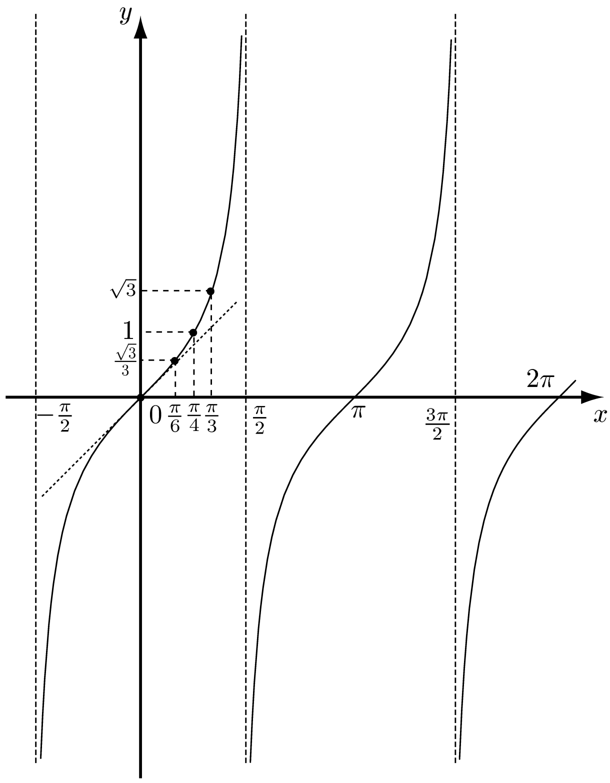


(3) $y = \tan x$ のグラフ

周期 π の周期関数であり，原点に関して対称 (奇関数) である。

$x = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2}, \cdots$ などでは $\tan x$ は定義されないので，これらの点でグラフは途切れている。

すなわち，x 軸に垂直な直線 $x = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2}, \cdots$ が漸近線となる。



グラフを描く手順

1. 座標平面を描く。横軸だけでなく，縦軸も長くとる。

2. 横軸に $\cdots, -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2}, \cdots$ の目盛りを入れる。

3. 横軸に目盛りをとった $\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}, \cdots$ などの位置に鉛直な (縦軸と同じくらいの長さの) 線分を点線で描く。

4. x の値が $\cdots, 0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}$ などのときの y の値を求め，座標平面にプロットする。

5. プロットした点を滑らかな曲線で結ぶ。なお，横軸と交わる点では，傾き「1」となるように注意する。また，3. で描いた漸近線と交わらず，しかも，限りなく近づくような曲線を描く。

6　図形への応用

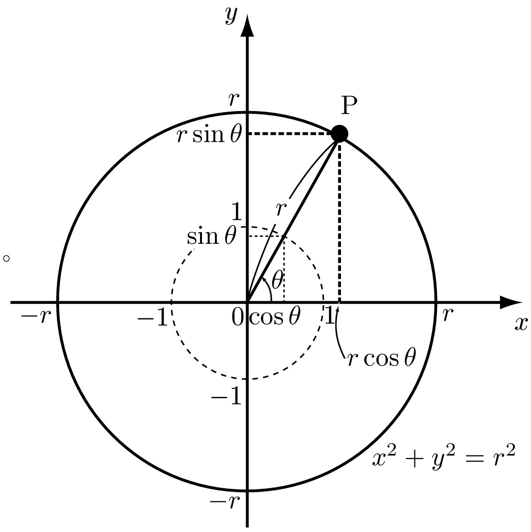
(1) 円のパラメーター表示

原点を中心とする半径 r の円周上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

で表される。

これを，円のパラメーター表示 (媒介変数表示) と言う。



(2) 直角三角形への応用

右図のような直角三角形において

$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

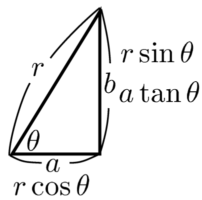
$b = a\tan\theta$

が成り立つ。つまり，

(横の長さ)=(斜辺；半径)×(コサイン；横軸)

(縦の長さ)=(斜辺；半径)×(サイン；縦軸)

(縦；上がった長さ)=(横；進んだ長さ)×(タンジェント；傾き)



三角比とは，これらの式を分数 (比の値) の形で表したものである：

$$\cos\theta = \frac{a}{r}\ ,\quad \sin\theta = \frac{b}{r}\ ,\quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

(3) 一般三角形への応用

三角形 ABC の 3 つの内角の大きさを A, B, C(斜体大文字) で表し，各頂点と向かい合う辺の長さをそれぞれ，a, b, c で表す。

(i) 正弦定理「一辺とその両端の角」

三角形 ABC の外接円の半径の長さを R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

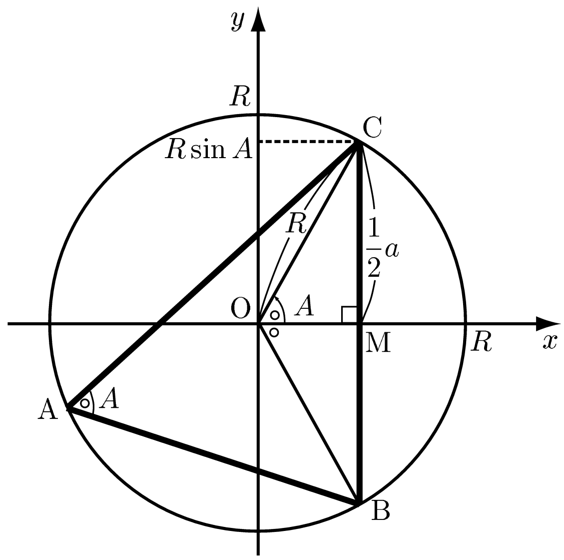
(証明)

三角形 ABC の外接円の中心を O とし，辺 BC が x 軸と垂直に交わる (交点を M とする) ように座標軸を設定する。点 M の定め方から

$$\angle\mathrm{MOC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC},\ \mathrm{MC} = \frac{1}{2}a$$

円周角の定理から，$\angle\mathrm{MOC} = A$ がわかるので，点 C の座標は

$$\mathrm{C}(R\cos A,\ R\sin A)$$



一方，この y 座標は MC の長さに等しいので，

$$R\sin A = \frac{1}{2}a$$

$$\therefore\ 2R = \frac{a}{\sin A}$$

同様にして $2R = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ が得られる。(証明終わり)

(ⅱ) 余弦定理その 1「二辺とその間の角」

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(証明)

右図のように三角形 ABC の

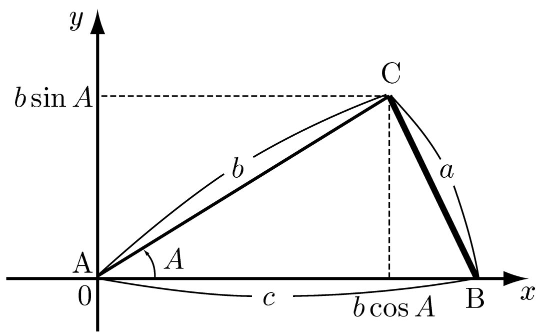
頂点 A を原点に重ね,

頂点 B を x 軸上の正の部分に置き

頂点 C を $y > 0$ の部分に置く

ように座標軸を定める。

このとき，B, C の座標はそれぞれ



B(c, 0) , C($b\cos A$, $b\sin A$)

