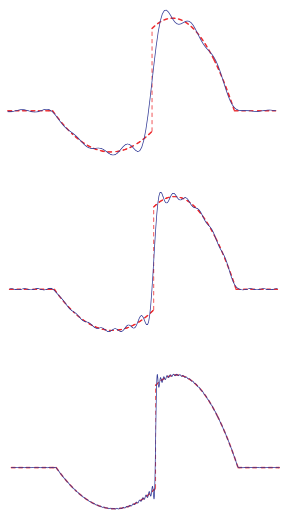
高知工科大学

Kochi University of Technology

「数学 8」

（フーリエ解析）



2008年度版

内容

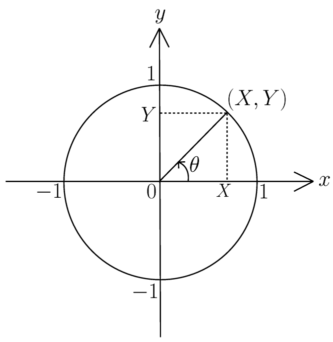
◎ フーリエ級数

◎ フーリエ変換

◎ ラプラス変換

井上 昌昭　著

< 三角関数 >



右図のような場合に

$$\sin\theta = Y \qquad (正弦)$$

$$\cos\theta = X \qquad (余弦)$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} \qquad (正接)$$

と定め、これらを三角関数という。角度 θ は通常弧度法ではかる。

この定義より次の性質がわかる。

① $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad , \quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\sin(-\theta) = -\sin\theta\ , \quad \cos(-\theta) = \cos\theta\ , \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$

③ $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta\ , \quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$

< 加法定理 >

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\ , \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\ , \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

[倍角の公式]

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

[積和公式]

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$$

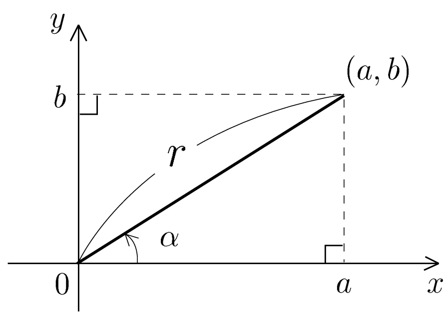
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

問　次式を $\cos(2\theta)$ を用いて表せ。

$$\sin^2\theta = \qquad\qquad\qquad\qquad , \qquad \cos^2\theta =$$

[三角関数の合成]



0 でない定数 $a,\ b$ に対し

$$\boxed{a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)}$$

と表される。ここで

$r = \sqrt{a^2+b^2}\ , \quad \cos\alpha = \dfrac{a}{r}\ , \quad \sin\alpha = \dfrac{b}{r}$

である。

＜ 正弦波のグラフ ＞

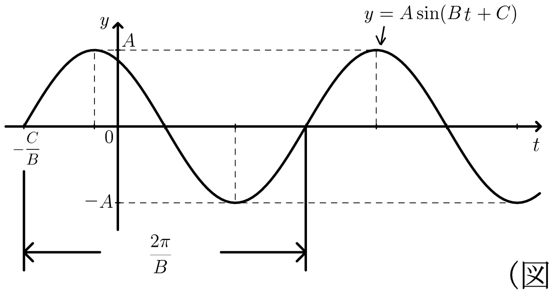
定数 A, B, C に対し，
正弦関数 $y = A\sin(Bt + C)$
のグラフを**正弦波**という。
A, B, C が正の数ならば，グラフは
図１のような周期関数である。
この図のようなとき

$$\text{周期} = \frac{2\pi}{B}$$

$$\text{振幅} = A$$

$$\text{初期位相} = -\frac{C}{B}$$

ということにする。



（図１）

例 1　図 2 の正弦波の式を求めたい。

図より $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{3}{2}\pi$ までが一つの周期
であるから，

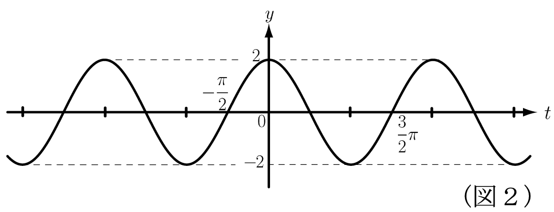
$$\text{周期} = \frac{3}{2}\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \left(= \frac{2\pi}{B}\right)$$

$$\text{振幅} = 2 (= A)$$

$$\text{初期位相} = -\frac{\pi}{2} \left(= -\frac{C}{B}\right)$$

より $A = 2,\ B = 1,\ C = \dfrac{\pi}{2}$

よって図 2 は $\boldsymbol{y = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$ のグラフである。



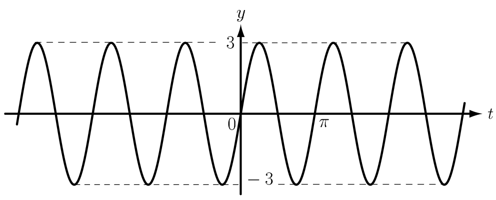
（図２）

例 2　図 3 の正弦波の式を求めたい。

$$\text{周期} = \pi \left(= \frac{2\pi}{B}\right)$$

$$\text{振幅} = 3 (= A)$$

$$\text{初期位相} = 0 \left(= -\frac{C}{B}\right)$$

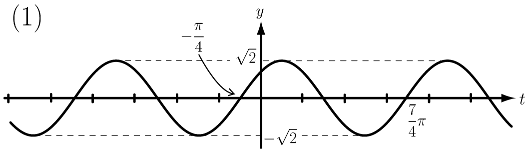


（図３）

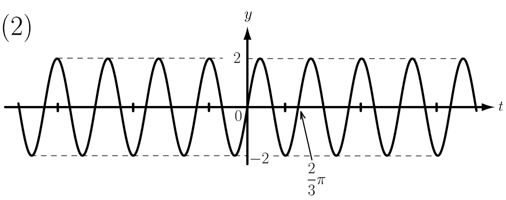
より $A = 3,\ B = 2,\ C = 0$ だから図 3 は $\boldsymbol{y = 3\sin(2t)}$ のグラフである。

問　次の正弦波の周期，振幅，初期位相を求め，グラフの式を求めよ。

(1)



(2)

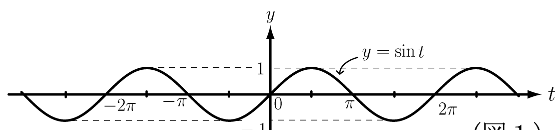


< 同周期正弦波の和 >

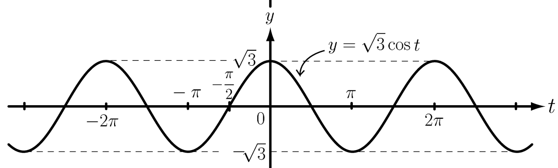
例 1　$y=\sin t$ のグラフは，周期 2π, 振幅 1, 初期位相 0 の正弦波である。(図 1)
$y=\sqrt{3}\cos t\left(=\sqrt{3}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ のグラフは周期 2π, 振幅 $\sqrt{3}$, 初期位相 $-\dfrac{\pi}{2}$ の正弦波である。(図 2) この 2 つの正弦波の和は，三角関数の合成より

$\sin t+\sqrt{3}\cos t=2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$

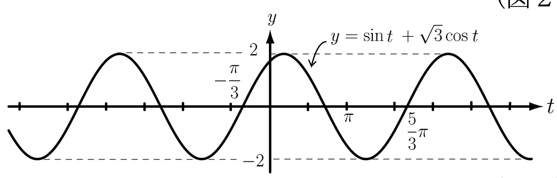
となるから，グラフは周期 2π, 振幅 2, 初期位相 $-\dfrac{\pi}{3}$ の正弦波である。(図 3)



(図 1)



(図 2)

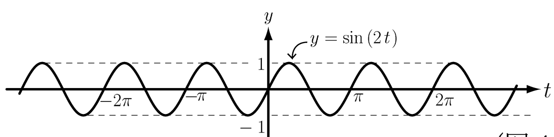


(図 3)

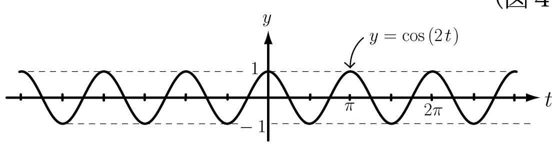
例 2　$y=\sin(2t)$ のグラフは周期 π, 振幅 1, 初期位相 0 の正弦波である。(図 4)
$y=\cos(2t)\left(=\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ のグラフは周期 π, 振幅 1, 初期位相 $-\dfrac{\pi}{4}$ の正弦波である。(図 5) この 2 つの正弦波の和は,

$\sin(2t)+\cos(2t)=\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

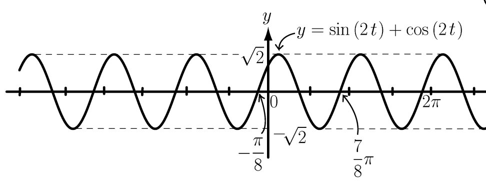
となるから，グラフは周期 π, 振幅 $\sqrt{2}$, 初期位相 $-\dfrac{\pi}{8}$ の正弦波である。(図 6)



(図 4)



(図 5)



(図 6)

一般に周期 L の 2 つの正弦波の和または差は (周期 L の) 正弦波になる。

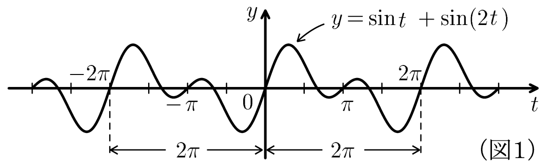
問　次の正弦波の周期と振幅を求めよ。

(1) $\sin t+\cos t$　, 　(2) $\sqrt{3}\sin(2t)+\cos(2t)$　, 　(3) $\sqrt{3}\sin(3t)-3\cos(3t)$

$=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$　　　$=2\sin(2t+\frac{\pi}{6})$　　　$=2\sqrt{3}\sin(3t-\frac{\pi}{3})$

< 異周期正弦波の和 >

例 1　前ページの図より
$y=\sin t$ のグラフは周期 2π の正弦波であり、$y=\sin(2t)$ のグラフは周期 π の正弦波である。
しかし、その和

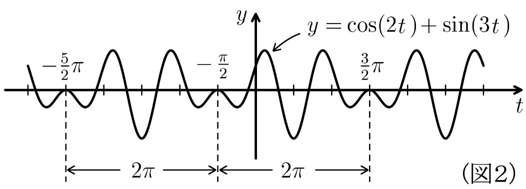


(図1)

(1) $y=\sin t+\sin(2t)$

はもはや正弦波ではない (図 1)。
しかし図 1 を見ると $-2\pi \leqq t \leqq 0$ の範囲の波形と $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲の波形が同じである。つまり (1) のグラフは周期 2π の周期関数である。
前ページの図 4 をよく見ると、$y=\sin(2t)$ のグラフは基本周期が π であるが、2 つの波を一つの波形と考えると、周期 2π の周期関数とも考えられる。$\sin t$ と $\sin(2t)$ が共に周期 2π の周期関数であるから、その和も周期 2π の周期関数になる。

例 2　$y=\cos(2t)+\sin(3t)$ のグラフは図 2 のような周期 2π の周期関数になる。
$\cos(2t)$ と $\sin(3t)$ の周期は以下のようになる。



(図2)

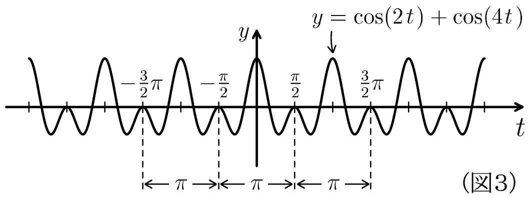
	基本周期	倍周期	3 倍周期
$\cos(2t)$	π	2π	3π
$\sin(3t)$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	2π

$\cdots$ 2 つの波の周期 2π
$\cdots$ 3 つの波の周期 2π

例 3　$y=\cos(2t)+\cos(4t)$ のグラフは図 3 のように周期 π の周期関数になる。

	基本周期	倍周期
$\cos(2t)$	π	2π
$\cos(4t)$	$\frac{\pi}{2}$	π

$\cdots$ 2 つの波の周期 π



(図3)

(注)　$\sin(nt)$ や $\cos(nt)$ の基本周期は $\dfrac{2\pi}{n}$ である。

問　次の関数の周期を求めよ。

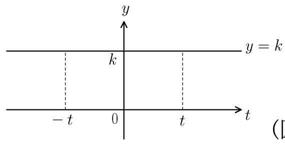
(1) $\cos(t)+\cos(3t)$　　(2) $\sin(4t)+\cos(6t)$　　(3) $\cos(3t)+\sin(6t)$

< 偶関数と奇関数 1 >

関数 $f(t)$ が $f(-t) = f(t)$ を満たすとき**偶関数**という。また $f(-t) = -f(t)$ を満たすとき**奇関数**という。

例　(1) 定数 k に対し，$f(t) = k$(定数関数) は,

偶関数。(図 1)

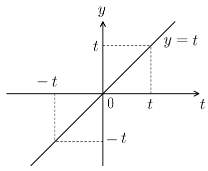


(図１)

(2) $f(t) = t$ のとき

$$f(-t) = -t = -f(t)$$

より $f(t)$ は奇関数 (図 2)

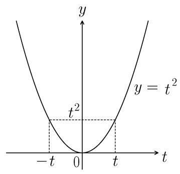


(図２)

(3) $f(t) = t^2$ のとき

$$f(-t) = (-t)^2 = t^2 = f(t)$$

より $f(t)$ は偶関数 (図 3)

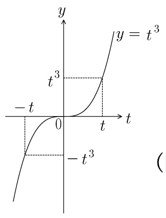


(図３)

(4) $f(t) = t^3$ のとき

$$f(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -f(t)$$

より $f(t)$ は奇関数 (図 4)

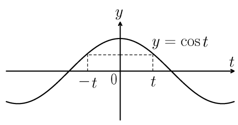


(図４)

(5) $f(t) = \cos t$ のとき

$$f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t)$$

より $f(t)$ は偶関数 (図 5)

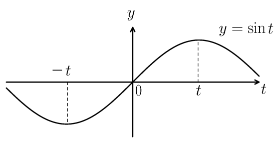


(図５)

(6) $f(t) = \sin t$ のとき

$$f(-t) = \sin(-t) = -\sin t = -f(t)$$

より $f(t)$ は奇関数 (図 6)



(図６)

問　次の関数は偶関数か奇関数かどちらであるか答えよ。

(1)$f(t) = t^4$　　(2)$f(t) = t^5$　　(3)$f(t) = t^6$

(4)$f(t) = t^7$　　(5)$f(t) = \cos(2t)$　　(6)$f(t) = \sin(2t)$

(7)$f(t) = \cos(3t)$　　(8)$f(t) = \sin(3t)$　　(9)$f(t) = \sin^2(t)$

< 偶関数と奇関数 2 >

例 1　$f_1(t) = t^3$, $f_2(t) = t^5$ は共に奇関数であるが、積

$$f_1(t)f_2(t) = t^3 \times t^5 = t^8$$

は偶関数になる。

例 2　$f_1(t) = t^3$, $f_2(t) = \sin t$ は共に奇関数であるが、
積 $f(t) = f_1(t)f_2(t) = t^3 \sin t$ は

$$f(-t) = (-t)^3 \sin(-t) = (-t^3) \times (-\sin t) = t^3 \sin t = f(t)$$

より、積 $f_1(t)f_2(t)$ は偶関数になる。

例 3　$f_1(t) = t^2$, $f_2(t) = \cos t$ は共に偶関数であり、
積 $f(t) = f_1(t)f_2(t) = t^2 \cos t$ は

$$f(-t) = (-t)^2 \cos(-t) = t^2 \cos t = f(t)$$

より、積 $f_1(t)f_2(t)$ は偶関数である。

例 4　$f_1(t) = \sin t$ は奇関数、$f_2(t) = \cos(3t)$ は偶関数である。
積 $f(t) = f_1(t)f_2(t) = \sin t \cos(3t)$ は

$$f(-t) = \sin(-t)\times\cos(-3t) = (-\sin t)\times \cos(3t) = -\sin t \cos(3t) = -f(t)$$

より、積 $f_1(t)f_2(t)$ は奇関数になる。

問 1　次の関数は偶関数か奇関数か答えよ。

(1) $t^2 \times t^4$　　(2) $t^2 \times t^5$　　(3) $t^3 \times t^7$

(4) $t \sin(2t)$　　(5) $t^2 \cos(3t)$　　(6) $t^3 \cos(5t)$

(7) $\sin(2t)\sin(3t)$　　(8) $\sin(4t)\cos(3t)$　　(9) $\cos(2t)\cos(5t)$

(10) $\sin(2t) + \sin(4t)$　　(11)$\cos t + \cos(3t)$

問 2　以下の $\boxed{}$ の中に偶関数か奇関数かどちらかの言葉を記入せよ。

(1) 奇関数 × 奇関数 = $\boxed{}$

(2) 偶関数 × 偶関数 = $\boxed{}$

(3) 奇関数 × 偶関数 = $\boxed{}$

(4) 奇関数 + 奇関数 = $\boxed{}$

(5) 偶関数 + 偶関数 = $\boxed{}$

< 三角多項式 >

$f(t)=a_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)\}$ の形をした関数 $f(t)$ を**三角多項式**という。