となる。辺 BC の長さの 2 乗を考えて

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos A)^2 + (b\sin A - 0)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A \\ &= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

他の式も同様にして得られる。(証明終わり)

(ⅲ) 余弦定理その 2「三辺」

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(証明)

余弦定理その 1 を式変形するだけ。(証明終わり)

(ⅳ) 三角形 ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$
$$S = \frac{1}{2}ca\sin B$$
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

(証明)

辺 AB を底辺と考えたときの高さが

$b\sin A$

で求められる (右上図参照) ので

$$S = \frac{1}{2}c \cdot b\sin A = \frac{1}{2}bc\sin A$$

他の式も同様にして得られる。(証明終わり)

＜ 三角関数の練習 ＞

問 1. 次の θ について $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$　　(2) $\theta = -\dfrac{3}{4}\pi$

問 2. 次の値を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}$　　(2) $\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\tan\dfrac{4}{3}\pi$

問 3. θ は第 1 象限の角 $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ で，$\sin\theta = \dfrac{1}{5}$ である。$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

問 4. $0 < \theta < \pi$ で　$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき　$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

問 5. 次の方程式を解け。ただし $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とする。

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

問 6. 次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ$　　(2) $\cos 165^\circ$　　(3) $\tan 15^\circ$

問 7. 加法定理を使って次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta + \sin(\theta + \dfrac{2}{3}\pi) + \sin(\theta + \dfrac{4}{3}\pi)$

問 8. 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表わせ。ただし r は正, $-\pi < \alpha \leqq \pi$ とする。

(1) $-\sin\theta + \cos\theta$　　(2) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

問 9. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = -\sin x + \cos x$　　(2) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

＜ 無理関数 1 ＞

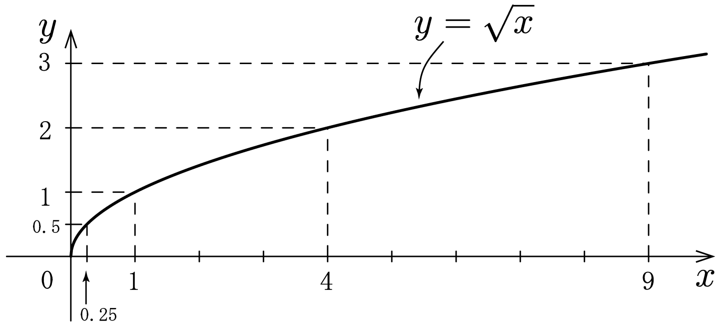
$\sqrt{}$ のついた関数を通常**無理関数**という。

例 1　$y = \sqrt{x}$ のグラフを描きたい。

$\sqrt{}$ の中は負になってはいけないので x は 0 以上の数を考える。

x と y の対応表

x	0	0.25	1	4	9
y	0	0.5	1	2	3



よりグラフは右図のようになる。無理関数の場合は「$\sqrt{}$ の中が負になってはいけない」という制限が自動的につく。このような x の範囲 ($x \geqq 0$) を**定義域**という。なお $\sqrt{\square}$ の値は常に 0 以上だから y の範囲は $y \geqq 0$ となる。y の範囲を**値域**という。

(注)　正の定数 a に対し，$x^2 = a (x > 0)$ となる数 x を正の平方根といい，$x = \sqrt{a}$ で表す。$\sqrt{a}$ は正の数である。負の平方根は $-\sqrt{a}$ である。なお，$\sqrt{0} = 0$ である。

例 2　無理関数 $y = \sqrt{x+1}$ を考える。

$\sqrt{}$ の中は 0 以上だから

$$x + 1 \geqq 0 \ \Rightarrow\ x \geqq -1$$

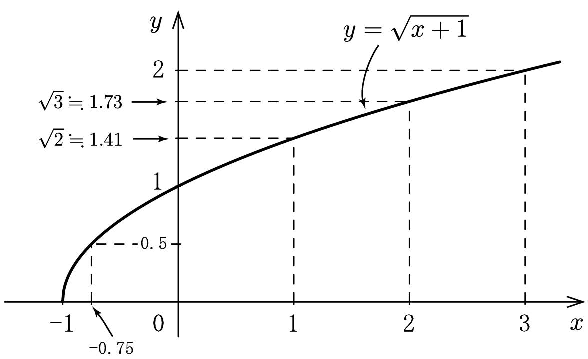
より

$\boxed{\text{定義域} : x \geqq -1}$

であり，値域は $\sqrt{\square} \geqq 0$ だから

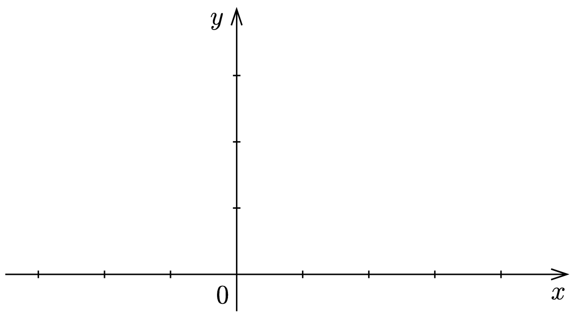
$\boxed{\text{値域} : y \geqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。



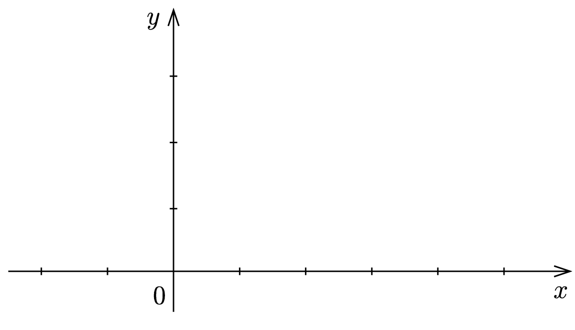
問　以下の無理関数の定義域と値域を求め，グラフを描け。

(1) $y = \sqrt{x+2}$



定義域 :　　　　　　，値域 :

(2) $y = \sqrt{x-1}$



定義域 :　　　　　　，値域 :

< 無理関数 2 >

例 1 無理関数 $y = \sqrt{3-x}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$3 - x \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \geqq x$

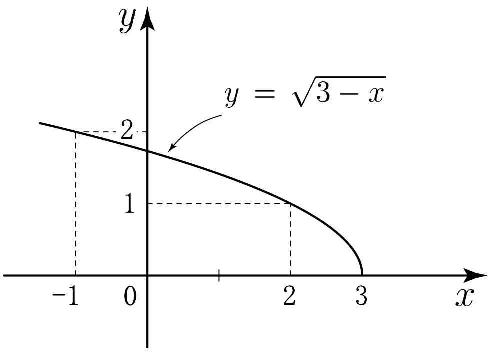
より

$\boxed{\text{定義域} : x \leqq 3}$

また $\sqrt{\square} \geqq 0$ より

$\boxed{\text{値域} : y \geqq 0}$

である。グラフは右図のようになる。



例 2 無理関数 $y = -\sqrt{x-1}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$x - 1 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geqq 1$