例題　関数 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ が

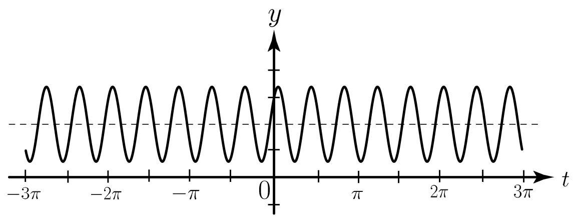
$$f(t)=3\cos t-\cos(3t)+\frac{3}{5}\cos(5t)-\frac{3}{7}\cos(7t)$$

$$g(t)=2\sin t-\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)$$
$$-\frac{1}{2}\sin(4t)+\frac{2}{5}\sin(5t)$$

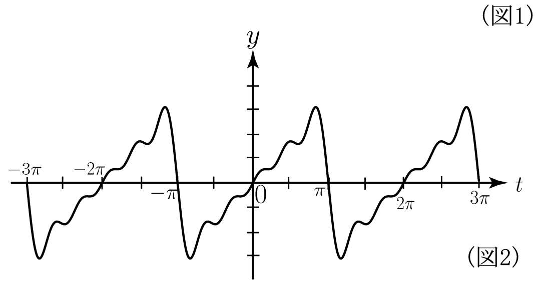
$$h(t)=2+\cos(5t)+\sin(5t)$$

であるとき，$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ のグラフは

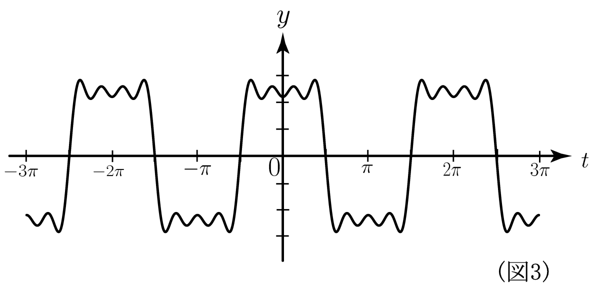
右の図 1 ～ 図 3 のどれか答えよ。



(図1)



(図2)



(図3)

(解答)

$f(t)$ は偶関数である。5 ページの例より偶関数のグラフは y 軸に関して対称であるから，$f(t)$ のグラフは図 3 である。

$g(t)$ は奇関数であり，奇関数のグラフは原点に関して対称であるから，$g(t)$ のグラフは図 2 である。

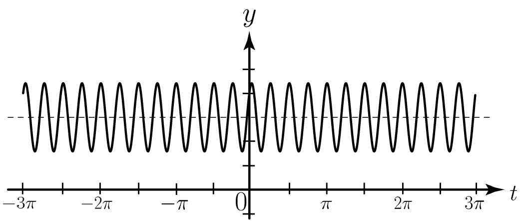
$h(t)$ は 3 ページのように正弦波の波形であるから，図 1 である。

問　以下の関数 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ のグラフを右の図 4 ～ 図 6 からえらべ。

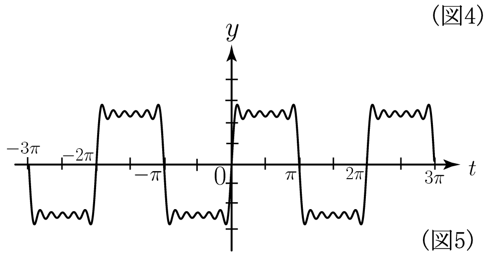
$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos t-\frac{4}{9\pi}\cos(3t)$$
$$-\frac{4}{25\pi}\cos(5t)-\frac{4}{49\pi}\cos(7t)$$

$$g(t)=3\sin t+\sin(3t)+\frac{3}{5}\sin(5t)$$
$$+\frac{3}{7}\sin(7t)+\frac{1}{3}\sin(9t)+\frac{3}{11}\sin(11t)$$

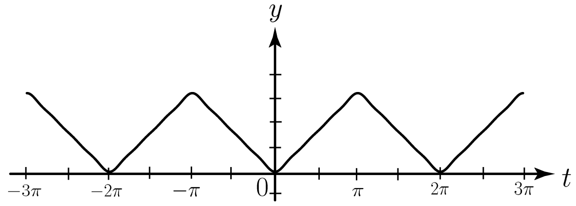
$$h(t)=3+\cos(8t)+\sin(8t)$$



(図4)



(図5)



(図6)

< 積分 1 >

三角関数に関する不定積分は，n を 0 でない定数とすると

$$\int \cos(nt)dt = \frac{1}{n}\sin(nt) + C \quad , \qquad \int \sin(nt)dt = -\frac{1}{n}\cos(nt) + C$$

である。

例　(1) $\displaystyle\int \cos^2 t dt = \int \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right\} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(3t)\cos(2t)dt = \int \left\{\frac{1}{2}\sin(5t) + \frac{1}{2}\sin t\right\} dt = -\frac{1}{10}\cos(5t) - \frac{1}{2}\cos t + C$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\pi) - \left\{-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(-2\pi)\right\} = \pi$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3t)\sin(2t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos(5t)\right\} dt = \left[\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{10}\sin(5t)\right]_{-\pi}^{\pi}$

$\displaystyle= \left\{\frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{10}\sin(5\pi)\right\} - \left\{\frac{1}{2}\sin(-\pi) - \frac{1}{10}\sin(-5\pi)\right\} = 0$

自然数 (= 1 以上の整数)m，n $(m \neq n)$ に対して，次式が成立する。

① $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)dt = \pi$,	② $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)dt = \pi$
③ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$,	④ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(nt)dt = 0$
⑤ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(mt)dt = 0$,	⑥ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt = 0$
⑦ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)dt = 0$,	⑧ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)dt = 0$

問　上の公式の①，②，③，⑥，⑦を確かめよ。

＜積分 2＞

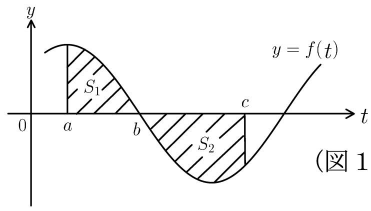
関数 $y = f(t)$ のグラフが図 1 の場合，
斜線部分の面積を S_1, S_2 とすると

$$\int_a^b f(t)dt = S_1 \quad , \quad \int_b^c f(t)dt = -S_2$$

となる。すなわち

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = S_1 - S_2$$

となる。この性質を使うと以下の事がわかる。

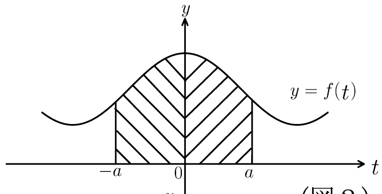


(図 1)

[1]　$f(t)$ が偶関数の場合は，グラフは
図 2 のように y 軸対称になるから

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt} \quad \text{(偶関数の積分)}$$

となる。

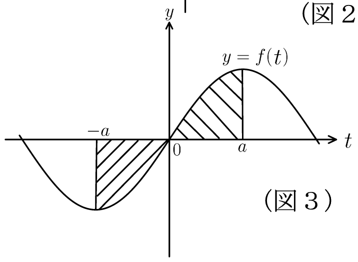


(図 2)

[2]　$f(t)$ が奇関数の場合は，グラフは
図 3 のように原点対称になるから

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0} \quad \text{(奇関数の積分)}$$

となる。



(図 3)

例 1　奇関数 × 奇関数 = 偶関数だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)\sin(3t)dt = 2\int_0^{\pi} \sin(2t)\sin(3t)dt = 2\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos(5t)\right\}dt$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{10}\sin(5t)\right]_0^{\pi} = 2\left\{\left(\frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{10}\sin(5\pi)\right) - \left(\frac{1}{2}\sin(0) - \frac{1}{10}\sin(0)\right)\right\} = 0$$

例 2　奇関数 × 偶関数 = 奇関数だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(2t)dt = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3t)\cos(5t)dt = 0$$

例 3　前ページの公式④，⑤，⑧は奇関数の積分だから 0 になる。

問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(3t)dt =$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(2t)dt =$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4t)\sin(3t)dt =$

< 三角多項式の係数 1 >

例　2 次の三角多項式

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t)$$

に対し，8 ページの公式から

(1) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = a_0\int_{-\pi}^{\pi} 1dt + a_1\int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt + b_1\int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt + a_2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t)dt + b_2\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)dt$$

$$= a_0 \times 2\pi + a_1 \times 0 + b_1 \times 0 + a_2 \times 0 + b_2 \times 0 = 2\pi a_0$$

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(2t)dt = a_0\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t)dt + a_1\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos(2t)dt + b_1\int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos(2t)dt$$

$$+a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(2t)dt + b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2t)\cos(2t)dt$$

$$= a_0 \times 0 + a_1 \times 0 + b_1 \times 0 + a_2 \times \pi + b_2 \times 0 = \pi a_2$$

問　例と同じ $f(t)$ に対し，次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t dt =$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t dt =$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(2t)dt =$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(3t)dt =$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(3t)dt =$

< 三角多項式の係数 2 >

例　n 次の三角多項式を

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)\}$$

とおく。$1\leqq m\leqq n$ なる自然数 m に対して, 8 ページの結果より

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(mt)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{a_0+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)\Big)\right\}\cos(mt)dt$$

$$=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)dt+\sum_{\substack{1\leqq k\leqq n\\ k\neq m}}\left\{a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\cos(mt)dt+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\cos(mt)dt\right\}$$

$$+a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(mt)dt+b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt)\cos(mt)dt=\pi a_m$$

問　例の $f(t)$ と自然数 $m(1\leqq m\leqq n)$ に対し, 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(mt)dt$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$

< フーリエ級数 1 >

三角多項式
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$
は周期 2π の周期関数である。前ページの結果より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2\pi a_0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)dt = \pi a_m, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)dt = \pi b_m$$

だから各係数は

$$(*)\ \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt}\ (k \geqq 1)$$

で定まる。一方 7 ページの図 5 や図 6 を見ると，一般の周期 2π の
周期関数も三角多項式で近似できることが予想される。そこで一般の
周期 2π の周期関数 $f(t)$ に対し，$(*)$ で定められた係数 a_0, a_k, b_k を
とるとき，無限級数

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1\cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt) + \cdots \\ &\qquad = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\} \end{aligned}$$

は $f(t)$ を近似としていると考え，

$$\boxed{f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}}$$

と書き，発見者の名前をつけて $f(t)$ の**フーリエ級数** (Fourier series) という。
また a_0, a_k, b_k を**フーリエ係数**という。

例　$f(t)$ が偶関数のときは $f(t)\cos(kt)$ は偶関数であり，$f(t)\sin(kt)$ は奇関数だから

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = 0$$

よって $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt)$$

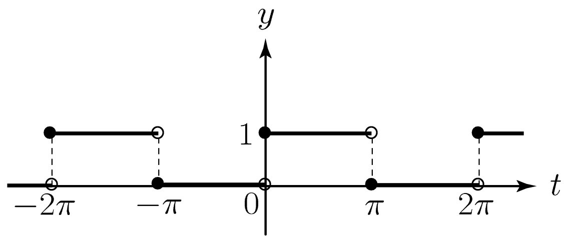
問　$f(t)$ が奇関数の場合にフーリエ係数とフーリエ級数を例のように表せ。

< フーリエ級数 2 >

例 $f(t)$ が図 1 のような周期関数の場合のフーリエ級数を求めたい。

$-\pi \leqq f(t) \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \leqq t < \pi \\ 0 & : -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$$



(図1)

である。フーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1dt = \frac{1}{2\pi}\left[t\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k}\cos(0)\right) = \frac{1}{\pi k}\{-\cos(k\pi)+1\} = \begin{cases} 0 & : k \text{ が偶数} \\ \dfrac{2}{k\pi} & : k \text{ が奇数} \end{cases}$$

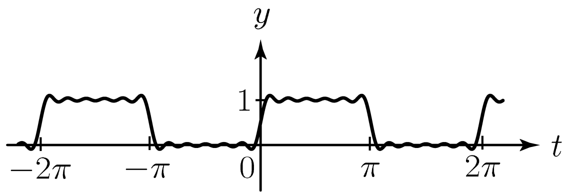
であるからフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7t) + \frac{2}{9\pi}\sin(9t) + \frac{2}{11\pi}\sin(11t) + \cdots$$

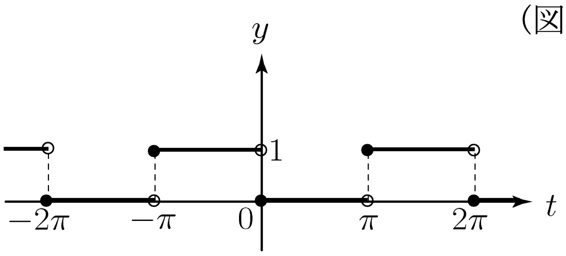
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\sin t + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t) + \frac{1}{9}\sin(9t) + \frac{1}{11}\sin(11t) + \cdots\right\}$$

となる。右図 (図 2) はこのフーリエ級数の $k = 11$ までの部分和のグラフである。



(図2)

問 $f(t)$ が図 3 の周期関数であるとき、$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。



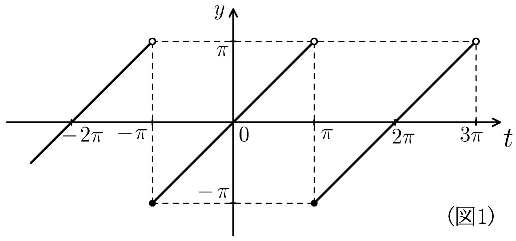
(図3)

＜ フーリエ級数 3 ＞

例　$f(t)$ が図 1 のような周期関数のとき
$-\pi < t < \pi$ の範囲では

$$f(t) = t$$

であるから、$f(t)$ は奇関数と考える。



(図1)

12 ページの結果より奇関数の場合，フーリエ係数は

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_k = 0 \quad (k \geqq 1) \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(kt)dt$$

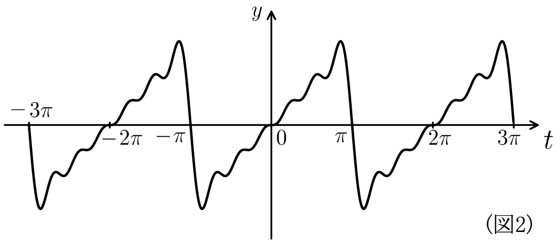
となり、部分積分法より

$$\int_0^{\pi} t\sin(kt)dt = \left[t\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kt)}{k}dt = -\frac{\pi}{k}\cos(k\pi)$$

であるから

$$b_k = -\frac{2}{k}\cos(k\pi) = \begin{cases} \frac{2}{k} & : \ k \text{ が奇数} \\ -\frac{2}{k} & : \ k \text{ が偶数} \end{cases}$$

となり、フーリエ級数は



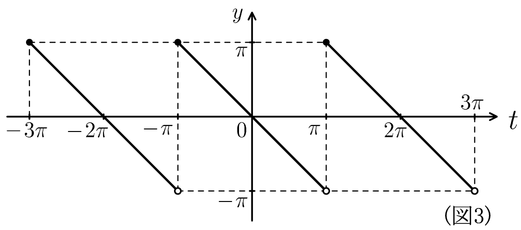
(図2)

$$\begin{aligned} f(t) &\sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\} \\ &= \frac{2}{1}\sin t - \frac{2}{2}\sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t) - \frac{2}{4}\sin(4t) + \frac{2}{5}\sin(5t) - \frac{2}{6}\sin(6t) + \cdots \\ &= 2\left\{\sin t - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{5}\sin(5t) - \frac{1}{6}\sin(6t) + \cdots\right\} \end{aligned}$$

となる。図 2 のグラフはこのフーリエ級数の $k = 6$ までの部分和のグラフである。

問　$f(t)$ が図 3 の周期関数であるとき、

$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。



(図3)

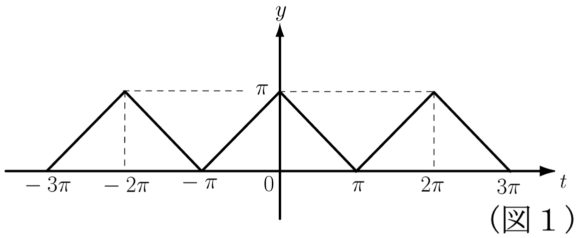
＜ フーリエ級数 4 ＞

例　$f(t)$ が図 1 のような周期関数

のとき $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t) = \pi - |t|$$

であるから，$f(t)$ は偶関数である。



（図１）

12 ページの例から偶関数の場合のフーリエ級数は

$$b_k = 0 \ \ , \ \ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\pi t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\left\{\left[(\pi - t)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{0 - 0 + \int_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi}$$

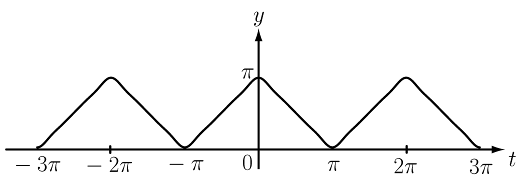
$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\cos(k\pi)}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2}\right\} = \frac{2}{\pi k^2}\{-\cos(k\pi) + 1\} = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi} & : k \text{ が奇数} \\ 0 & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$

となる。よって $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left\{\cos t + \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{25}\cos(5t) + \frac{1}{49}\cos(7t) + \cdots\right\}$$

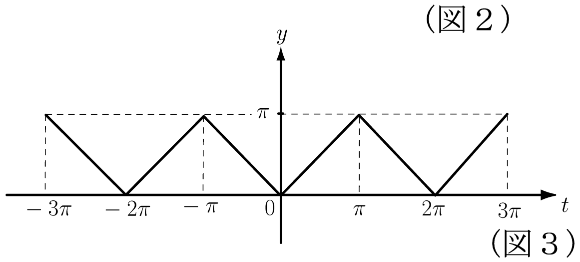
となる。
図 2 のグラフはこのフーリエ級数
の $k = 7$ までの部分和のグラフ
である。



（図２）

問　$f(t)$ が図 3 の周期関数であるとき，

$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。



（図３）

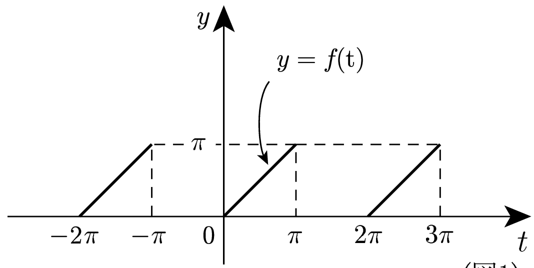
< フーリエ級数 5 >

例 $f(t)$ が図 1 のような周期関数のとき

$-\pi < t < \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} t: & 0 \leqq t < \pi \\ 0: & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

となるのでフーリエ係数は



(図1)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,dt = \frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(kt)dt = -\frac{\cos(k\pi)}{k}$$

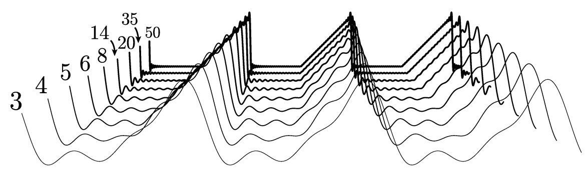
となるのでフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k^2}\right)\cos(kt) - \left(\frac{\cos(k\pi)}{k}\right)\sin(kt)\right\}$$

となる。

図 2 では $n = 3, 4, 5, 6, 8, 14, 20, 35, 50$ のときの $S_n(t)$ のグラフを $-3\pi \leqq t \leqq 3\pi + 0.5$ までの範囲で手前から順に描いた図である。見やすくするために手前のグラフを拡大してある。

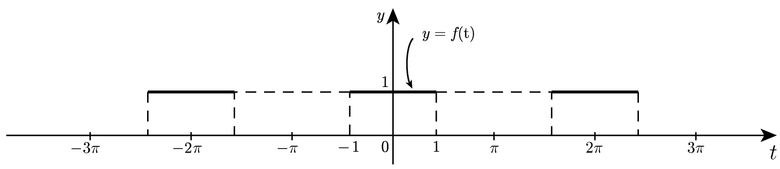


(図2)

問 $f(t)$ が図 3 のような周期関数のとき

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} 0: & 1 < t \leqq \pi \\ 1: & -1 \leqq t \leqq 1 \\ 0: & -\pi \leqq t < -1 \end{cases}$$



(図3)

となる。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ を求め，例のように $\sum$ で表せ。

< フーリエ級数 6 >

関数 $f(t)$ に対するフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \bigl\{ a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \bigr\}$$

とする。フーリエ級数 $S_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$ は元の関数 $f(t)$ と一致するかどうかは場合によって異なる。

例 1　$f(t)$ が 15 ページの例のような連続な周期関数のとき，$f(t)$ と第 7 部分和 $S_7(t)$ のグラフはほとんど一致しているように見える。実際に，この場合は全ての実数 t でフーリエ級数と元の関数 $f(t)$ が一致している。つまり

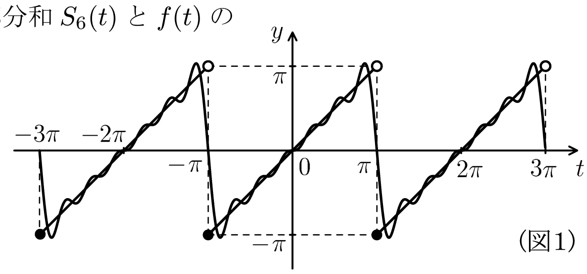
$$f(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl\{ a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \bigr\} = S_\infty(t)$$

が全ての実数 t で成り立つ。

例 2　$f(t)$ が 14 ページの例の関数の場合，$t = \pm\pi\,,\ \pm3\pi\,,\ \pm5\pi\,,\ \cdots$ で $f(t)$ は不連続になる。図 1 は $n = 6$ までの部分和 $S_6(t)$ と $f(t)$ のグラフを重ねて表したものである。このグラフでは $t = \pi$ のとき

$$f(\pi) = -\pi\ ,\ S_6(\pi) = 0$$

である。実際フーリエ級数 $S_\infty(t)$ は



(図1)

$$S_\infty(t) = 2\left\{ \frac{1}{1}\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{5}\sin(5t) - \frac{1}{6}\sin(6t) + \cdots \right\}$$

であるが，$\sin(n\pi) = 0\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから $S_\infty(\pi) = 0$ より $f(\pi) \neq S_\infty(\pi)$ である。よって

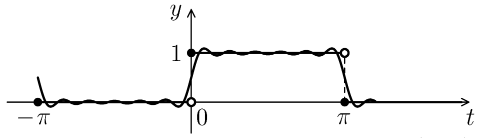
$$f(n\pi) = -\pi \quad , \quad S_\infty(n\pi) = 0 \qquad (n = \pm1\,,\ \pm3\,,\ \pm5\,,\ \cdots)$$

となる。しかし，それ以外の t では $f(t) = S_\infty(t)$ となる。

問　$f(t)$ が 13 ページの例の関数のとき，フーリエ級数は

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{ \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t) + \cdots \right\}$$

となる。(図 2 の実線は $S_{11}(t)$ のグラフである。)
次の値を求めよ。



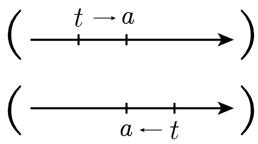
(図2)

(1)　$f(0) =$ 　　　　　　，$S_\infty(0) =$

(2)　$f(\pi) =$ 　　　　　　，$S_\infty(\pi) =$

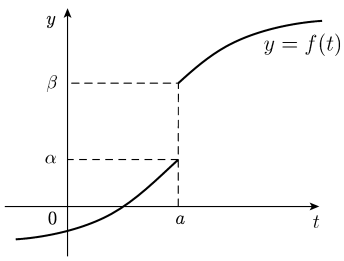
< 左極限・右極限 >

変数 t が a より小さい値から a に近づくことを $t \to a-0$,
変数 t が a より大きい値から a に近づくことを $t \to a+0$,
と表す。関数 $f(t)$ が右図のような場合は



$$\lim_{\substack{t\to a\\ t<a}} f(t) = \alpha \quad (\text{左側極限値})$$

$$\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} f(t) = \beta \quad (\text{右側極限値})$$



となる。このとき α を $t=a$ における $f(t)$ の**左側極限値**, β を $t=a$ における $f(t)$ の**右側極限値**という。このワークブックでは

$$\boxed{\lim_{\substack{t\to a\\ t<a}} f(t) = f(a-0) \quad (\text{左側極限値})}$$

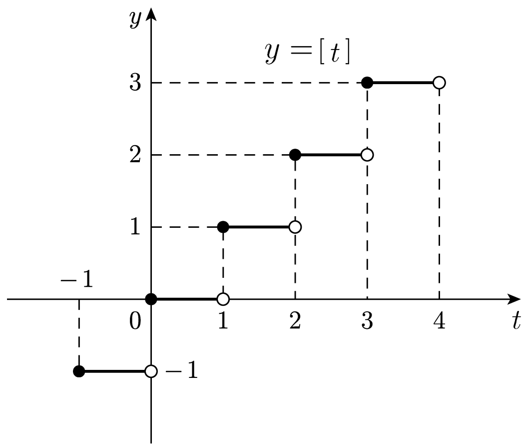
$$\boxed{\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} f(t) = f(a+0) \quad (\text{右側極限値})}$$

という記号で表すことにする。

例　関数 $f(t)$ がガウス記号 $[t]$(t 以下の最大整数) であるとき，$y=f(t)$ のグラフは右図のようになる。
このとき $t=1$ における左右の極限値は

$$f(3-0)=2 \quad , \quad f(3+0)=3$$

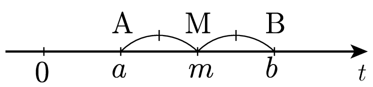
である。



問 1　例の場合に次の値を求めよ。
① $f(-0)$　　② $f(+0)$　　③ $f(2-0)$　　④ $f(2+0)$

(注)$f(0-0)$ を $f(-0)$,　$f(0+0)$ を $f(+0)$ と略記する。

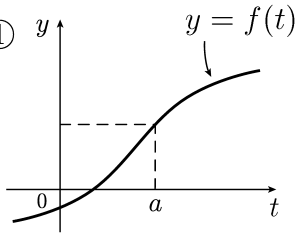
問 2　数直線上の 2 点 A(a)，B(b)　($a<b$) に対し，A と B の中点を M(m) とする。
線分 AB の距離 AB と中点の座標 m を a と b で表せ。

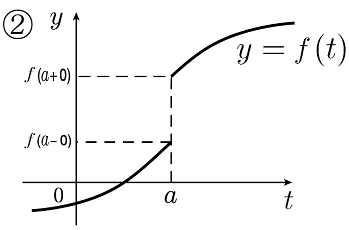


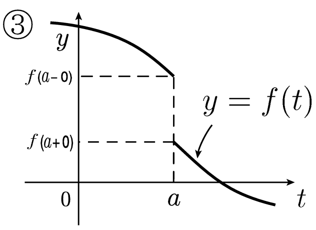
AB =

m =

問 3　$y=f(t)$ のグラフが次の各場合に $\frac{1}{2}(f(a-0)+f(a+0))$ の値を y 軸上に図示せよ。

①


②


③


< フーリエ級数の収束 >

$f(t)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和は

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

である。ただし係数 a_0, a_k, b_k は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

である。$f(t)$ が 16 ページ図 1 のような関数のとき, $S_n(t)$ は図 2(P16) のような曲線の形をとりながら $f(t)$ に近づいていく。

[定理]　周期 2π の周期関数 $f(t)$ に対し次式が成り立つ。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}} \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

(注) (正確に言うと関数 $f(t)$ には " 区分的になめらか " という条件が必要だが、その定義は複雑なので省略する。普通の関数は全てこの条件を満足すると思ってよい。)

この定理の右辺 $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ は左側極限値と右側極限値の平均である。

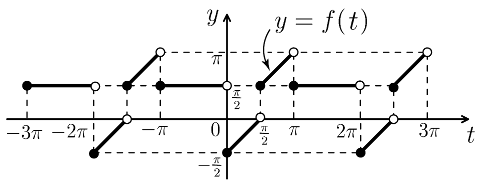
前ページ問 3 の結果より,

$f(t)$ が $t=t_0$ で連続のとき $S_\infty(t_0) = \lim_{n\to\infty} S_n(t_0) = f(t_0)$ である。

$f(t)$ が $t=t_0$ で不連続のとき極限値 $S_\infty(t_0)$ は左側極限値 $f(t_0-0)$ と右側極限値 $f(t_0+0)$ の中点である。この定理を

$$\boxed{S_\infty(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\} = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}} \quad (\text{フーリエ級数の収束})$$

と表すこともある。



例　$f(t)$ が右図のような周期関数のとき $f(t)$ のフーリエ級数を $S_\infty(t)$ とすると

$$S_\infty(-\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\left\{f(-\tfrac{\pi}{2}-0) + f(-\tfrac{\pi}{2}+0)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\pi}{2}$$

$$S_\infty(\pi) = \frac{1}{2}\left\{f(\pi-0) + f(\pi+0)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\pi+\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{3\pi}{4}$$

問　例の場合に以下の値を求めよ。

(1)$S_\infty(\frac{3\pi}{2})$　　　　(2)$S_\infty(0)$

(3)$S_\infty(\frac{\pi}{2})$　　　　(4)$S_\infty(-\pi)$

< 一般の周期関数 1 >

例 1　図 1 の曲線は

$$y = \sin(2\pi t)$$

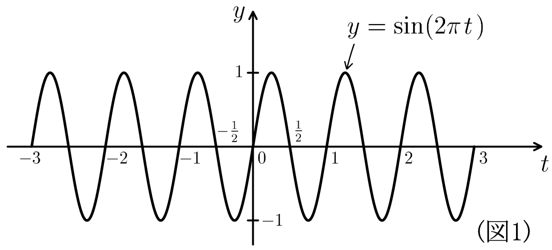
のグラフである。この関数は周期 1 の周期関数である。これは三角関数の角度の部分 $(2\pi t)$ が $360^\circ = 2\pi$ となるとき，すなわち

$$2\pi t = 2\pi$$

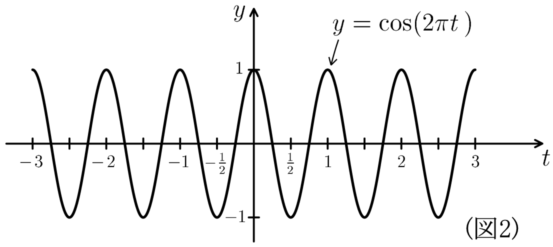
のときは $t = 1$ であるから周期が 1 になる。図 2 の曲線は

$$y = \cos(2\pi t)$$

であり，同様に周期 1 の周期関数である。



(図1)



(図2)

例 2　図 3 の曲線は

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

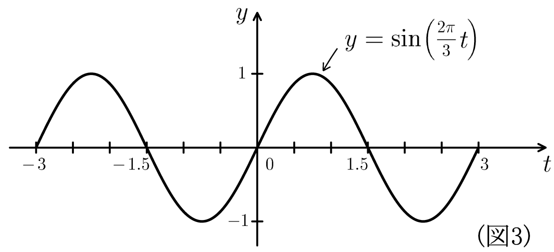
のグラフである。この関数は周期 3 の周期関数である。これは三角関数の角度の部分 $\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ が $360^\circ = 2\pi$ となるとき，すなわち

$$\frac{2\pi}{3}t = 2\pi$$

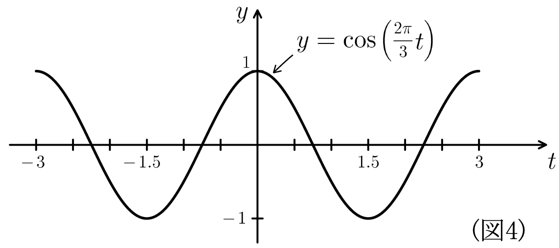
のときは $t = 3$ であるから周期が 3 になる。図 4 の曲線は

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

であり，同様に周期 3 の周期関数である。



(図3)



(図4)

問　次の関数の周期を求めよ。(ただし L, l は正の実数，n は自然数である。)

(1) $\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$　　(2) $\cos\left(\frac{2\pi}{7}t\right)$　　(3) $\sin\left(\frac{2\pi}{9}t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}t\right)$

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$　　(5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$　　(6) $\sin(\pi t)$

(7) $\cos(3\pi t)$　　(8) $\sin(n\pi t)$　　(9) $\cos\left(\frac{2\pi}{L}t\right)$

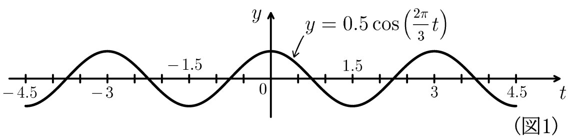
(10) $\sin\left(\frac{\pi}{l}t\right)$　　(11) $\cos\left(\frac{2n\pi}{L}t\right)$　　(12) $\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)$

< 一般の周期関数 2 >

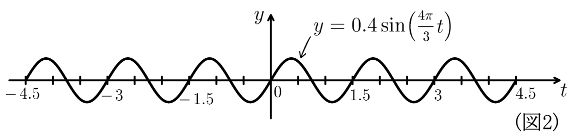
前ページの結果より

$$\sin\left(\frac{2n\pi}{L}t\right) \quad , \quad \cos\left(\frac{2n\pi}{L}t\right)$$

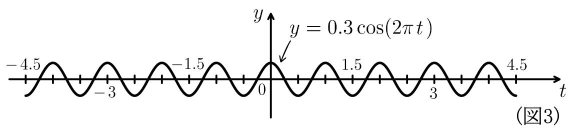
は基本周期が $\dfrac{L}{n}$ (n 倍周期が L) の周期関数である。



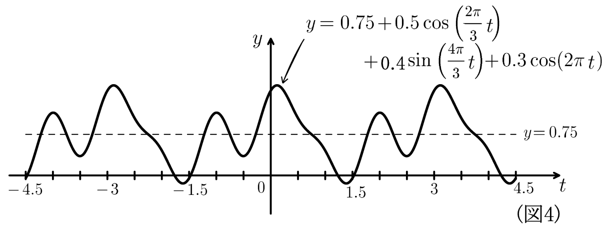
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