より

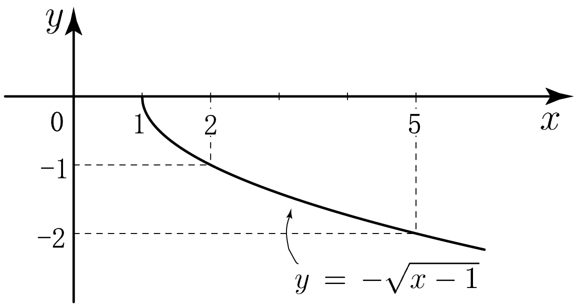
$\boxed{\text{定義域} : x \geqq 1}$

また $-\sqrt{\square} \leqq 0$

だから

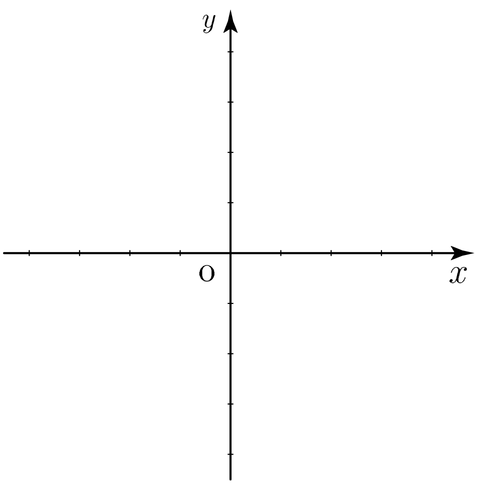
$\boxed{\text{値域} : y \leqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。



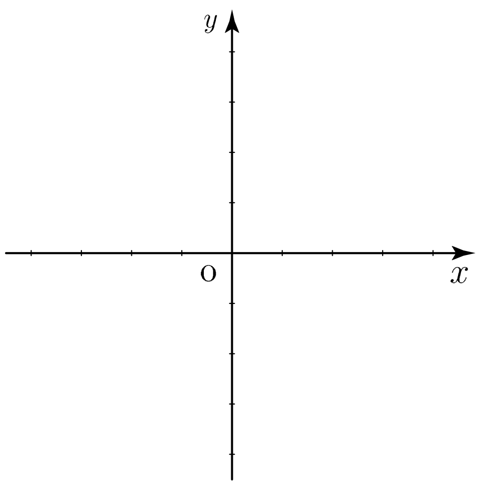
問 以下の無理関数の定義域と値域を求め，グラフを描け。

(1) $y = \sqrt{-x+1}$



定義域 : , 値域 :

(2) $y = -\sqrt{x+2}$



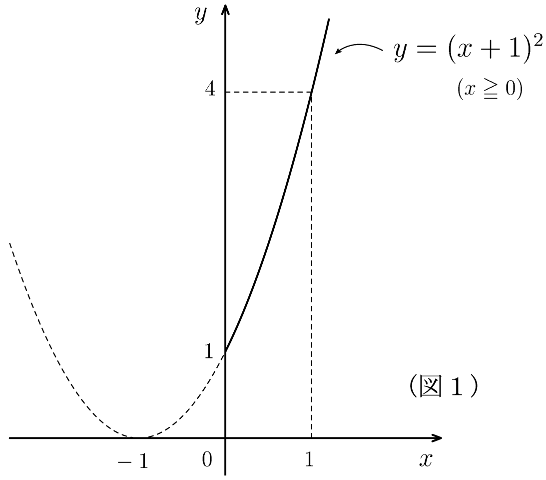
定義域 : , 値域 :

＜ 定義域の制限 ＞

　関数の通常の定義域をさらに制限する場合がある。
そのような場合の定義域に対応する値域を考える。

例 1　$y=(x+1)^2$ の通常の定義域は実数全体であり, 値域は $y \geqq 0$ である。

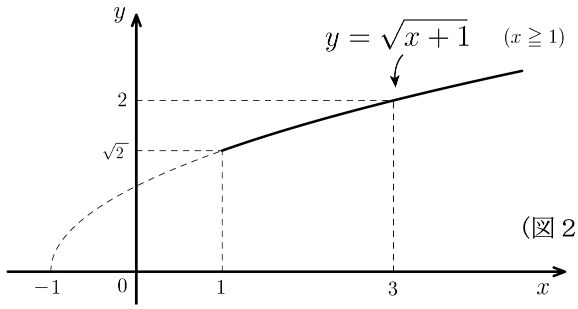
例 2　$y=(x+1)^2$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限する場合の値域は $y \geqq 1$ である。(図 1)



（図 1）

例 3　$y=\sqrt{x+1}$ の通常の定義域は $x \geqq -1$ であり値域は $y \geqq 0$ である。

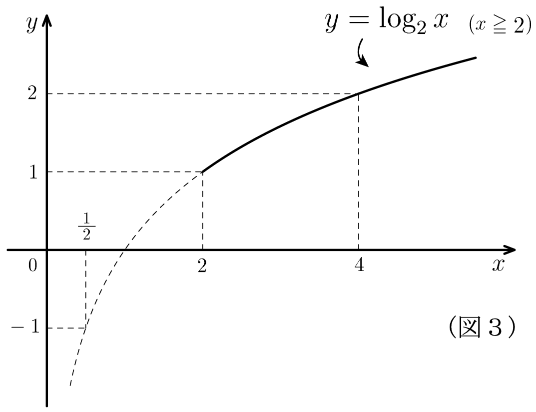
例 4　$y=\sqrt{x+1}$ の定義域を $x \geqq 1$ に制限する場合の値域は $y \geqq \sqrt{2}$ である。(図 2)



（図 2）

例 5　$y=\log_2 x$ の通常の定義域は $x>0$ であり値域は実数全体である。

例 6　$y=\log_2 x$ の定義域を $x \geqq 2$ に制限する場合の値域は $y \geqq 1$ である (図 3)



（図 3）

問　次の関数の (　) 内の定義域に対応する値域を求めよ。

(1) $y=(x-1)^2$　　$(x \geqq 2)$

(2) $y=\sqrt{x+3}$　　$(x \geqq 1)$

(3) $y=\log_3 x$　　$(x>0)$

(4) $y=2^x$　　(実数全体)

(5) $y=\sin x$　　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(6) $y=\cos x$　　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

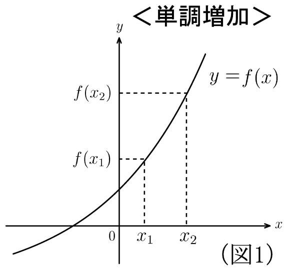
＜ 単調関数 ＞

図 1 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し，

$$x_1 < x_2 \quad ならば \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が常に成り立つとき， $f(x)$ は定義域内で**単調増加**という。