例 (1) $y = 0.5\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$ は周期 3 の周期関数である (図 1)。

(2) $y = 0.4\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}t\right)$ は周期 $\dfrac{3}{2} = 1.5$ の周期関数である (図 2)。

(3) $y = 0.3\cos(2\pi t)$ は周期 1 の周期関数である (図 3)。

(4) 上の (1)〜(3) の関数と $y = 0.75$ を加えた和の関数

$$y = 0.75 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 0.4\sin\left(\frac{4\pi}{3}t\right) + 0.3\cos(2\pi t)$$

は周期 3 の周期関数である (図 4)。

(注) (2) の関数は基本周期が $\dfrac{3}{2}$ であるが倍周期が 3 である。(3) の関数も基本周期が 1 であるが 3 倍周期は 3 である。

例 (5) 一般に定数 $a_0\,,\,a_1\,,\,\cdots\,,\,a_n\,,\,b_1\,,\,\cdots\,,\,b_n$ に対し

$$y = a_0 + a_1\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + b_1\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + a_2\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) + b_2\sin\left(\frac{4\pi}{3}t\right) + \cdots$$
$$\cdots + a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right) + b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)$$

は周期 3 の周期関数である。

問 次の関数の周期を求めよ。

(1) $y = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos\left(\dfrac{2k\pi}{5}t\right) + b_k\sin\left(\dfrac{2k\pi}{5}t\right)\right\}$

(2) $y = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos\left(\dfrac{2k\pi}{L}t\right) + b_k\sin\left(\dfrac{2k\pi}{L}t\right)\right\}$

(3) $y = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos\left(\dfrac{k\pi}{l}t\right) + b_k\sin\left(\dfrac{k\pi}{l}t\right)\right\}$

< 一般周期のフーリエ級数 1 >

正の定数 L に対し , 周期 L の周期関数 $f(t)$ を考える。$y = f(t)$ のグラフは $-\frac{L}{2} \leqq t \leqq \frac{L}{2}$ の範囲の曲線が周期的に繰り返されていく。周期 2π の関数の場合と同様に $f(t)$ のフーリエ級数が考えられる。

この場合 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$\boxed{f(t) \quad \sim \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) \right\}}$$

(周期 L の フーリエ級数)

となる。ここでフーリエ係数 a_0 , a_k , b_k は

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt \qquad (k \geqq 1)$$

(周期 L の フーリエ係数)

となる。

問 周期関数 $f(t)$ の周期が次の各場合に , 上記のようにフーリエ級数とフーリエ係数を求めよ。(ただし $\ell > 0$)

(1) 周期 $2\,\ell$

(2) 周期 $2\pi\,\ell$

< 一般周期のフーリエ級数 2 >

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は 19 ページと同様にその収束が成立する。

すなわち

$$\boxed{a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)\right\} = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}} \quad \text{(フーリエ級数の収束)}$$

である。ただし

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt \ , \ a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt \ , \ b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt$$

である。もし $f(t)$ が偶関数であれば , この係数は

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt \quad , \quad b_k = 0$$

となる。

問 1　$f(t)$ が奇関数の場合のフーリエ係数 a_0 , a_k , b_k を求めよ。

$a_0 =$ 　　　　　　　　　　,　$a_k =$

$b_k =$

問 2　$f(t)$ が周期 $2\,\ell$ の周期関数の場合，フーリエ級数の収束の式を書け。

問 3　$f(t)$ が問 2 の場合でかつ偶関数 (または奇関数) の場合にフーリエ係数を求めよ。

(1) $f(t)$ が偶関数のとき

$a_0 =$ 　　　　　　　　　　,　$a_k =$

$b_k =$

(2) $f(t)$ が奇関数のとき

$a_0 =$ 　　　　　　　　　　,　$a_k =$

$b_k =$

< オイラーの公式 >

自然対数の底 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(= 2.718\cdots)$ に対し，指数関数 e^x をマクローリン展開によって展開すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad \big(= \exp(x)\big)$$

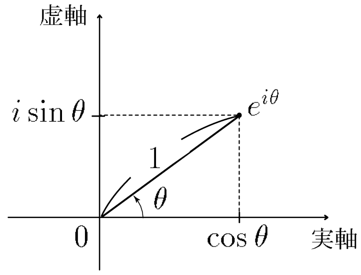
となる。この右辺を $\exp(x)$ と書く場合もある。Z が複素数の場合の指数関数 e^Z を $\exp(Z)$ で定義する。虚数単位 i と実数 θ に対し

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \exp(i\theta) = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

となる。この式

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \qquad \text{(オイラーの公式)}$$

を**オイラーの公式**という。複素平面で表すと右図のようになる。



問 1　次の複素数を $x+iy$ (x と y は実数) の形にし，できるだけ簡単にせよ。

(1) $e^{2\pi i}$　　(2) $e^{-\pi i}$　　(3) $e^{\frac{\pi}{2}i}$

(4) $e^{\frac{\pi}{3}i}$　　(5) $e^{-\frac{\pi}{6}i}$　　(6) $e^{\frac{3}{4}\pi i}$

問 2　実数 θ に対し $\left|e^{i\theta}\right|$ の値を求めよ。$\big($ただし $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ である$\big)$

$\left|e^{i\theta}\right| =$

問 3　実数 θ に対し三角関数の性質 $\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ を用いて次式を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ および i で表せ。

$e^{-i\theta} =$

問 4　オイラーの公式と問 3 の結果をつかって次式を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ で表せ。(分母は実数化せよ)

$\cos\theta =$　　　　　　　　,　$\sin\theta =$

< 三角多項式の複素数表示 >

例　定数 a_0 , a_1 , a_2 ,$\cdots$, a_n , b_1 , b_2 ,$\cdots$, b_n に対して三角多項式

$$\boxed{S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}} \quad (1)$$

を考える。前ページより

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad , \quad \sin\theta = \frac{i}{2}\left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)$$

である。これを (1) 式に適応すると

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k \times \frac{1}{2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right) + b_k \times \frac{i}{2}\left(e^{-ikt} - e^{ikt}\right)\right\} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}i\right)e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}i\right)e^{-ikt} \end{aligned}$$

となる。ここで $k \geqq 1$ に対し

$$\boxed{C_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}i \quad , \quad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}i \quad , \quad C_0 = a_0} \quad (2)$$

とおくと $S(t)$ は

$$S(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} C_{-k}e^{-ikt}$$

より

$$\boxed{S(t) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikt}} \quad (3)$$

と表される。

問　定数 ω , a_0 , a_1 ,$\cdots$, a_n , b_1 ,$\cdots$, b_n に対して、三角多項式

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\}$$

を例の (3) 式のような形にせよ。また C_k を (2) 式のような式で表せ。

< フーリエ級数の複素数表示 1 >

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ とすると

$$\boxed{f(t) \quad \sim \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\}} \quad (1)$$

と表される。ここでフーリエ係数は

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt} \quad (2)$$

である。この第 n 部分和 $S_n(t)$ は前ページの結果より

$$\boxed{S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\} = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ik\omega t}} \quad (3)$$

と表される。ただし C_k は

$$\boxed{C_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}i \quad , \quad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}i \quad , \quad C_0 = a_0} \quad (4)$$

である。$k \geqq 1$ のときの C_k は (2) 式より

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2}\{a_k - b_k i\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt\right) - \left(\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt\right)i\right\} \\ &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\{\cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t)\}dt = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt \end{aligned}$$

問　$k \geqq 1$ に対し、次の係数を上のような $f(t)$ に関する積分の形にせよ。

(1)　$C_{-k} = \dfrac{1}{2}(a_k + b_k i) =$

(2)　$C_0 = a_0 =$

< フーリエ級数の複素数表示 2 >

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned} &f(t) \quad \sim \quad a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\, a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\,\right\} \quad , \quad \omega=\frac{2\pi}{L} \\ &a_0=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)dt \ , \ a_k=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)\cos(k\omega t)dt \ , \ b_k=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)\sin(k\omega t)dt \end{aligned}}$$

である。このフーリエ級数の等 n 部分和は前ページより

$$\boxed{S_n(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\,\right\}=\sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ik\omega t}} \quad (1)$$

と表される。ここで

$$\boxed{C_k=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)e^{-ik\omega t}dt} \quad (2)$$

である。

問 1　(2) 式の C_k において k の代わりに $-k$ (または 0) を代入した式を

積分の形で表示し , 前ページ問の結果を使って a_0 , a_k , b_k で表せ。

$C_{-k}=$

$C_0=$

(1) 式で $n\to\infty$ の極限を考えるとフーリエ級数の式 ($*$) は次のようになる。

$$(**)\quad \boxed{f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \ , \ \omega=\frac{2\pi}{L} \ , \ C_k=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)e^{-ik\omega t}dt}$$

< 周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数 (複素数表示) >

$(**)$ 式を**フーリエ級数の複素数表示**という。

問 2　周期関数 $f(t)$ の周期が以下の場合に , フーリエ級数を複素数

表示せよ。(ただし $m>0$)

(1)　周期 2π

(2)　周期 $2\pi m$

< フリーエ級数の練習 >

問 1　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が次の場合に，$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。

(1) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ t = \pi \\ \frac{\pi}{2} & : \ 0 \leqq t < \pi \\ 0 & : \ -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$

(2) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ t = \pi \\ 1 & : \ 0 < t < \pi \\ 0 & : \ t = 0 \\ -1 & : \ -\pi < t < 0 \\ 0 & : \ t = -\pi \end{cases}$

(3) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ t = \pi \\ t & : \ -\pi < t < \pi \\ 0 & : \ t = -\pi \end{cases}$

(4) $f(t) = |t| - \pi \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$

問 2　問 1(1) の結果を利用して，次式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

問 3　問 1(4) の結果を利用して，次式を示せ。

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

問 4　周期 $L(>0)$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の複素数表示は

$$f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \quad , \qquad C_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt$$

である。(ただし $\omega = \frac{2\pi}{L}$)　次の各場合に $f(t)$ のフーリエ級数を実数表示せよ。

(1) $f(t)$ が偶関数のとき

(2) $f(t)$ が奇関数のとき

< 複素数値関数の微分・積分 >

実変数 t の複素数値関数 $z(t)$ に対して，導関数を

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}z(t) = \lim_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}$$

と定義する。また $\dfrac{d}{dt}Z(t) = z(t)$ であるとき, 不定積分と定積分を

$$\int z(t)dt = Z(t) + C \qquad (C \text{ は任意の複素数定数}) \quad , \quad \int_a^b z(t)dt = [Z(t)]_a^b = Z(b) - Z(a)$$

で定義する。この定義から，次の性質がわかる。

Ⅰ. $\dfrac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t)) = \dfrac{d}{dt}z_1(t) + \dfrac{d}{dt}z_2(t) \quad , \quad \displaystyle\int (z_1(t)+z_2(t))dt = \int z_1(t)dt + \int z_2(t)dt$

Ⅱ. $\dfrac{d}{dt}(Kz(t)) = K\dfrac{d}{dt}z(t) \quad , \quad \displaystyle\int Kz(t)dt = K\int z(t)dt \qquad (K \text{ は任意の複素数定数})$

例 1　$z(t)$ が実数値関数 $x(t), y(t)$ によって $z(t) = x(t) + iy(t)$ と表されているときは,
次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}\{x(t)+iy(t)\} = \frac{d}{dt}x(t) + i\frac{d}{dt}y(t) \quad , \quad \int\{x(t)+iy(t)\}dt = \int x(t)dt + i\int y(t)dt$$

例 2　実数定数 α, β に対し，$e^{(\alpha+\beta i)t}$ の導関数は

$$\frac{d}{\alpha t}e^{(\alpha+\beta i)t} = \frac{d}{dt}e^{\alpha t}\cos(\beta t) + i\frac{d}{\alpha t}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$
$$= \alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t) + i\{\alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t)\}$$
$$= e^{\alpha t}\{(\alpha+\beta i)\cos(\beta t) + i(\alpha+\beta i)\sin(\beta t)\} = (\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)t}$$

例 3　例 2 と性質Ⅱより　$\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{1}{\alpha+\beta i}e^{(\alpha+\beta i)t}\right\} = e^{(\alpha+\beta i)t}$

よって　$\displaystyle\int e^{(\alpha+\beta i)t}dt = \frac{1}{\alpha+\beta i}e^{(\alpha+\beta i)t} + C$

例 4　$\displaystyle\int_0^1 e^{(2+3i)t}dt = \left[\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}\right]_0^1 = \frac{1}{2+3i}\left(e^{2+3i}-1\right)$

問　次の定積分を求めよ。(ここで b は正の定数である)

(1) $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{(\alpha+\beta i)t}dt$

(2) $\displaystyle\int_0^b e^{(-2+3i)t}dt$

< 極限 >

$x \to +\infty,\ x \to -\infty$ のときの極限を復習する。

① $0 < r < 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r^x = 0$　,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} r^x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^y = +\infty$

② $r > 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} r^x = +\infty$　,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} r^x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^y = 0$

例 1　$\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-2b} = 0$　,　$\displaystyle\lim_{a\to-\infty} e^{-2a} = +\infty$

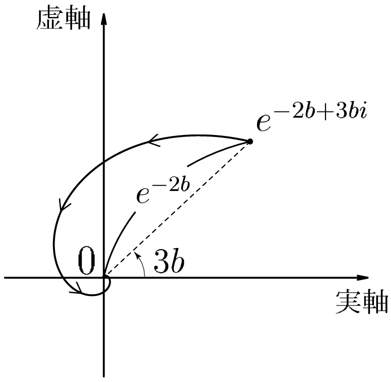
例 2　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0$　(ロピタルの定理 (P79) より)

例 3　$\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{(-2+3i)b} = \lim_{b\to+\infty} e^{-2b}\times\{\cos(3b)+i\sin(3b)\}$

ここで $|\cos(3b)+i\sin(3b)| = 1$ より

$$\lim_{b\to+\infty}\left|e^{(-2+3i)b}\right| = \lim_{b\to+\infty} e^{-2b} = 0$$

よって $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{(-2+3i)b} = 0$



(注)　例 3 の収束は複素平面上の点が原点 0 に近づくことを意味する。

問　次の極限値を求めよ。ここで $\alpha,\ \beta > 0$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-\alpha b}$　　(2) $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\beta b}$

(3) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} e^{\beta a}$　　(4) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\beta a}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$

(7) $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-(2+3i)b}$　　(8) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)a}$

< 広義積分 1 >

積分範囲が無限区間である定積分を次式で定め，**広義の定積分**または**広義積分**という。

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt \ , \quad \int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(t)dt$$

例 1　$\displaystyle \int_0^{\infty} te^{-2t}dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b te^{-2t}dt = \lim_{b \to +\infty} \left\{ \left[t\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right) \right]_0^b - \int_0^b \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right) dt \right\}$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left\{ -\frac{b}{2e^{2b}} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2t} \right]_0^b \right\} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{4e^{2b}} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

例 2　$\displaystyle \int_{-\infty}^0 e^{(2+3i)t}dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^{(2+3i)t}dt = \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)t} \right]_a^0$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left\{ \frac{1}{2+3i} - \frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)a} \right\} = \frac{1}{2+3i}$$

問　次の値を求めよ。ただし $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ i = \sqrt{-1}$ とする。

(1) $\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt$

(2) $\displaystyle \int_{-\infty}^0 e^{\beta t}dt$

(3) $\displaystyle \int_0^{\infty} te^{-t}dt$

(4) $\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-(2+3i)t}dt$

(5) $\displaystyle \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+\beta i)t}dt$

< 広義積分 2 >

定理　定数 α, β に対し、次式が成り立つ。ただし $\alpha > 0$。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\ \frac{\sin(\beta t)}{t}dt = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

< 証明の概略 >

(1) $\displaystyle I = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt$ とおくと部分積分法より

$$I = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\beta\sin(\beta t)dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin(\beta t)dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\left\{\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\beta}\beta\cos(\beta t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt = \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 I$$

であるから

$$I = \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

(2) $\displaystyle f_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\ \frac{\sin(xt)}{t}dt$ とおいて x で微分すると

$$\frac{d}{dx}f_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\frac{d}{dx}\sin(xt)}{t}dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(xt)dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$$

よって $f_\alpha(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) + C$ (C は定数)。　ここで $x=0$ のとき

$\displaystyle f_\alpha(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{0}{t}dt = 0$　より　$C=0$　よって　$f_\alpha(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$

従って $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin(\beta t)}{t}dt = f_\alpha(\beta) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{\alpha\to+0}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{\alpha\to+0}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$

＜広義積分 3＞

定理　$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

＜証明＞

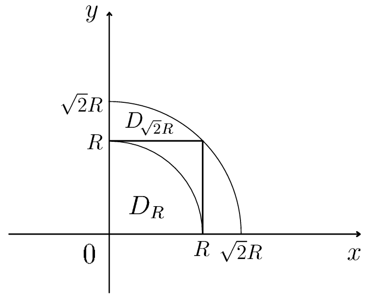
$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{R}\int_0^{R} e^{-x^2-y^2}dxdy\right)$$

$$D_R = \{(x,\ y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq R^2\}$$

とおくと

$$D_R \subset \{(x,\ y)\ :\ 0 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq R\} \subset D_{\sqrt{2}R}$$