＜単調増加＞



(図1)

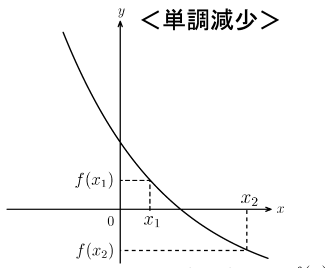
図 2 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し，

$$x_1 < x_2 \quad ならば \quad f(x_1) > f(x_2)$$

が常に成り立つとき，$f(x)$ は定義域内で**単調減少**という。

単調増加関数および単調減少関数をまとめて**単調関数**という。

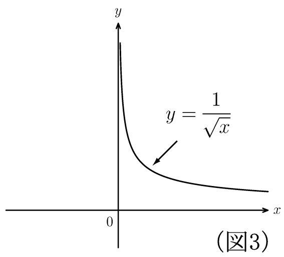
＜単調減少＞



(図2)

例 1　$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の定義域は $x > 0$ である。

図 3 より定義域内で単調減少である。

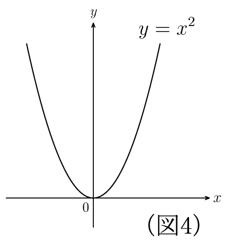


(図3)

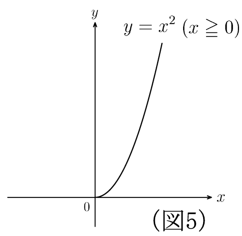
例 2　$f(x) = x^2$ の定義域は実数全体である。

図 4 より単調関数ではない。

例 3　$f(x) = x^2 \ (x \geqq 0)$ は $y = x^2$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限した関数である。図 5 より定義域 $(x \geqq 0)$ 内で単調増加である。



(図4)



(図5)

問　次の関数が単調関数かどうか判断せよ。もし単調関数であれば， 単調増加か単調減少かを明記せよ。ただし ( ) 内は定義域である。

(1) $y = 3x - 2$

(2) $y = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

(3) $y = -(x-1)^2 \quad (x \geqq 2)$

(4) $y = \sqrt{x+2} \quad (x \geqq -2)$

(5) $y = \sin x$

(6) $y = \sin x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

< 逆関数 1 >

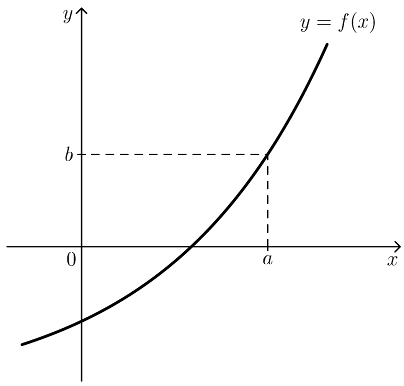
関数 $f(x)$ が単調関数であるとき、y の値 b に対して、

$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような x の値 a がただ 1 つ定まる。このとき

$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。



例 $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ のとき、

関数 $y = f(x)$ は単調関数である。

$$b = f(a)$$

とおくと、$f(a) = 2a - 1$ より

$$b = 2a - 1$$

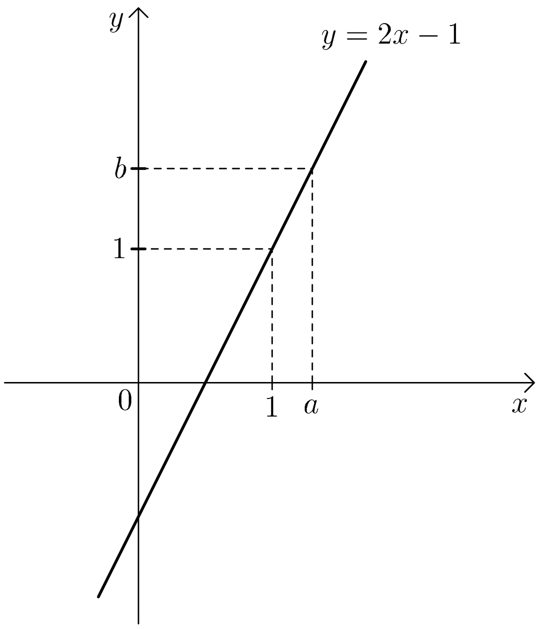
である。これを a について解くと

$$a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。$a = f^{-1}(b)$ であるから

$$\boxed{f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}}$$

となる。



問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて定義域内で単調関数である。

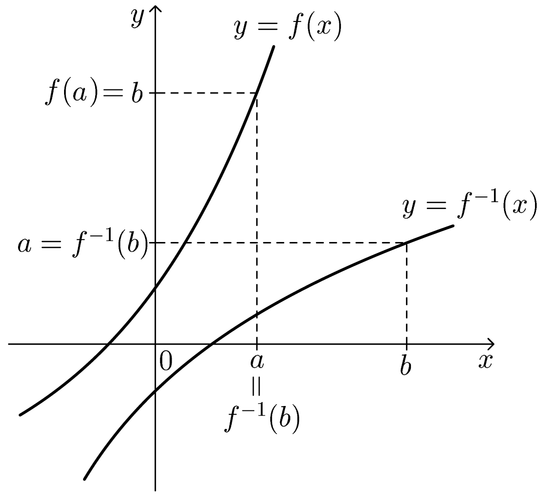
このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 2x + 1$ (2) $f(x) = 3x - 2$ (3) $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

(解) (解) (解)

＜ 逆関数 2 ＞

関数 $y = f(x)$ が単調関数のとき，y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して，関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という。



例　$f(x) = 2x + 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

$$b = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

より　$f^{-1}(b) = \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{2}$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。

(別解)　$\underline{y = \ 2x + 1}$ とおく

$$\Downarrow$$

$$-2x + 1 = y$$

$$2x = y - 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

<u>ここで x と y を入れ替えて</u>

$y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$　($y = 2x + 1$ の逆関数)　　　$\underline{(答)\quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

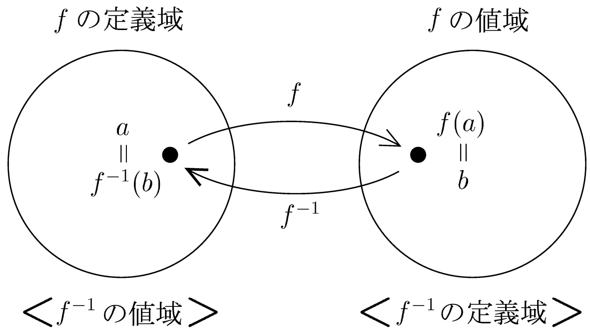
問　$f(x)$ が以下の場合に，逆関数を求めよ。

(1) $f(x) = 3x + 2$

(2) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$

＜逆関数 3＞

関数 $y = f(x)$ が定義域内で単調であるとき，関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり，関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。