より



$$(※)\quad \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqq \int_0^{R}\int_0^{R} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

である。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変数変換すると $\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = r$ より

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r} e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{2}\times\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

である。(※) より

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leqq \left(\int_0^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \leqq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

ここで $R\to\infty$ とすると

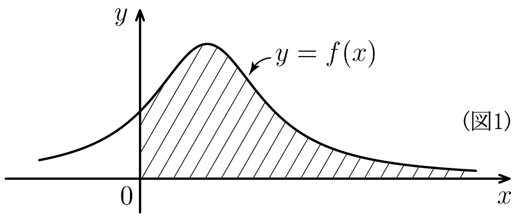
$$\frac{\pi}{4} \leqq \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 \leqq \frac{\pi}{4}$$

より $\displaystyle\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ となる。(証明終)

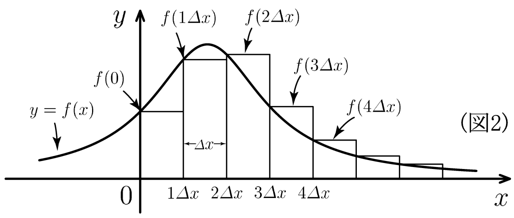
(注)　多項式（整式）, 分数関数, べき関数, 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数, 双曲線関数, 逆双曲線関数およびそれらの関数を組み合わせて得られる関数を **初等関数** という。

不定積分 $\displaystyle\int e^{-x^2}dx$ や $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}dx$ は初等関数では表されないことがわかっている。

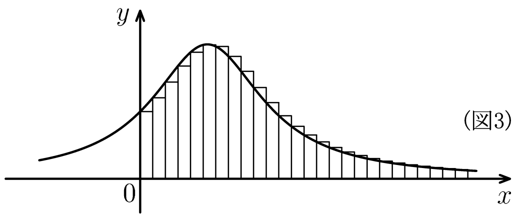
< 広義積分の近似 >



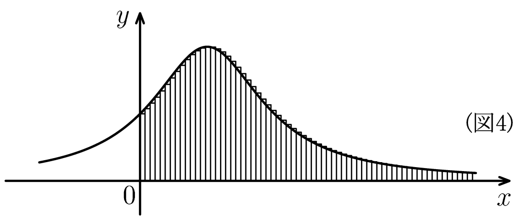
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

$f(x) \geqq 0$ のとき $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ は図 1 の斜線部分の面積を意味する。これを図 2 のように底辺が Δx の長方形の面積の和で近似する。すなわち

$$\int_0^\infty f(x)dx \fallingdotseq f(0)\Delta x + f(1\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + \cdots$$

$$\cdots + f(k\Delta x)\Delta x + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x$$

ここで底辺の幅 Δx を小さくすれば，図 3 , 4 のように図 1 の面積 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ に近づく。

一般に次の定理がなりたつ。

[定理 1] $\boxed{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^\infty f(x)dx}$

この定理は $f(x) \geqq 0$ でなくても $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|dx$ が有限の値であれば成立する。

同様にして次の定理も成立する。$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx$ が有限の値であれば次式が成立する。

[定理 2] $\boxed{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx}$

例

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k\Delta x} \sin(\alpha k\Delta x)\Delta x = \int_0^\infty e^{-\pi x} \sin(\alpha x)dx$

(2) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\beta(k\Delta x)^2} k(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2} x dx$

(3) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)e^{itk\Delta x}\Delta x = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{itx}dx$

(注) このような問題は $k\Delta x \to x$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \boxed{}\,\Delta x \to \int_0^\infty \boxed{}\,dx$, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{}\,\Delta x \to \int_{-\infty}^\infty \boxed{}\,dx$

とおきかえればよい。

問 次の極限を広義積分で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha k\Delta x)\Delta x}{1 + (k\Delta x)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\Delta x)e^{ik\Delta xt}\Delta x$

< フーリエ変換の導出 >

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$\boxed{f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}} \quad \text{(フーリエ級数)}$$

であった。ここで

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{L} \quad , \quad C_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt} \quad \text{(フーリエ係数)}$$

である。

$f(t)$ が周期関数でないときは，$f(t)$ をフーリエ級数では表現できない。そのときは周期 L が無限大 $(=\infty)$ の関数と考え，$L \to \infty$ の極限を考える。

$$F_L(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ixt}dt \quad , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

とおくと $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ より

$$C_k = \frac{1}{L}F_L(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}F_L(k\omega)$$

である。ここで $\omega = \Delta x$ とおくと $L \to \infty$ のとき $\Delta x \to 0$ であり，$F_L(x) \to F(x)$ であるから，前ページより

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi}F_L(k\omega)e^{ik\omega t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F_L(k\Delta x)e^{ik\Delta x t}\Delta x \ \longrightarrow \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F(x)e^{ixt}dx$$

と考えられる。従って

$$\boxed{f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \quad , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt}$$

が得られる。$F(x)$ を $f(x)$ のフーリエ変換という。

< フーリエ変換の定義 >

前ページの結果より

$$(*)\qquad \boxed{f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \ ,\quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt}$$

が得られた。$F(x)$ を $f(x)$ の**フーリエ変換**という。また $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$ を**フーリエ逆変換**という。

フーリエ変換にはいろいろな定義式があるが，このワークブックでは $(*)$ 式を用いることにする。

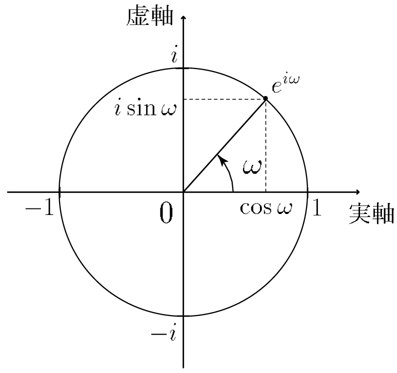
(注 1) 信号処理や通信理論の本では $(*)$ 式の変数 x を ω で表す場合が多い。$(*)$ 式のかわりに

$$(*)'\qquad \boxed{f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \ ,\quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt}$$

を用いる。t が時間を表す変数の場合に，ω を**角周波数**という。t の単位が秒であれば，関数

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

は複素平面上の単位円を 1 秒間に角度 ω だけ回転する。



(注 2) フーリエ変換の別の定義式を紹介しておく。$(*)'$ 式において

$$\ell = \frac{\omega}{2\pi}\ ,\quad \mathcal{F}(\ell) = F(2\pi\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt$$

とおくと $\omega = 2\pi\ell$，$d\omega = 2\pi d\ell$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi\ell)e^{i2\pi\ell t}2\pi d\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell$$

となるので，$(*)'$ は

$$(**)\qquad \boxed{f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell \ ,\quad \mathcal{F}(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt}$$

と書きなおせる。$(**)$ もフーリエ変換の定義式としてよく使われる。t が時間を示す変数のとき，ℓ を**周波数**という。関数 $e^{i2\pi\ell t}$

$$e^{i2\pi\ell t} = \cos(2\pi\ell t) + i\sin(2\pi\ell t)$$

の実部 $\cos(2\pi\ell t)$ と虚部 $\sin(2\pi\ell t)$ は基本周期が $\frac{1}{\ell}$ である。t の単位が秒であれば，1 秒間に基本波形が ℓ 回現れる。

< フーリエ変換 1 >

$f(t)$ のフーリエ変換 $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ を

$$\boxed{\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt} \qquad (f(t) \text{ のフーリエ変換})$$

と書くことにする。

例　オイラーの公式より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

であるから、$f(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\{\cos(xt) - i\sin(xt)\}\,dt$$

と書きなおせる。

今 $f(t)$ が偶関数であれば $f(t)\cos(xt)$ も偶関数であり、$f(t)\sin(xt)$ は奇関数であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = 0$$

となる。従ってこのときのフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f(t)] = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt \quad \cdots \quad \text{偶関数のフーリエ変換}$$

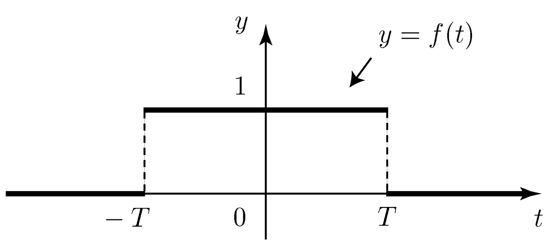
となる。

問 1　$f(t)$ が奇関数のとき、フーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を例のように簡単にせよ。

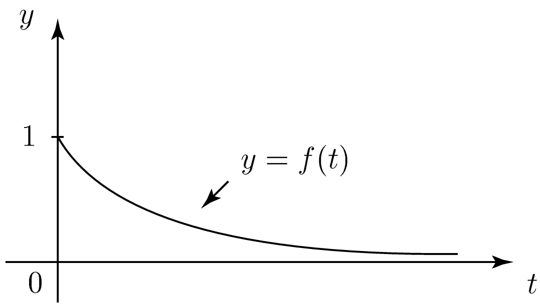
問 2　定数 $T > 0$ に対し、

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : |t| \leqq T \\ 0 & : |t| > T \end{cases}$$

とする。このとき $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。



< フーリエ変換 2 >



例　正定数 $\alpha(>0)$ に対し

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t < 0 \end{cases}$$

のとき、$f(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-ixt} dt$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-(\alpha+ix)t} dt = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{-(\alpha+ix)} e^{-(\alpha+ix)t} \right]_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left\{ -\frac{1}{\alpha+ix} e^{-(\alpha+ix)b} + \frac{1}{\alpha+ix} \right\}$$

ここで $\displaystyle \lim_{b \to +\infty} e^{-(\alpha+ix)b} = \lim_{b \to +\infty} e^{-\alpha b} \times e^{-ixb}$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{e^{\alpha b}} (\cos(xb) - i \sin(xb)) = 0$$

より $\displaystyle \mathscr{F}[f(t)] = \frac{1}{\alpha + ix}$

問　正定数 $\alpha > 0$ に対し $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ t > 0 \\ e^{\alpha t} & : \ t \leqq 0 \end{cases}$ のときフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。

< フーリエ変換 3 >

例 $\mathscr{F}[e^{-|t|}] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-ixt}dt = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b e^{-|t|}e^{-ixt}dt$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \int_a^0 e^t e^{-ixt}dt + \int_0^b e^{-t}e^{-ixt}dt \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \left[\frac{1}{1-ix}e^{(1-ix)t} \right]_{t=a}^{t=0} + \left[\frac{1}{-(1+ix)}e^{-(1+ix)t} \right]_{t=0}^{t=b} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \frac{1}{1-ix} - \frac{1}{1-ix}e^{(1-ix)a} - \frac{1}{1+ix}e^{-(1+ix)b} + \frac{1}{1+ix} \right\}$$

ここで

$$\lim_{b\to+\infty} e^{-(1+ix)b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b}\left(\cos(xb) + i\sin(xb)\right) = 0$$

$$\lim_{a\to-\infty} e^{(1-ix)a} = \lim_{a\to-\infty} e^a\left(\cos(xa) - i\sin(xa)\right) = 0$$

より

$$\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right] = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}$$

問　正定数 $\alpha > 0$ に対して $\mathscr{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right]$ を求めよ。

< フーリエ変換 4 >

定義域が $-\infty < t < \infty$ である関数 $f(t)$ が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dx < +\infty$ であるとき、$f(t)$ は**絶対可積分**であると言う。次が成り立つ。

定理　$f(t)$ が絶対可積分であれば、次が成立する。

(1) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$　,　$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$

(2) $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ は有界で連続。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$　,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

(注)　(3) をリーマン・ルベーグの補題という。

系 1　$f(t)$, $f'(t)$ が共に絶対可積分ならば

$$\mathscr{F}[f'(t)] = ix\mathscr{F}[f(t)]$$

[証明]

$$\mathscr{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-ixt}dt = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f'(t)e^{-ixt}dt$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \left[f(t)e^{-ixt}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)(-ix)e^{-ixt}dt \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{f(b)e^{-ixb} - f(a)e^{-ixa}\right\} + ix\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

$$= ix\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = ix\mathscr{F}[f(t)]$$

(証明終)

系 2　$f(t)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(u)du$ が共に絶対可積分ならば

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(u)du\right] = \frac{1}{ix}\mathscr{F}[f(t)]$$

(証明略)

< フーリエ変換 5 >

系 3　$f(t)$, $tf(t)$ が共に絶対可積分であり、$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ であるとき、

$$\frac{d}{dx}F(x) = \mathscr{F}[-itf(t)]$$

[証明の概略]

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(x+h)t}dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(t)e^{-ixt}\frac{e^{-iht}-1}{h}dt$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(t)e^{-ixt}\left\{t\times\frac{\cos(ht)-1}{ht} - it\times\frac{\sin(ht)}{ht}\right\}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}(-it)dt = \mathscr{F}[-itf(t)]$$

正確には $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_{|t|>M}|tf(t)|dt = 0$ を用いて評価する。

例　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ のとき、定数 $\alpha(\neq 0)$ に対して

$$\mathscr{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

[証明]

$$\mathscr{F}[f(\alpha t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)e^{-ixt}dt$$

ここで $\alpha t = u$ とおくと $t = \dfrac{u}{\alpha}$, $dt = \dfrac{1}{\alpha}du$ より

$$\mathscr{F}[f(\alpha t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ix\frac{u}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}du = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{x}{\alpha}u}du = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

＜ フーリエ変換 6 ＞

例　$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]$ を求めたい。$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}e^{-ixt}dt=F(x)$ とおく。

$$\frac{d}{dx}F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\left(\frac{d}{dx}e^{-ixt}\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}(-it)e^{-ixt}dt$$

$$=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(-2t)e^{-t^2}e^{-ixt}dt=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-t^2}\right)'e^{-ixt}dt=\frac{i}{2}\mathscr{F}\left[\left(e^{-t^2}\right)'\right]$$

ここで 40 ページ系 1 より $\mathscr{F}\left[\left(e^{-t^2}\right)'\right]=ix\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]$ だから

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{i}{2}\times ix\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=-\frac{x}{2}F(x)$$

となる。微分方程式 $\frac{d}{dx}F(x)=-\frac{x}{2}F(x)$ の解は

$$F(x)=Ce^{-\frac{x^2}{4}}\qquad\qquad (C\text{ は定数})$$

である。ここで $F(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}e^{0}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ より $C=\sqrt{\pi}$ 。

よって

$$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=F(x)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

問　正定数 α に対して $\mathscr{F}\left[e^{-\alpha t^2}\right]$ を求めよ。

< 合成積 >

$-\infty < t < \infty$ の範囲で定義されている 2 つの関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ に対して

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du$$

を f_1 と f_2 の「**合成積**」($convolution$) または「**たたみこみ**」という。

◎ $(f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t)$

[証明] $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du$ ここで $t-u=s$ とおくと

$$= \int_{\infty}^{-\infty} f_1(s)f_2(t-s)(-1)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-s)f_1(s)ds = (f_2 * f_1)(t)$$

定理 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(x)$, $\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(x)$ のとき

$$\mathscr{F}[(f_1 * f_2)(t)] = F_1(x)F_2(x)$$

[証明]

$$\mathscr{F}[(f_1 * f_2)(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(t)e^{-ixt}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)f_2(u)du\right\} e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)e^{-ixt}dt\right\} f_2(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u)e^{-ix(t-u)}dt\right\} f_2(u)e^{-ixu}du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)e^{-ixs}ds\right\} f_2(u)e^{-ixu}du = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)f_2(u)e^{-ixu}du$$

$$= F_1(x)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-ixu}du = F_1(x)F_2(x)$$

(証明終)

< フーリエ変換の対応表 >

$f(t)$ 　(元の関数)	$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ 　(フーリエ変換)
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x)$
$f(\alpha t)$ 　$(\alpha \neq 0)$	$\dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$
$f(t-\alpha)$ 　(α は定数)	$e^{-i\alpha x} F(x)$
$e^{i\alpha t} f(t)$ 　(α は定数)	$F(x-\alpha)$
$f'(t)$ 　(f の導関数)	$ixF(x)$
$f^{(n)}(t)$ 　(f の n 階導関数)	$(ix)^n F(x)$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(u)du$	$\dfrac{1}{ix} F(x)$
$(-it)^n f(t)$	$F^{(n)}(x)$ 　($F(x)$ の n 階導関数)
$(f_1 * f_2)(t)$ 　(合成積)	$F_1(x)F_2(x)$ 　(積)
$f_1(t)f_2(t)$ 　(積)	$\dfrac{1}{2\pi}(F_1 * F_2)(x)$ 　$\left(\dfrac{1}{2\pi}\text{合成積}\right)$
$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ \lvert t\rvert \leqq T \\ 0 & : \ \lvert t\rvert > T \end{cases}$ 　$(T > 0)$	$\dfrac{2\sin(Tx)}{x}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}$ 　$(\alpha > 0)$	$\dfrac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$
$e^{-\alpha t^2}$ 　$(\alpha > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$
$\dfrac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}$ 　$(\alpha > 0)$	$2\pi e^{-\alpha\lvert x\rvert}$
$2\alpha \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(t-u)^2+\alpha^2} du$ 　$(\alpha > 0)$ (コーシー・ポアソン積分)	$2\pi e^{-\alpha\lvert x\rvert} F(x)$
$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-u)^2}{4\alpha}} f(u)du$ 　$(\alpha > 0)$ (ガウス・ワイエルシュトラス積分)	$e^{-\alpha x^2} F(x)$

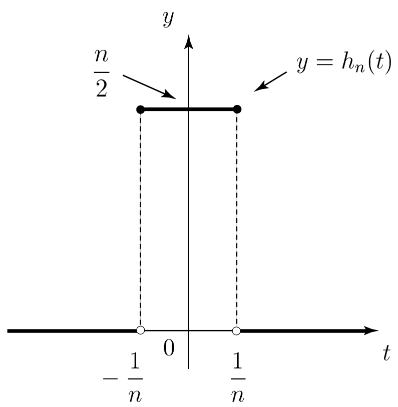
(注)　コーシー・ポアソン積分は $f(t)$ と $\dfrac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}$ との合成積である。

ガウス・ワイエルシュトラス積分は $f(t)$ と $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ との合成積である。

< デルタ収束関数列 1 >

例　自然数 n に対し、関数

$$h_n(t)=\begin{cases}\frac{n}{2} & : \ |t|\leqq\frac{1}{n}\\ 0 & : \ |t|>\frac{1}{n}\end{cases}$$



は次の条件 (i)〜(iv) をみたす。

(i)　$h_n(t)$ は偶関数で $h_n(t)\geqq 0$

(ii)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}h_n(t)dt=1$

(iii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n(t)=\begin{cases}+\infty & : \ t=0\\ 0 & : \ t\neq 0\end{cases}$

(iv)　ほとんどの関数 $f(t)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}(f*h_n)(t)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)h_n(t-u)du=\frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

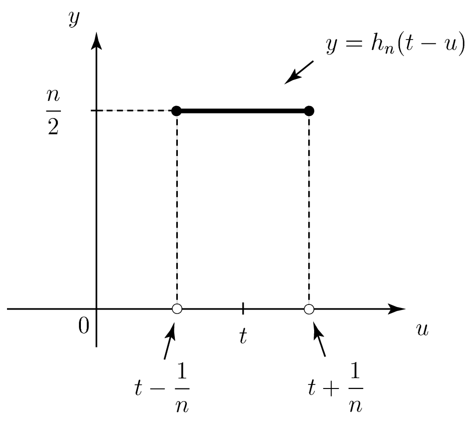
(注)　(iv) の関数 $f(t)$ は、正確には「積分可能で、各 t で左右の極限値 $f(t-0)=\displaystyle\lim_{\substack{s\to t\\ s<t}}f(s)$, $f(t+0)=\displaystyle\lim_{\substack{s\to t\\ s>t}}f(s)$ が存在する関数」という条件が必要である。

[(iv) の証明]

$F(t)=\displaystyle\int f(t)dt$ とおく。

$$(f*h_n)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)h_n(t-u)du=\int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}}f(u)\frac{n}{2}du$$

$$=\frac{n}{2}[F(u)]_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}}=\frac{n}{2}\left\{F\left(t+\frac{1}{n}\right)-F\left(t-\frac{1}{n}\right)\right\}$$



ここで $h=\dfrac{1}{n}$ とする。$n\to\infty$ のとき $h=\dfrac{1}{n}\to+0$ (0 への右極限) よりロピタルの定理を使うと

$$\lim_{n\to\infty}(f*h_n)(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{F(t+\frac{1}{n})-F(t-\frac{1}{n})}{2\times\frac{1}{n}}=\lim_{h\to+0}\frac{F(t+h)-F(t-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{\frac{\partial}{\partial h}\{F(t+h)-F(t-h)\}}{\frac{\partial}{\partial h}(2h)}=\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

(証明終)

例の (iv) をみたす関数列 $\{h_n(t)\}$ を**デルタ収束関数列**という。

< デルタ収束関数列 2 >

関数列 $\{\varphi_n(t)\}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が**デルタ収束関数列**であるとは，次の条件

(☆) $\boxed{\text{ほとんどの関数 } f(t) \text{ に対し } \displaystyle\lim_{n\to\infty}(f*\varphi_n)(t)=\frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}}$

を満たすときとする。
どのような関数列が (☆) 式を満たすのだろうか？　例でイメージをつかんでほしい。

例　① $h_n(t)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & :|t|\leqq\dfrac{1}{n}\\ 0 & :|t|>\dfrac{1}{n}\end{cases}$　② $g_n(t)=\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{n}{4}t^2}$　③ $\rho_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(nt)}{\pi t} & :t\neq 0\\ \dfrac{n}{\pi} & :t=0\end{cases}$

これらの関数列はいずれもデルタ収束関数列である。

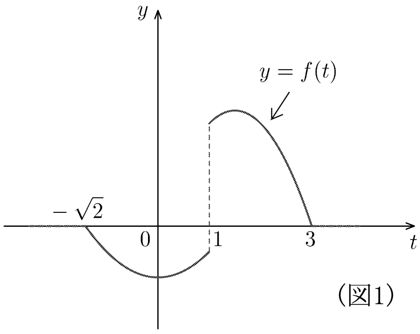
(注)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t)dt=1,\ \int_{-\infty}^{\infty}g_n(t)dt=1$ は 32, 33 ページの結果よりわかる。

① 関数 $h_n(t)$ のグラフは図 $2(n=5)$，図 $4(n=13)$ である。

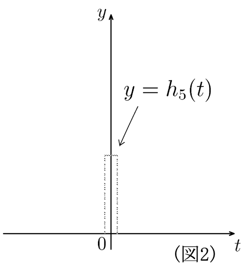
② 関数 $g_n(t)$ のグラフは図 $6(n=60)$，図 $8(n=500)$ である。

③ 関数 $\rho_n(t)$ のグラフは図 $10(n=10)$，図 $12(n=20)$ である。

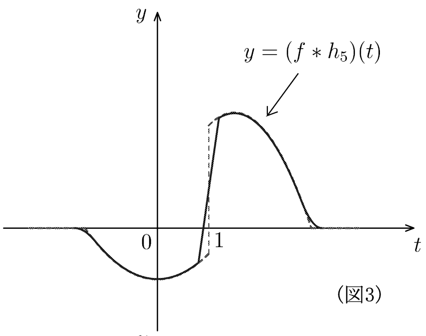
関数 $f(t)$ のグラフが図 1 のような場合を考える。
デルタ収束関数との合成積のグラフが図 3，5，7，9，11，13
の実線である。(その図の点線は $f(t)$ のグラフである。)
(☆) 式が成り立つ様子を見てほしい。



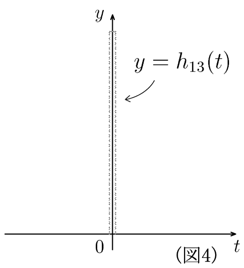
(図1)



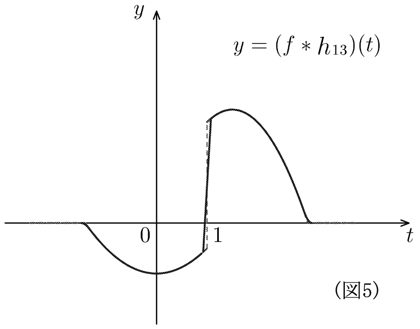
(図2)



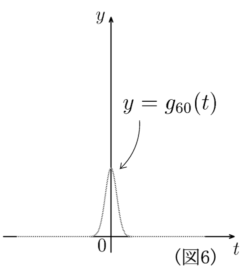
(図3)



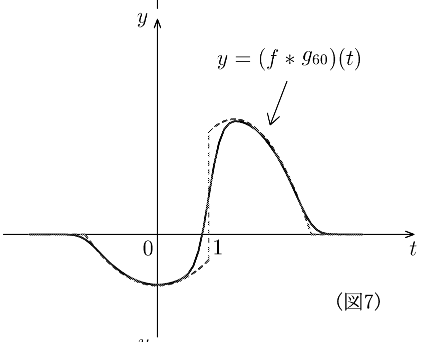
(図4)



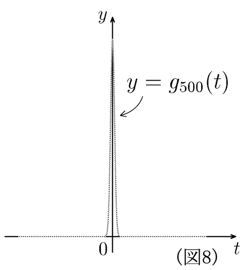
(図5)



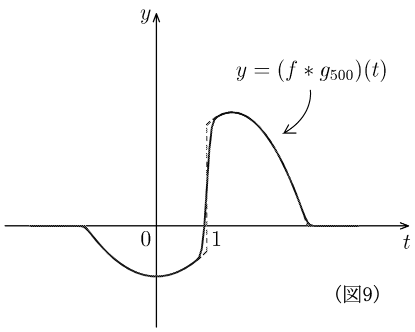
(図6)



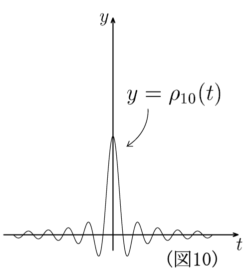
(図7)



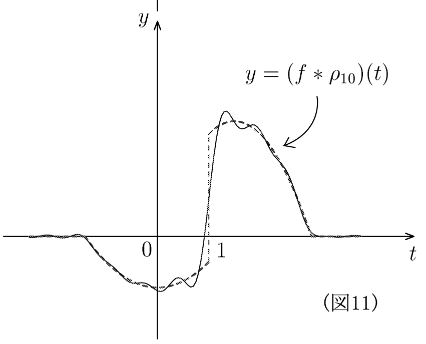
(図8)



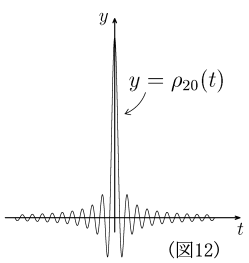
(図9)



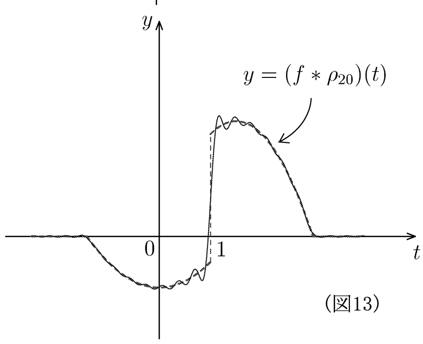
(図10)



(図11)



(図12)



(図13)

< デルタ関数 >

前ページのデルタ収束関数列 $\{\rho_n(t)\}$ は

(i) $\rho_n(t)$ は偶関数

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t)dt = 1$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \rho_n(t) = \begin{cases} +\infty & : \quad t = 0 \\ 0 & : \quad t \neq 0 \end{cases}$

(iv) 関数 $f(t)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} (f * \rho_n)(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\rho_n(t-u)du = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

を満たす関数列である。$n \to \infty$ のときの極限を関数の一種と考え,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \rho_n(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty & : \quad t = 0 \\ 0 & : \quad t \neq 0 \end{cases}} \qquad \text{(デルタ関数)}$$

と書き、ディラックの**デルタ関数**という。デルタ収束関数列の性質からデルタ関数も偶関数 ($\delta(-t) = \delta(t)$) で次式

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1}$$

$$\boxed{(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u)du = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}}$$

を満たす。デルタ関数は普通の意味の関数ではない。デルタ関数のような関数は一般に**超関数**と呼ばれる。

問 1 $f(t)$ が連続関数のとき, $(f * \delta)(t)$ を簡単な式で表せ。

問 2 $f(t) = t^3$ のとき $(f * \delta)(2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(2-u)du$ の値を求めよ。

問 3 次式の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \sin u \, du$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-2)u^5 \, du$

< フーリエ逆変換の収束 >

$f(t)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = F(x)$ に対しフーリエ逆変換を

$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx} \qquad \text{（フーリエ逆変換）}$$

と書くことにする。

補題　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ のとき

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty}\Big(f * \rho_n\Big)(t) \quad , \quad \rho_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}$$

[証明]　$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu}du\right\}e^{ixt}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ix(t-u)}dx\right\}du$$

ここで　$\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ixa}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ia}e^{ixa}\right]_{-n}^{n}$

$$= \frac{1}{2\pi ia}\left\{e^{ina} - e^{-ina}\right\} = \frac{2i\sin(na)}{2\pi ia} = \frac{\sin(na)}{\pi a} = \rho_n(a)$$

よって　$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\rho_n(t-u)du = \lim_{n\to\infty}(f * \rho_n)(t)$

（証明終）

補題の $\rho_n(t)$ はデルタ収束関数列であるから $\lim_{n\to\infty}(f * \rho_n)(t) = \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ が成り立つ。

定理　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$　のとき

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = (f * \delta)(t) = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

(反転公式)

この定理を反転公式という。$f(t)$ が 46 ページ 図 1 のような関数のとき $(f * \rho_n)(t)$ は 46 ページ 図 11, 図 13 のような曲線の形をとりながら連続点では $f(t)$ に近づき、不連続点では $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ (左極限と右極限の中点) に近づく。このような収束はフーリエ級数の収束と同様である。(P77 参照)

< フーリエ逆変換 >

フーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ に対して、反転公式から

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

である。ここで $f(t)$ が連続関数のときは $f(t+0) = f(t-0) = f(t)$ であるから

反転公式は

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = f(t) \qquad (f(t) \text{ が連続のとき})$$

となる。

例 1　$f(t) = e^{-|t|}$ は連続関数で $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right] = \dfrac{2}{x^2+1}$ であるから

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] = e^{-|t|}$$

問 1　次のフーリエ逆変換を求めよ。(ただし $\alpha > 0$)

(1) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\right]$

(2) $\mathscr{F}^{-1}\left[\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\right]$

(3) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\sin(4x)}{x}\right]$

例 2　$\mathscr{F}^{-1}[F_1(x)] = f_1(t)$, $\mathscr{F}^{-1}[F_2(x)] = f_2(t)$ のとき $\mathscr{F}^{-1}[a_1F_1(x)+a_2F_2(x)] = a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$ より

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{x^2+9}+\frac{1}{x^2+1}\right] = \frac{1}{6}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{6}{x^2+9}\right] + \frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2}{x^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{6}e^{-3|t|} + \frac{1}{2}e^{-|t|}$$

問 2　次のフーリエ逆変換を求めよ。

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{3}{x^2+1}+e^{-x^2}\right]$$

< 超関数のフーリエ変換 >

連続関数 $f(t)$ に対してデルタ関数 $\delta(t)$ との合成積は

$$(f*\delta)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\delta(t-u)du=f(t)$$

となる。一方デルタ関数は偶関数であるから $\delta(t-u)=\delta(u-t)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\delta(u-t)du=f(t)$$

である。このデルタ関数に対し，形式的にフーリエ変換を考えると

$$\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-ixt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixu}\delta(u-0)du=e^0=1$$

となる。また，t_0 だけ平行移動したデルタ関数 $\delta(t-t_0)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-ixt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixu}\delta(u-t_0)du=e^{-ixt_0}$$

となる。次に自然数 n に対して関数 $1_n(t)=\begin{cases}1 & : \ |t|\leqq n\\ 0 & : \ |t|>n\end{cases}$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[1_n(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}1_n(t)e^{-ixt}dt=\frac{2\sin(nx)}{x}$$

である。定数関数 1 は $1=\lim_{n\to\infty}1_n(t)$ であるから，1 のフーリエ変換を

$$\mathscr{F}[1]=\lim_{n\to\infty}\mathscr{F}[1_n(t)]=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin(nx)}{x}=\lim_{n\to\infty}2\pi\rho_n(x)=2\pi\delta(x)$$

とする。ここで $\rho_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{\pi x}$ はデルタ収束関数である。また実数定数 α に対し，指数関数 $e^{i\alpha t}$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[e^{i\alpha t}]=\lim_{n\to\infty}\mathscr{F}[e^{i\alpha t}1_n(t)]=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}e^{i\alpha t}e^{-ixt}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin n(\alpha-x)}{\alpha-x}=\lim_{n\to\infty}2\pi\rho_n(x-\alpha)=2\pi\delta(x-\alpha)$$

となる。

問　次のフーリエ変換を求めよ。（ただし α は実数定数とする）

(1).$\mathscr{F}[\delta(t-\alpha)]$　　(2).$\mathscr{F}[e^{-i\alpha t}]$

(3).$\mathscr{F}[\cos(\alpha t)]$　　(4).$\mathscr{F}[\sin(\alpha t)]$

< フーリエ変換の練習 >

問 1　関数 $f(t)$ が次の各場合に，$f(t)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。
ただし，K, n は正の定数とする。

(1) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ |\,t\,| > n \\ K & : \ |\,t\,| \leqq n \end{cases}$　　(2) $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & : \ t > 0 \\ 0 & : \ t \leqq 0 \end{cases}$

(3) $f(t) = e^{-3|t|}$

問 2　$\mathscr{F}\left[e^{-t^2/2}\right] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-ixt} dt = F(x)$ とおく。

(1) $\dfrac{d}{dx}F(x)$ を $F(x)$ で表せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて $F(x)$ を求めよ。

問 3　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ とする。$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-3|t-u|} du$ のフーリエ変換を求めよ。

問 4　問 1(1) の $f(t)$ に対し、$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$，$\mathscr{F}^{-1}[F(t)] = g(t)$ とおく。
$g(0)$ および $g(n)$ の値を求めよ。

問 5　$\delta(t)$ をデルタ関数とする。次式を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^4 \delta(u-3) du$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^u \delta(t-u) du$