例題　$f(x) = x^2 + 1 \ (x \geqq 0)$ の逆関数を求めよ。

(解)　$y = x^2 + 1 \ (x \geqq 0)$ とおく　　値域は $y \geqq 1$

$$x^2 = y - 1$$

$$x = \pm\sqrt{y-1} \qquad \begin{pmatrix} x \geqq 0 \\ y \geqq 1 \end{pmatrix}$$

ここで　$x \geqq 0$ だから

$$x = \sqrt{y-1} \qquad \begin{pmatrix} x \geqq 0 \\ y \geqq 1 \end{pmatrix}$$

x と y を入れ替えて

$$y = \sqrt{x-1} \qquad \begin{pmatrix} y \geqq 0 \\ x \geqq 1 \end{pmatrix}$$

よって　(答)　$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad (x \geqq 1)$

(注)　逆関数を求めたら，定義域も書いておく。定義域が求まれば値域も求まるので，値域は書かなくても良い。

問　$f(x) = (x+1)^2 \ (x \geqq -1)$ の逆関数を求めよ。

< 逆関数 4 >

例題　次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y = \sqrt{x+1}$　　　　(2)　$y = 3^x$

(解) (1)　$y = \sqrt{x+1}$ の定義域は $x \geqq -1$ であり，値域は $y \geqq 0$ である。

$$y^2 = x + 1$$

$$\Downarrow$$

$$x + 1 = y^2$$

つまり

$$x = y^2 - 1 \quad \begin{pmatrix} x \geqq -1 \\ y \geqq 0 \end{pmatrix}$$

ここで x と y を入れ替えて

$$y = x^2 - 1 \quad \begin{pmatrix} y \geqq -1 \\ x \geqq 0 \end{pmatrix}$$

(答) 逆関数は $y = x^2 - 1$ ($x \geqq 0$)

(2)　$y = 3^x$ の定義域は実数全体であり，値域は $y > 0$ である。

$$\log_3 y = \log_3(3^x) = x$$

$$\Downarrow$$

$$x = \log_3 y \quad \begin{pmatrix} x \text{ は実数全体} \\ y > 0 \end{pmatrix}$$

ここで x と y を入れ替えて

$$y = \log_3 x \quad \begin{pmatrix} y \text{ は実数全体} \\ x > 0 \end{pmatrix}$$

(答) 逆関数は $y = \log_3 x$ ($x > 0$)

問　次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x-1}$

(2) $y = 4^x$

(3) $y = \log_2 x$

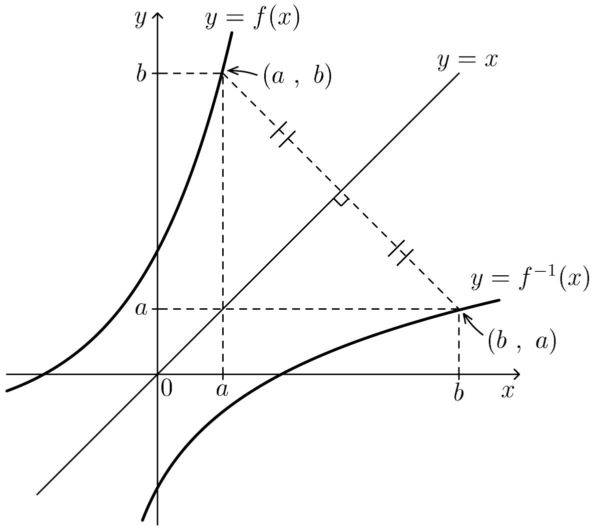
< 逆関数 5 >

関数 $y=f(x)$ が単調であるとき、$y=f(x)$ のグラフ上の点の座標を (a,b) とすると

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

より、点 (b,a) は逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。

このことから、逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは, 元の関数 $y=f(x)$ のグラフを、直線 $y=x$ に関して、対称に折り返したものになっている。



例　$f(x)=3^x$ のとき、前ページの例題より

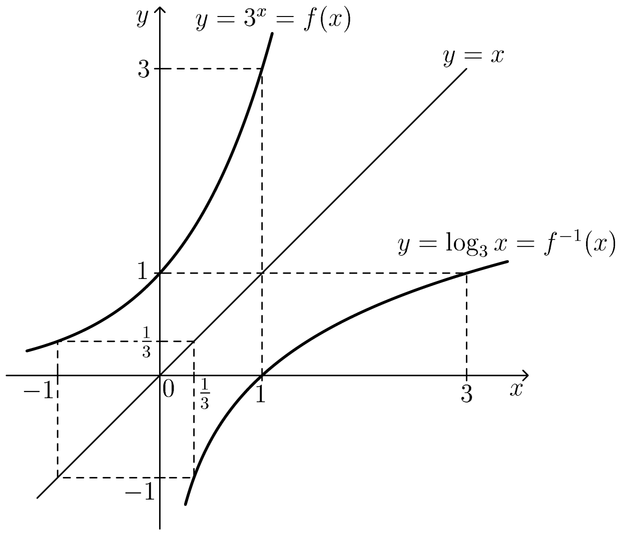
逆関数は

$$f^{-1}(x)=\log_3 x$$

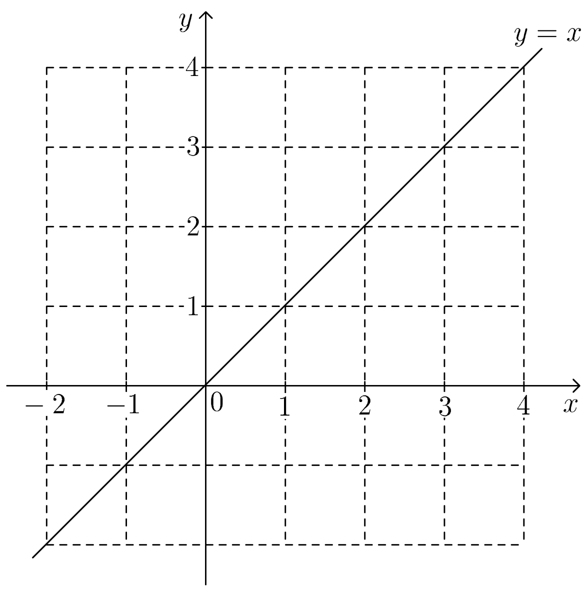
である。

対数関数 $y=\log_3 x$ は指数関数 $y=3^x$ の逆関数である。

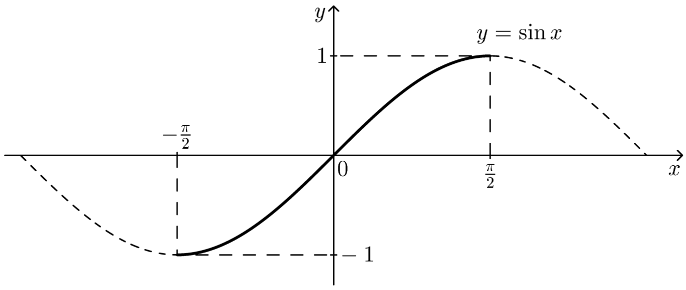
$y=\log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y=3^x$ のグラフを直線 $y=x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。



問　$f(x)=2^x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め, 元の関数 $y=f(x)$ と逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描け。



< 逆三角関数 1 >



正弦関数 $y = \sin x$ の通常の定義域は実数全体であり，値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，単調増加になる。このとき，関数

$$y = \sin x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

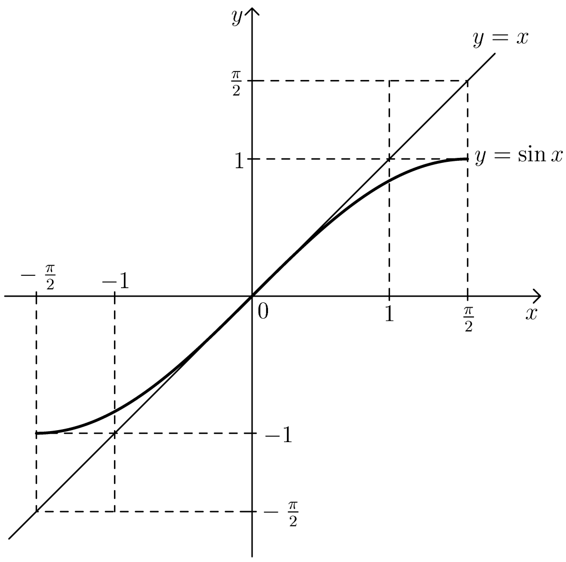
の逆関数が存在して，これを，

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arcsin x \quad (\text{定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$

(インバースサイン)　(アークサイン)

と表す。$y = \sin^{-1} x$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\sin^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\sin x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\sin x} = \mathrm{cosec}\, x$ と書く。



問 1　右の座標平面上に $y = \sin^{-1} x$ のグラフを描け。

例　逆関数の定義より，

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

である。例えば $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると，

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \sin\theta$$

より，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であるから (答)　$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

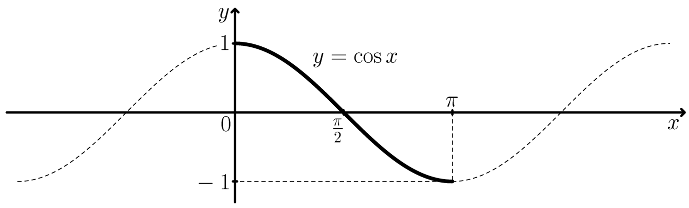
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$　　　(2) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$　　　(3) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$

< 逆三角関数 2 >



余弦関数 $y=\cos x$ の通常の定義域は実数全体であり，値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると，単調減少になる。そのとき，関数

$$y=\cos x \quad (\text{ 定義域: } 0 \leqq x \leqq \pi,\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して，これを，

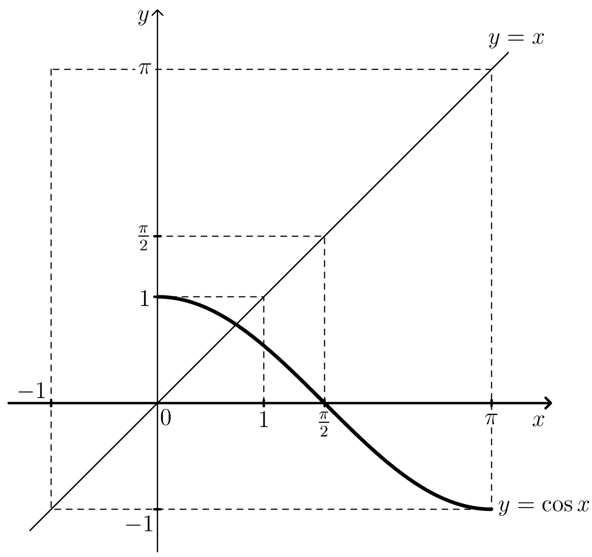
$$y=\cos^{-1} x \quad \text{又は} \quad y=\arccos x \quad (\text{ 定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } 0 \leqq y \leqq \pi)$$

(インバースコサイン)　(アークコサイン)

と表す。$y=\cos^{-1} x$ のグラフは，$y=\cos x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\cos^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\cos x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\cos x}=\sec x$ と書く。

問 1　右の座標平面上に $y=\cos^{-1} x$ のグラフを描け。



例　逆関数の定義より，

$$a=\cos^{-1} b \iff b=\cos a$$

である。例えば $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると，

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\cos\theta$$

より，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\cos\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから (答)　$\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

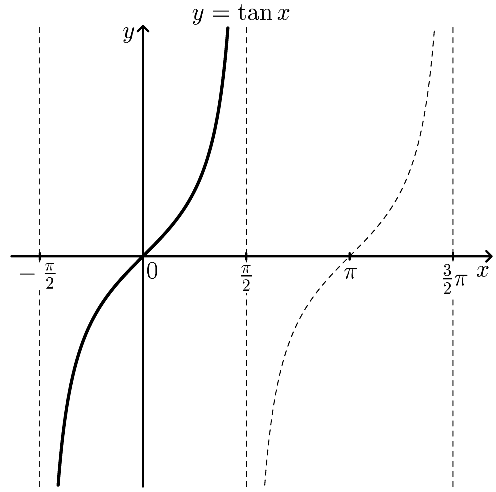
(1) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$　　　(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$　　　(3) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

< 逆三角関数 3 >

正接関数 $y = \tan x$ の通常の定義域は $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) 以外の実数であり，値域は実数全体である。この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，単調増加になる。そのとき，関数

$y = \tan x$　(定義域: $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, 値域: 実数全体)

の逆関数が存在して，これを，



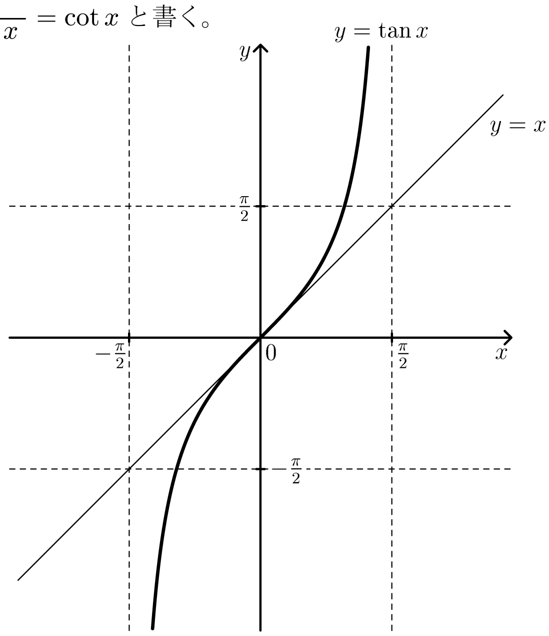
$y = \tan^{-1} x$　　又は　　$y = \arctan x$　(定義域: 実数全体 , 値域: $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$)

(インバースタンジェント) (アークタンジェント)

と表す。$y = \tan^{-1} x$ のグラフは，$y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\tan^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\tan x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\tan x} = \cot x$ と書く。