(3) $\mathscr{F}[\delta(t+2)]$

問 6　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x} = \delta(x)$ であることを用いて $\mathscr{F}[K]$ を求めよ。ただし、K は正の定数である。

< 周波数関数 >

フーリエ変換の変数を x ではなく ω に変えた対応表

時間関数 $f(t)$	周波数関数 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$
$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f(at)$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\ F(\frac{\omega}{a})$
$f(t-t_0)$	$e^{-it_0\omega}F(\omega)$
$f(t)e^{i\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$
$f(t)e^{-i\omega_0 t}$	$F(\omega+\omega_0)$
$\dfrac{d^n}{dt^n}f(t)$ (n 回微分)	$(i\omega)^nF(\omega)$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\dfrac{1}{i\omega}F(\omega)$
$(-it)^nf(t)$	$\dfrac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$ (n 回微分)
$(f_1 * f_2)(t)$ (合成積)	$F_1(\omega)F_2(\omega)$ (積)
$f_1(t)f_2(t)$ (積)	$\frac{1}{2\pi}(F_1 * F_2)(\omega)$ ($\frac{1}{2\pi}$ 合成積)
$f(t)=\begin{cases} 1 & : \ \ \lvert t\rvert \leqq T \\ 0 & : \ \ \lvert t\rvert > T \end{cases}$	$\dfrac{2\sin(\omega T)}{\omega}$ $(T>0)$
$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & : \ \ t>0 \\ 0 & : \ \ t \leqq 0 \end{cases}$ $(\alpha>0)$	$\dfrac{1}{\alpha+i\omega}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}$ $(\alpha>0)$	$\dfrac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$
$e^{-\alpha t^2}$ $(\alpha>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
$\frac{1}{2\sqrt{\pi b}}e^{-\frac{t^2}{4b}}$	$e^{-b\omega^2}$ $(b>0)$
$\dfrac{b}{\pi(t^2+b^2)}$	$e^{-b\lvert\omega\rvert}$ $(b>0)$
$\delta(t)$ (デルタ関数)	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

< ラプラス変換の導出 >

正定数 $\sigma(>0)$ と関数 $f(t)$ に対して，

$$f_\sigma(t)=\begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : \quad t \geqq 0 \\ 0 & : \quad t<0 \end{cases}$$

とおき，$f_\sigma(t)$ のフーリエ変換を $F_\sigma(x)$ とおくと

$$F_\sigma(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t)e^{-ixt}dt=\int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+ix)t}dt$$

となる。$F(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とおくと $F_\sigma(x)=F(\sigma+ix)$ となる。

$F_\sigma(x)$ のフーリエ逆変換は

$$f_\sigma(t)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{ixt}dx$$

となるので $t>0$ のとき $f_\sigma(t)=f(t)e^{-\sigma t}$ より

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{ixt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{(\sigma+ix)t}dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(\sigma+ix)e^{(\sigma+ix)t}dx \qquad (s=\sigma+ix \text{ とおく}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds \end{aligned}$$

となる。そこで $F(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ を**ラプラス変換**といい，

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \Big(=F(s)\Big) \qquad \cdots(\text{ラプラス変換})$$

と書くことにすると，その逆変換は

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds \qquad \cdots(\text{ラプラス逆変換})$$

となる。

< ラプラス変換 1 >

関数 $f(t)$ のラプラス変換は

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

である。ここで s は一般には複素数 $\sigma + ix$ で，その実数部分 σ が正の数である。(これを $\mathrm{Re}(s) > 0$ と書く)
ただし，ラプラス変換を求めるときには，複素数であることを意識しなくても良い。s を正の定数と考えて，計算しても良い。

例 1 $\mathscr{L}[t] = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left\{\left[t \times \frac{1}{-s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \frac{1}{s}e^{-st}dt\right\}$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{b}{s}e^{-sb} + \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=b}\right\} = \lim_{b\to\infty}\left\{\frac{b}{-se^{sb}} - \frac{1}{s^2}e^{-sb} + \frac{1}{s^2}\right\} = \frac{1}{s^2}$$

(注) ここで $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{sb}} = 0$ であり，ロピタルの定理より

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{sb}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{d}{db}(b)}{\frac{d}{db}(e^{sb})} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{se^{sb}} = 0$$

となる。

例 2 実数定数 α に対し、$\mathscr{L}[e^{\alpha t}]$ を求める。

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt$$

この積分は $s > \alpha$ のときのみ存在する。そこで $s > \alpha$ になる s に対して、ラプラス変換を求めると、

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(\alpha-s)t}dt = \frac{1}{s-\alpha}$$

となる。

問 次のラプラス変換を求めよ

(1) $\mathscr{L}[1]$

(2) $\mathscr{L}[e^{-t}]$

(3) $\mathscr{L}[e^{it}]$

< ラプラス変換 2 >

ラプラス変換の性質をいくつか示す。

$\boxed{1}$ $\mathscr{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathscr{L}[f_1(t)] + a_2 \mathscr{L}[f_2(t)]$

$\boxed{2}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f(\alpha t)] = \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right) \qquad (\alpha > 0)$

$\boxed{3}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$

(証明)

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \int_0^\infty e^{\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt = F(s - \alpha)$$

$\boxed{4}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f_\alpha(t)] = e^{-\alpha s} F(s) \qquad (\alpha > 0)$

ここで $f_\alpha(t) = \begin{cases} f(t - \alpha) & : \quad t \geqq \alpha \\ 0 & : \quad t < \alpha \end{cases}$

(証明)

$$\mathscr{L}[f_\alpha(t)] = \int_\alpha^\infty f(t - \alpha) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s(\tau + \alpha)} d\tau \qquad (t - \alpha = \tau)$$

$$= e^{-\alpha s} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-\alpha s} F(s)$$

例 1 $\mathscr{L}[e^{ikt}] = \displaystyle\int_0^\infty e^{(ik-s)t} dt = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{ik - s} e^{(ik-s)t} \right]_{t=0}^{t=b} = \frac{1}{s - ik} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$

例 2 $\mathscr{L}[\cos(kt)] = \mathscr{L}\left[\dfrac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \right] = \dfrac{1}{2} \{ \mathscr{L}[e^{ikt}] + \mathscr{L}[e^{-ikt}] \}$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - ik} + \frac{1}{s + ik} \right\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

問 次のラプラス変換を求めよ。ただし α, k は実数の定数とする。(2)〜(4) のラプラス変換の変数 s は $s > \alpha$ とする。

(1) $\mathscr{L}[\sin(kt)]$

(2) $\mathscr{L}[e^{(\alpha + ki)t}]$

(3) $\mathscr{L}[e^{\alpha t} \cos(kt)]$

(4) $\mathscr{L}[e^{\alpha t} \sin(kt)]$

< ラプラス変換 3 >

$\boxed{5}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[tf(t)] = -F'(s)$

(証明) $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ を s で微分すると

$$F'(s) = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st}dt = -\int_0^\infty tf(t)dt = -\mathscr{L}[tf(t)]$$

$\boxed{6}$ $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$

問 次のラプラス変換を求めよ。ただし α と k は実数の定数とする。(4),(5) のラプラス変換の変数 s は $s > \alpha$ と考える。

(1) $\mathscr{L}[t^2]$

(2) $\mathscr{L}[t^3]$

(3) $\mathscr{L}[t^n]$

(4) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}]$

(5) $\mathscr{L}[te^{\alpha t}]$

(6) $\mathscr{L}[t\cos(kt)]$

(7) $\mathscr{L}[t\sin(kt)]$

(8) $\mathscr{L}[\sinh(kt)] = \mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt})\right]$

(9) $\mathscr{L}[\cosh(kt)] = \mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt})\right]$

< ラプラス変換 4 >

$\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n |f(t)|dt$ が有限の値に収束するとき，関数 $f(t)$ は絶対可積分という。

$\boxed{7}$　$f(t)e^{-st}$ および $f'(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であるとき，

$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ であれば $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

(証明)　　絶対可積分より $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left\{\left[f(t)e^{-st}\right]_0^b + \int_0^b f(t)se^{-st}dt\right\}$$

$$= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= sF(s) - f(0)$$

(証明終)

$\boxed{8}$　$f(t)e^{-st}$，$f'(t)e^{-st}$，$f''(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であり，

$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ であれば $\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

(証明)　　$\boxed{7}$より　$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$

よって

$$\mathscr{L}[f''(t)] = \mathscr{L}[(f'(t))'] = s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0)$$

$$= s\left\{s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)\right\} - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

問　$f(t)e^{-st}$，$f'(t)e^{-st}$，$f''(t)e^{-st}$，$f'''(t)e^{-st}$ が共に絶対可積分であり，$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}[f'''(t)]$ を求めよ。

< ラプラス変換 5 >

$t \geqq 0$ で定義されている 2 つの関数 $f(t)$，$g(t)$ に対し，$t<0$ では常に $f(t)=0$，$g(t)=0$ と定めると，$f(t)$ と $g(t)$ の合成積は

$$\boxed{(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du=\int_0^t f(t-u)g(u)du}$$

となる。これは定義域が $[0,\ \infty)$ である関数の合成積である。ラプラス変換を考えるときは常に $t \geqq 0$ の範囲で考えるので，合成積は $(f*g)(t)=\displaystyle\int_0^t f(t-u)g(u)du\left(=\int_0^t f(u)g(t-u)du\right)$ とする。

$\boxed{9}$

$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathscr{L}[g(t)]=G(s)$ のとき

$$\mathscr{L}\big[(f*g)(t)\big]=F(s)G(s)$$

(証明)　正定数の σ に対し

$$f_\sigma(t)=\begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases} \quad , \qquad g_\sigma(t)=\begin{cases} g(t)e^{-\sigma t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases}$$

の合成積は

(i) $t \geqq 0$ のとき $(f_\sigma * g_\sigma)(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t-u)g_\sigma(u)du=\int_0^t f_\sigma(t-u)g_\sigma(u)du$

$$=\int_0^t f(t-u)e^{-\sigma(t-u)}g(u)e^{-\sigma u}du=e^{-\sigma t}\int_0^t f(t-u)g(u)du=e^{-\sigma t}(f*g)(t)$$

(ii) $t<0$ のとき $(f_\sigma * g_\sigma)(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_\sigma(t-u)}_{\substack{\|\\0}}g_\sigma(u)du=0$

一方フーリエ変換の性質より

$$\mathscr{F}\big[(f_\sigma * g_\sigma)(t)\big]=\mathscr{F}\big[f_\sigma(t)\big]\times\mathscr{F}\big[g_\sigma(t)\big] \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ 左辺 $=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(f_\sigma * g_\sigma)(t)e^{-ixt}dt=\int_0^{\infty}(f*g)(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt=\mathscr{L}\big[(f*g)(t)\big](\sigma+ix)$

$(*)$ 右辺 $=\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt\times\int_0^{\infty} g(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt=F(\sigma+ix)\times G(\sigma+ix)$

$\sigma+ix=s$ とおくと

$$\mathscr{L}[(f*g)(t)](s)=F(s)\times G(s) \qquad \text{(証明終)}$$

< ラプラス変換 6 >

補題 正定数 $b(>0)$ に対し $I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(証明)　$\lambda=\dfrac{b}{\tau}$ とおくと

① $I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\int_\infty^0 e^{-(\frac{b}{\lambda}-\lambda)^2}\left(-\frac{b}{\lambda^2}\right)d\lambda=\int_0^\infty \frac{b}{\lambda^2}e^{-(\lambda-\frac{\lambda}{b})^2}d\lambda$

τ と λ をおきかえると

② $I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\int_0^\infty e^{-(\lambda-\frac{b}{\lambda})^2}d\lambda$

①+②より

$$2I=\int_0^\infty(1+\frac{b}{\lambda^2})e^{-(\lambda-\frac{b}{\lambda})^2}d\lambda$$

ここで $x=\lambda-\dfrac{b}{\lambda}$ とおくと $\dfrac{dx}{d\lambda}=1+\dfrac{b}{\lambda^2}$ より

$$2I=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

よって $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　　(証明終)

定理

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=e^{-\alpha\sqrt{s}}}$$

(証明)　$\tau=\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}$ とおくと $\dfrac{d\tau}{dt}=-\dfrac{\alpha}{4}t^{-\frac{3}{2}}$ より

$$\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=\int_0^\infty\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^0 e^{-\tau^2}e^{-s(\frac{\alpha}{2\tau})^2}d\tau$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\tau^2-\left(\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\left(\tau-\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}d\tau$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha\sqrt{s}}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=e^{-\alpha\sqrt{s}}$$　　　(証明終)

< ラプラス変換 7 >

ラプラス変換の性質を表にまとめる。ここで a，a_1，a_2 は実数定数，α は正定数，n は自然数とする。

原関数 $f(t)$	像関数 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
$f(\alpha t) \qquad (\alpha > 0)$	$\dfrac{1}{\alpha} F(\dfrac{s}{\alpha})$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-\alpha) \qquad (t \geqq \alpha)$ (ただし $t < \alpha$ のとき $f(t-\alpha) = 0$ とする)	$e^{-\alpha s} F(s) \qquad (\alpha > 0)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f'''(t)$	$s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\dfrac{1}{s} F(s)$
$\dfrac{1}{t} f(t)$	$\displaystyle\int_s^\infty F(u) du$
$(f_1 * f_2)(t) = \displaystyle\int_0^t f_1(t-u) f_2(u) du$	$F_1(s) F_2(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\alpha)$	$e^{-s\alpha}$

< ラプラス変換 8 >

ラプラス変換の対応表 (a, ω, k は実定数, n は自然数)

原関数 $f(t)$	像関数 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s>a)$
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$ $(s>a)$
t^2e^{at}	$\dfrac{2}{(s-a)^3}$ $(s>a)$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ $(s>a)$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ $(s>a)$
$t\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sinh(kt) = \dfrac{1}{2}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right)$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh(kt) = \dfrac{1}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$u(t-a) = \begin{cases} 1 & : \ t \geqq a \\ 0 & : \ t < a \end{cases}$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{se^{sa}}$
$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}$

< ラプラス逆変換 1 >

ラプラス変換はフーリエ変換の一種であるから，フーリエ変換と同様に反転公式が成り立つ。

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s) \quad \text{のとき}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2}\{f(t-0)+f(t+0)\}$$

特に $f(t)$ が連続であるときは $f(t-0)=f(t+0)=f(t)$ より $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$ となる。

このワークブックでは連続の場合だけを扱うことにする。次の対応関係がある。

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$
$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$　　$(\alpha > 0)$	$f(\alpha t)$
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$e^{-\alpha s}F(s)$　　$(\alpha > 0)$	$f(t-\alpha)$　　$(t \geqq \alpha)$
$sF(s)-f(0)$	$f'(t)$
$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$f''(t)$
$s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$	$f'''(t)$
$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(\tau)d\tau$
$F'(s)$	$-tf(t)$
$\frac{d^n}{ds^n}F(s)$	$(-t)^nf(t)$
$F_1(s)F_2(s)$	$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-u)f_2(u)du$

ここで a_1，a_2，a は実数定数，α は正定数，n は自然数とする。

< ラプラス逆変換 2 >

問 次の対応表を完成させよ。ただし，a,ω は実数の定数，α は正定数，n は自然数とする。

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$\dfrac{1}{s}$	
$\dfrac{1}{s^2}$	
$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	
$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$ $(s > a)$	
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	
$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ $(s > a)$	
$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ $(s > a)$	
$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	
$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	
$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	
$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	
$\dfrac{e^{-\alpha s}}{s}$	
$e^{-\alpha\sqrt{s}}$	

< ラプラス逆変換 3 >

例 1　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}\right]$ を求めたい。$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}=\dfrac{A}{s-a}+\dfrac{B}{s-b}$ とおき右辺を

通分すると $\dfrac{(A+B)s-Ab-aB}{(s-a)(s-b)}$ となり分子が 1 となるため

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-aB=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{a-b} \quad , \quad B=-\frac{1}{a-b}$$

であるから

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right\}=\frac{1}{a-b}\left\{e^{at}-e^{bt}\right\}$$

例 2　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}e^{at}\sin(bt)$

問　次のラプラス逆変換を求めよ。

(1)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-s-2}\right]$

(2)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4}\right]$

(3)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4s+5}\right]$

< ラプラス逆変換 4 >

例 1 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-a)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{a}{(s-a)^2}\right]=e^{at}+ate^{at}$

例 2 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-a)^2+b^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}+\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]$

$=e^{at}\cos(bt)+\dfrac{a}{b}e^{at}\sin(bt)$

問 次のラプラス逆変換を求めよ。

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{s^2-8s+16}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2-6s+9}\right]$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s^2-2s+5}\right]$

(4) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{s^2-4s+5}\right]$

< ラプラス逆変換 5 >

問 1　部分分数分解により次のラプラス逆変換を求めよ。

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s+1)(s-2)}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s-1)(s-2)}\right]$

例　$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$ より

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s-a}\right] = (e^{at} * f)(t) = \int_0^t e^{a(t-u)} f(u)du$$

問 2　$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ のとき，次のラプラス逆変換を求めよ。(ただし $a \neq b$)

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)(s-b)}\right]$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2+b^2}\right]$