問 1　右の座標平面上に $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描け。



例　逆関数の定義より，

$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。例えば $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ の値 θ を求めようとすると，

$$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \iff \sqrt{3} = \tan\theta$$

より，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan\theta$ が $\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

(答)　$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$				0			$\sqrt{3}$

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1}(1) =$　　　(2) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$　　　(3) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$

< 合成関数 1 >

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について，関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。これら関数を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という。

例 1　$f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$

$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問 1　関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に，合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(2) $f(x) = \tan x$, $g(x) = x + 2$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \log_2 x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

例 2　複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。

例えば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

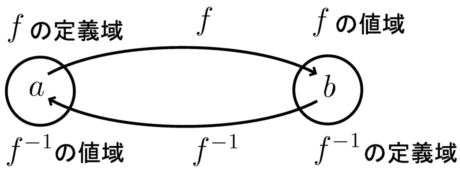
問 2　以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = (x^2 - x + 2)^7$, $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \cos(2x + 3)$, $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $f(x) =$, $g(x) =$

< 合成関数 2 >



問 1　関数 $f(x)$ が単調であれば逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在し，$f(a)=b$ ならば $f^{-1}(b)=a$ である。次式を a か b で表せ。

(1) $f^{-1}\left(f(a)\right)$　　(2) $f\left(f^{-1}(b)\right)$

問 2　関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に $g\left(f(x)\right)$ と $f\left(g(x)\right)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^4 \quad (x \geqq 0)$,　　$g(x)=\sqrt[4]{x} \quad (x \geqq 0)$

(2) $f(x)=2^x$,　　$g(x)=\log_2 x \quad (x>0)$

(3) $f(x)=\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$,　$g(x)=\sin^{-1} x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{x^3}$　　(2) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$

(3) $\log_3(3^x)$　　(4) $3^{\log_3 x}$

(5) $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(6) $\tan\left(\tan^{-1}(1)\right)$

問 4　$f(x)$ と $g(x)$ が次の各場合に, 合成関数 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ を求めよ。

(1) $f(x)=\sin x$,　$g(x)=x^4$,　　$f(g(x))=$　　$g(f(x))=$

(2) $f(x)=\cos x$,　$g(x)=x^5$,　　$f(g(x))=$　　$g(f(x))=$

(3) $f(x)=x^5$,　$g(x)=3x+4$,　　$f(g(x))=$　　$g(f(x))=$

(4) $f(x)=x^6$,　$g(x)=x^2+3x$,　　$f(g(x))=$　　$g(f(x))=$

< 練習問題 >

問 1　次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x} + 1$　(2) $y = x^2 - 3$　(3) $y = \sqrt{x-1} + 2$

(4) $y = \sin x$　(5) $y = \cos x$　(6) $y = 2^x$

(7) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(8) $y = \log_4 x$　(9) $y = \log_{0.5} x$

問 2　$f(x)$ が次の各場合に逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。ただし ( ) 内は定義域である。

(1) $f(x) = 4x - 3$　(2) $f(x) = \sqrt{x-1}$　$(x \geqq 1)$

(3) $f(x) = x^2 - 1$　$(x \geqq 0)$　(4) $f(x) = x^3$　$(x \geqq 0)$

(5) $f(x) = 3^x$　(6) $f(x) = \log_5 x$　$(x > 0)$

問 3　$f(x)$ が次の場合に, 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め, 元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描け。ただし ( ) 内は定義域である。

(1) $f(x) = x^4$　$(x \geqq 0)$　(2) $f(x) = 4^x$

問 4　次の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$　(4) $\log_3(3^5)$

(5) $3^{\log_3 5}$　(6) $\sin\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

問 5　$f(x) = x^5$,　$g(x) = \tan x$,　$h(x) = 3x + 4$ のとき, 次の関数を x の式で表せ。

(1) $f(g(x))$　(2) $h(g(x))$　(3) $g(f(x))$

＜ 極限 1 ＞

関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 A に限りなく近づくことを，$x \to a$ のとき，$f(x)$ は A に**収束する**といい，次のように表す。

$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = A}$ 　または　 $\boxed{x \to a \text{ のとき，} f(x) \to A}$

このとき，A を，$x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という。

例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{4x-5}{x+1} = 1$ 　$\left(\text{または}\quad x \to 2 \quad \text{のとき} \quad \dfrac{4x-5}{x+1} \to 1\right)$

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x+5}{x+1}$　(2) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{6x+7}$　(3) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x+\pi)$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to \pi} \cos x$　(5) $\displaystyle \lim_{x \to 3} 2^x$　(6) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \log_2(5x+1)$

変数 x の値が限りなく大きくなることを，$\boxed{x \to \infty}$ または $\boxed{x \to +\infty}$ で表す。

また変数 x が負であって，絶対値が限りなく大きくなることを $\boxed{x \to -\infty}$ で表す。

記号 $\boxed{\infty}$ を**無限大** ($+\infty$ を**正の無限大**)，$\boxed{-\infty}$ を**負の無限大**という。

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$，$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$，$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$，$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

例 3 $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2-2x+7}{5x^2+3x+6} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{5 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{4}{5}$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{2x-3}{x+1}$　(2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2-4x}{x^2+3}$　(3) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+4x}{x^3+1}$

< 極限 2 >

関数 $f(x)$ において，$x \to a$ のとき $f(x)$ の値が限りになく大きくなる場合，$f(x)$ は **正の無限大に発散する**といい，次のように表す。

$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$ または $\boxed{x \to a \text{ のとき } f(x) \to \infty}$

$x \to a$ のとき，$f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなる場合，$f(x)$ は **負の無限大に発散する**といい，次のように表す。

$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty}$ または $\boxed{x \to a \text{ のとき } f(x) \to -\infty}$

例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to \infty} -\sqrt{x} = -\infty$

例 3 $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$

例 4 $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (x^3 - x^4) = \lim_{x \to \infty} x^4 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\infty$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (1 - x^2)$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x^3 + 1)$

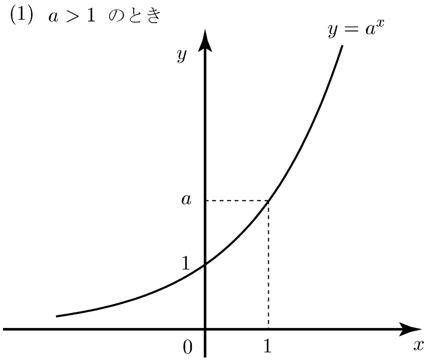
(3) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (x^4 - 2)$

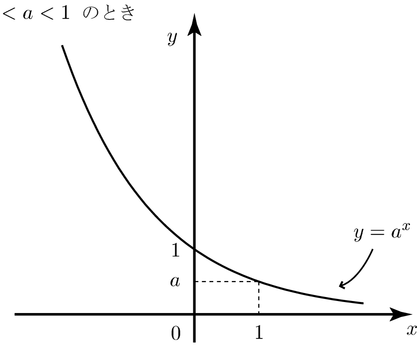
(4) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x - x^2}{x+1}$

(5) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (x^3 - x^2)$

< 指数関数の極限 >

指数関数 $y = a^x$ のグラフは次のようになる。





このグラフから次の極限式が得られる。

(1) $a > 1$ のとき $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

(2) $0 < a < 1$ のとき $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$

例 (1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}(4^x - 3^x) = \lim_{x\to\infty} 4^x \times \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right\} = \infty$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{4^x + 3^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^x + 1} = 1$

(注) 極限値を求めるとき，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty - \infty$，$\dfrac{0}{0}$ の形になるときがある。これらの場合，極限値は問題によっていろいろな値になるので，**不定形の極限**と呼ばれる。

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}(0.99)^x$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}(1.01)^x$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} 3^x$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} 4^{-x}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}(2^x - 3^x)$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{4^x + 3^x}$

(7) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{5^x}{4^x + 3^x}$

(8) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

$<\dfrac{0}{0}$ 型の極限 $>$

このページでは不定形の極限の一つである $\dfrac{0}{0}$ の場合の問題をとりあつかう。

例 1 $\displaystyle \lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x-1}=12$

例 2 $\displaystyle \lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{3-x}{x\times3}}{x-3}=\lim_{x\to3}-\frac{1}{3x}=-\frac{1}{9}$

例 3 $\displaystyle \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x})^2-(2)^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to0}\frac{(3+x)^2-9}{x}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

< 片側極限 >

変数 x が、a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が A に限りなく近づくならば、A を x が a に近づくときの $f(x)$ の **右側極限** といい、

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = A} \quad \text{または} \quad \boxed{\lim_{x\to a+0} f(x) = A}$$

と表す。また変数 x が、a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が B に限りなく近づくならば、B を x が a に近づくときの $f(x)$ の **左側極限** といい、

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = B} \quad \text{または} \quad \boxed{\lim_{x\to a-0} f(x) = B}$$

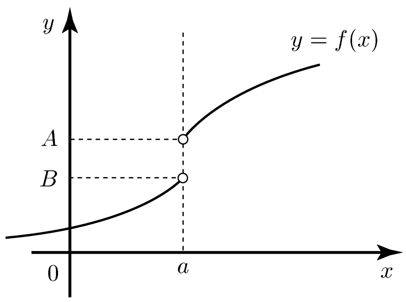
で表す。

例 1　$y = f(x)$ のグラフが (図 1) のような場合は

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = A \qquad (\text{右側極限})$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = B \qquad (\text{左側極限})$$

である。

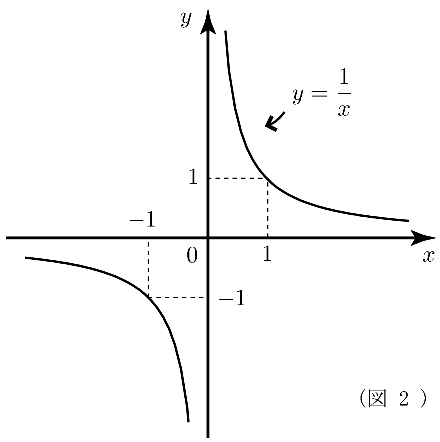


(図 1)

例 2　$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフ (図 2) より

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

である。



(図 2)

問　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} \frac{1}{x-1}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{1}{x-1}$

< 極限の性質 >

極限の性質として 次式が成り立つ。

h，k を定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\{hf(x)+kg(x)\} = h\lim_{x\to a}f(x)+k\lim_{x\to a}g(x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a}f(x)\right)\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ （ただし，$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$）

(4) x が a の近くで常に $f(x)\leqq g(x)$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)\leqq\lim_{x\to a}g(x)$

(5) x が a の近くで常に $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$ ならば

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$$

(注) 上記極限の性質 (1)〜(5) は $x\to a+0$，$x\to a-0$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$ のときにも成り立つ。

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(2\sin x+4\cos x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}2^x\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{\log_2 x}{x+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

問 2 関数 $f(x)$ が $x=0$ の近くで常に $\cos x\leqq f(x)\leqq 1$ であるとき，次の極限値を求めよ。

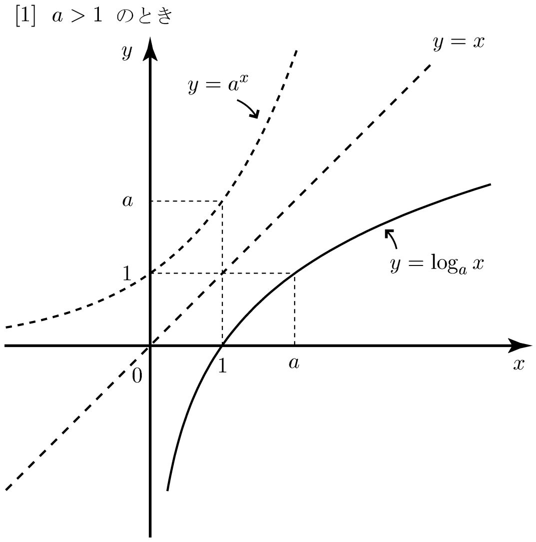
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x$

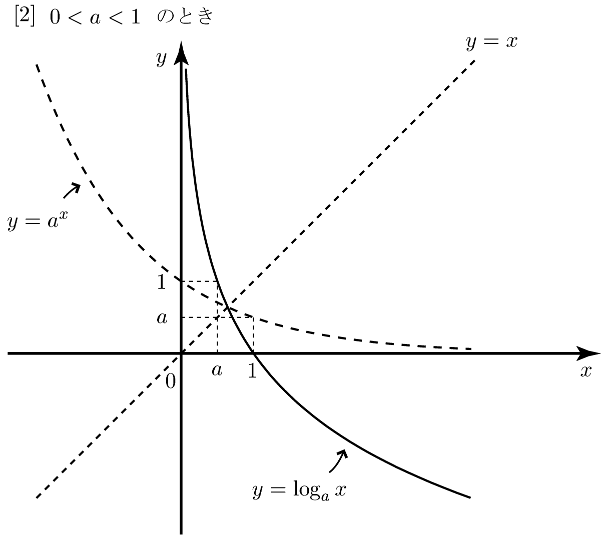
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$

< 対数関数の極限 >

対数関数 $y=\log_a x$ は指数関数 $y=a^x$ の逆関数であるから、

グラフは直線 $y=x$ に関して対称になる。





このグラフより次の極限式が得られる。

[1] $a>1$ のとき	[2] $0<a<1$ のとき
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$	$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x=-\infty$	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x=\infty$

問　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2 x$　　(2) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_3 x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}} x$

(4) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_{0.1} x$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_4 \frac{1}{x}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_3 (0.9)^x$　　(8) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\log_{0.5} (3^x)$

< 極限の練習 >

問　次の極限値を求めよ。ただし a は正の定数である。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-3x^2}{x^2+1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(0.99)^x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(4.5)^x$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x+3^x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x}{4^x+3^x}$

(9) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_{\frac{1}{2}}x$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_5\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\log_3(2^x)$

(12) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{1}{x-2}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^2-a^2}{x}$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$