< ラプラス逆変換 6 >

問　次のラプラス逆変換を求めよ。ただし a, b, c は定数。

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s^3}\right]$

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{a+bs}{s^2+1}\right]$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]$

(4) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-1}\right]$

(5) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-2)^2}\right]$

(6) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{(s-2)(s+4)}\right]$

(7) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(s-2)^3}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{(s-2)^2}\right)\right]$

(8) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{16}{s^4-16}\right]$

< 常微分方程式への応用 1 >

例 題　微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + x = e^t \quad (t > 0)$ を初期条件 $x(0) = 1$ の下で解け。

(解)　解を $x(t)$ とおき，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$

である。微分方程式の両辺のラプラス変換をとると

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt} + x\right] = \mathscr{L}[e^t]$$

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\Downarrow$$

$$X(s) = \frac{1 + \frac{1}{s-1}}{s+1} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

よって解 $x(t)$ は

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s-1)}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right\}\right] = \underline{\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t}$$

問　次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{dx}{dt} = kx \,, \quad x(0) = a$

(2)　$\dfrac{dx}{dt} + x = e^{-t} \,, \quad x(0) = 1$

< 常微分方程式への応用 2 >

例題　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+2x=e^t$,　$x(0)=0$,　$x'(0)=0$

(解)　解 $x(t)$ のラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right]=sX(s)-x(0)=sX(s)\ ,\quad \mathscr{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)$$

$\mathscr{L}[e^t]=\dfrac{1}{s-1}$ より，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+3sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+3s+2)(s-1)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$ より答えは

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{s+2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{s-1}\right)\right]=\underline{-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{t}}$$

問　次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-5\dfrac{dx}{dt}+6x=e^t$,　$x(0)=0$,　$x'(0)=0$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=0$,　$x(0)=1$,　$x'(0)=1$

< 常微分方程式への応用 3 >

問　次の常微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0\ ,\quad x(0) = 0\ ,\quad x'(0) = 1$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin t\ ,\quad x(0) = 1\ ,\quad x'(0) = 1$

< 常微分方程式への応用 4 >

例題 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+5\dfrac{dx}{dt}+6x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0$

(解) $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ とおき，両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+5sX(s)+6X(s)=F(s)$$

$$X(s)=\frac{F(s)}{s^2+5s+6}$$

ここで $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+5s+6}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+3}\right]=e^{-2t}-e^{-3t}$ より

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2+5s+6}\right]=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)*f(t)$$

$$=\int_0^t\left\{e^{-2(t-u)}-e^{-3(t-u)}\right\}f(u)du$$

(注) この $x(t)$ が例題の解であることを確かめる計算方法については P78 を参照せよ。

問 ラプラス変換を用いて，次の常微分方程式の初期値問題を解け。

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+2x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+10x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0$

< 常微分方程式への応用 5 >

例題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y \\ x(0) = 0\ ,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(解)　$\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ ，$\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)\ ,\quad \mathscr{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

であるから，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} sX(s) = 2X(s) + Y(s) \\ sY(s) - 1 = -X(s) + 4Y(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 0 & \cdots ① \\ X(s) + (s-4)Y(s) = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times(s-4)+$ ②より　$(s-2)(s-4)X(s) - (s-4)Y(s) = 0$

$$\begin{array}{lr} +) & X(s) + (s-4)Y(s) = 1 \\ \hline (s^2 - 6s + 9)X(s) & = 1 \end{array}$$

よって

$$X(s) = \frac{1}{(s-3)^2}\ ,\quad Y(s) = (s-2)X(s) = \frac{(s-2)}{(s-3)^2} = \frac{s-3+1}{(s-3)^2} = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}$$

であるから

(答)　$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] = te^{3t}$

$$\underline{y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}\right] = e^{3t} + te^{3t}}$$

問　次の連立微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \\ x(0) = 0\ ,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

< 熱伝導方程式への応用 1 >

フーリエは 2 階偏微分方程式である熱伝導方程式を解くために関数を三角級数に展開する方法を考えた。

フーリエ級数，フーリエ変換，ラプラス変換の応用として熱伝導方程式の解法を説明する。

1 次元熱伝導方程式とは長さが有限 ($0 \leqq x \leqq L$)，半無限 ($0 \leqq x < \infty$)，あるいは無限 ($-\infty < x < \infty$) の棒において，熱が伝導するときの温度分布 u の方程式である。$u(t\,,\,x)$ を時刻 t，位置 x における棒の温度とすると，$u = u(t\,,\,x)$ は式

$$\boxed{*} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad \text{(1 次元熱伝導方程式)}$$

を満たす。ここで k は正の定数である。これを **1 次元熱伝導方程式**という。

この方程式を棒の長さによって 3 通りの場合に分ける。

$\boxed{\mathbf{A}}$ $\boxed{\text{棒の長さが有限 } (0 \leqq x \leqq L)}$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は ($0 \leqq x \leqq L$) の範囲であるとする。この式を

[初期条件]　$u(0\,,\,x) = f(x)$　　$(A-1)$

[境界条件]　$u(t\,,\,0) = 0\ ,\quad u(t\,,\,L) = 0$　　$(A-2)$

のもとに解きたい。

< 解法 >　$u(t\,,\,x)$ が 時間の関数 $T(t)$ と 位置の関数 $X(x)$ の積として表されているとすれば，$u(t\,,\,x) = T(t)X(x)$ であり，式 $\boxed{*}$ より

$T'(t)X(x) = k^2 T(t)X''(x) \ \Rightarrow\ \dfrac{T'(t)}{T(t)} = k^2 \dfrac{X''(x)}{X(x)} = K$ (定数) とおくと

$T'(t) = KT(t)$ より $T(t) = Ae^{Kt}$ (A は定数) となる。

$X''(x) = \dfrac{K}{k^2} X(x)$

(1) $K > 0$ のとき　$X(x) = Be^{\frac{\sqrt{K}}{k}x} + Ce^{-\frac{\sqrt{K}}{k}x}$ ($B\,,\,C$ は定数) となるが，境界条件より $X(0) = X(L) = 0$ より $B = C = 0$ となり
$X(x) = 0 \ \Rightarrow\ u(t\,,\,x) = 0$ となりだめ。

(2) $K = 0$ のとき　$X(x) = Bx + C$ ($B\,,\,C$ は定数) となるが，やはり境界条件より $X(x) = 0$ となってだめ。

< 熱伝導方程式への応用 2 >

〈 $\boxed{\mathbf{A}}$ (棒有限) の解法の続き 〉

(3) $K<0$ のとき　$K=-q^2$　とおくと，

$$X(x)=B\cos\left(\frac{q}{k}x\right)+C\sin\left(\frac{q}{k}x\right)\qquad (B\ ,\ C \text{ は定数})$$

となる。境界条件 $X(0)=0$　より　　$B=0\ \Rightarrow\ X(x)=C\sin\left(\frac{q}{k}x\right)$

$X(L)=0\ \Rightarrow\ \dfrac{q}{k}=\dfrac{n\pi}{L}\ \ (n=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots)$　であるから，

$$X_n(x)=C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\quad ,\quad T_n(t)=A_ne^{-q^2t}=A_ne^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2t}$$

とおくと，$u(t\ ,\ x)=T_n(t)X_n(x)$ は $\boxed{*}$ の解であり，その和

$$u(t\ ,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t\ ,\ x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nC_ne^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

も $\boxed{*}$ の解である。初期条件より

$$u(0\ ,\ x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nC_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x)$$

である。これは $f(x)$ のフーリエ級数の形をしている。x は $(0\leqq x\leqq L)$ の範囲であるが，$f(-x)=-f(x)$ と定めると，$f(x)$ は $(-L\leqq x\leqq L)$ で定義された奇関数である。周期 $2L$ の奇関数のフーリエ係数は

$$A_nC_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

となる。よって求める解は

$$\begin{aligned}u(t\ ,\ x)&=\sum_{n=1}^{\infty}A_nC_ne^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\\&=\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}\end{aligned}$$

となる。これが 熱伝導方程式 $\boxed{*}$ を 初期条件 $(A-1)$，境界条件 $(A-2)$ のもとで解いた解である。このように x の範囲が有限の場合はフーリエ級数によって $\boxed{*}$ は解くことができる。

< 熱伝導方程式への応用 3 >

B 棒の長さが無限 $(-\infty < x < \infty)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(-\infty < x < \infty)$ の範囲であるとする。この式を

[初期条件] $u(0\,,\,x) = f(x)$ $\qquad (B-1)$

[境界条件] $u(t\,,\,-\infty) = \lim_{x\to-\infty} u(t\,,\,x) = 0$ $\qquad (B-2)$

$u(t\,,\,+\infty) = \lim_{x\to+\infty} u(t\,,\,x) = 0$ $\qquad (B-3)$

のもとで解く。

< 解法 > 未知関数 $u = u(t\,,\,x)$ は t をパラメータとし，x の関数と考えて，x に関するフーリエ変換を

$$\mathscr{F}[u(t\,,\,x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t\,,\,x)e^{-i\omega x}dx = U(t\,,\,\omega)$$

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)$$

とおく。$\mathscr{F}\left[\dfrac{d^2u}{dx^2}\right] = (i\omega)^2\,U(t\,,\,\omega) = -\omega^2\,U(t\,,\,\omega)$ より，$\boxed{*}$ のフーリエ変換をすると

$$\frac{d}{dt}U(t\,,\,\omega) = -k^2\omega^2\,U(t\,,\,\omega)$$

よって

$$U(t\,,\,\omega) = Ae^{-k^2\omega^2 t}$$

ここで A は変数 t に関しては定数であるが，ω の値によっては変わるかもしれないので $A = A(\omega)$ とおく。$t = 0$ とおくと初期条件より

$$u(0\,,\,x) = f(x) \quad \overset{\text{フーリエ変換}}{\longrightarrow} \quad U(0\,,\,\omega) = F(\omega) = A(\omega)$$

よって $\qquad U(t\,,\,\omega) = F(\omega)e^{-k^2\omega^2 t}$

一方 $\qquad \mathscr{F}^{-1}[e^{-k^2t\omega^2}] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t\omega^2}e^{i\omega x}d\omega = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}}e^{-\frac{x^2}{4k^2t}} = g(x)$

よって $\qquad U(t\,,\,x) = \mathscr{F}^{-1}[U(t\,,\,\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)e^{-k^2\omega^2 t}] = (f*g)(x)$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4k^2t}}du}$$

これが $\boxed{*}$ の $(B-1)$，$(B-2)$，$(B-3)$ をみたす解である。このような無限区間 $(-\infty < x < \infty)$ ではフーリエ変換を用いる。

< 熱伝導方程式への応用 4 >

C 棒の長さが半無限 $(0 \leqq x < \infty)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(0 \leqq x < \infty)$ の範囲であるとする。この式を

［初期条件］ $u(0\,,\,x) = 0$ $\quad (C-1)$

［境界条件］ $u(t\,,\,0) = g(t)\,, \quad u(t\,,\,+\infty) = \lim_{x \to +\infty} u(t\,,\,x) = 0$ $\quad (C-2)$

のもとで解く。

< 解法 > x をパラメータとみなし，$u(t\,,\,x)$ の t に関するラプラス変換を

$$\mathscr{L}[u(t\,,\,x)] = \int_0^\infty u(t\,,\,x)e^{-st}dt = U(s\,,\,x)$$

とおく。この両辺を x で 2 回微分すると，$\mathscr{L}[u_{xx}] = U_{xx}(s\,,\,x)$ である。

また $\mathscr{L}\left[\dfrac{du}{dt}\right] = sU(s\,,\,x) - u(0\,,\,x) = sU(s\,,\,x)$ である。よって $\boxed{*}$ の

ラプラス変換は $sU(s\,,\,x) = k^2U_{xx}(s\,,\,x)$ より $\dfrac{d^2U}{dx^2} = \dfrac{s}{k^2}U$

だから $U(s\,,\,x) = Ae^{\frac{\sqrt{s}}{k}x} + Be^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

境界条件より $U(s\,,\,+\infty) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0\,, \quad U(s\,,\,x) = Be^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

$U(s\,,\,0) = \mathscr{L}[u(t\,,\,0)] = \mathscr{L}[g(t)] = G(s)$ より $B = G(s)$

よって $U(s\,,\,x) = G(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

一方 $\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}] = \dfrac{\frac{x}{k}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{4t}} = \dfrac{x}{2k\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4tk^2}} = \gamma(t)$

とおくと

$$u(t\,,\,x) = \mathscr{L}^{-1}[U(s\,,\,x)] = \mathscr{L}^{-1}[G(s)e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}]$$

$$= (g * \gamma)(t) = \underline{\int_0^t \frac{x}{2k\sqrt{\pi}}(t-u)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-u)k^2}}g(u)du}$$

これが $\boxed{*}$ の $(C-1)$，$(C-2)$ をみたす解である。このような半無限区間 $(0 \leqq x < \infty)$ ではラプラス変換を用いる。

＜付録１：フーリエ級数の収束とフーリエ逆変換の収束＞

$f(t)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du\right) + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(ku)du\right)\cos(kt) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(ku)du\right)\sin(kt)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos\bigl(k(t-u)\bigr)du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(t-u)du = (f * D_n)(t)$$

と表される。ここで

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right\}$$

である。この関数 $D_n(t)$ を**ディリクレ核** (Dirichlet kernel) と呼ぶ。

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} = e^{-itn}\sum_{k=0}^{2n}(e^{it})^k$$

$$= e^{-itn} \times \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

よりディリクレ核は

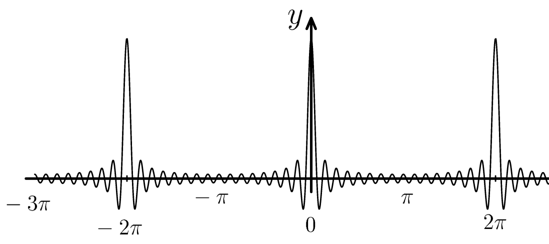
$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

と表される。そして $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は $f(t)$ と $D_n(t)$ との合成積（たたみ込み）で表される。 $n \to \infty$ のとき、$D_n(t)$ は周期 2π のデルタ関数に収束すると考えればよい。

ディリクレ核 $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\pi\sin(\frac{t}{2})}$ はデルタ収束関数列 $\rho_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{\pi t}$ とよく似ている。

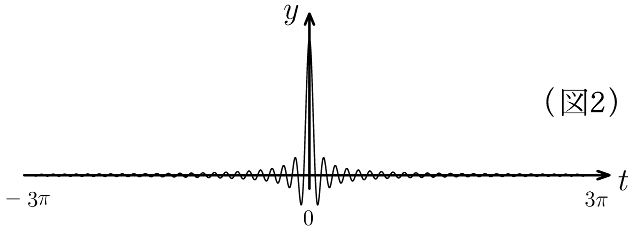
実際 $-\pi < t < \pi$ の範囲ではグラフはほとんど同じであるが，ディリクレ核は周期 2π の周期関数であるところが $\rho_n(t)$ と異なる。図 1 と図 2 は $n = 16$ のときのグラフである。

＜ディレクレ核 $D_n(t)$＞



（図1）

＜デルタ収束関数列 $\rho_n(t)$ ＞



（図2）

＜フーリエ級数の収束＞

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \lim_{n\to\infty}(f * D_n)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

$(-\pi < t < \pi)$

＜フーリエ逆変換の収束＞

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}[f(t)]\right] = \lim_{n\to\infty}(f * \rho_n)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

$(-\infty < t < \infty)$

< 付録 2 : 合成積の微分 >

補題 2 変数関数 $\varphi(t,u)$ が連続で偏微分可能であり，偏導関数 $\varphi_t(t,u)$ が連続であれば

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t,u)dt = \varphi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)du$$

(証明) $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t,u)du = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h}\varphi(t+h,u)du - \int_0^t \varphi(t,u)du\right\}$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\int_0^{t+h}\frac{\varphi(t+h,u)-\varphi(t,u)}{h}du + \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varphi(t,u)du\right\}$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)du + \varphi(t,t) \qquad \text{(証明終)}$$

例 P71 例題の $x(t) = \displaystyle\int_0^t \left\{e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\right\} f(u)du$ が解であることを確かめる。

$g(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ とおくと $g(t)$ は同次微分方程式の解である。つまり

$$g''(t) + 5g'(t) + 6g(t) = 0$$

が成立する。また

$$x(t) = \int_0^t g(t-u)f(u)du = (g*f)(t)$$

である。$g(0) = 0$ と補題から

$$x'(t) = g(0)f(t) + \int_0^t g'(t-u)f(u)du = \int_0^t g'(t-u)f(u)du$$

となる。$g'(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t}$ より $g'(0) = 1$ から

$$x''(t) = g'(0)f(t) + \int_0^t g''(t-u)f(u)du = f(t) + \int_0^t g''(t-u)f(u)du$$

よって

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t)$$

$$= f(t) + \int_0^t \{g''(t-u) + 5g'(t-u) + 6g(t-u)\} f(u)du = f(t)$$

でかつ $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ より $x(t)$ が例題の解であることが確かめられた。

< 付録 3 : ロピタルの定理 >

[1]　$f(x)$, $g(x)$ は $x = a$ の近くで連続，a 以外で微分可能で $g'(x) \neq 0$ かつ $f(a) = g(a) = 0$ とする。そのとき極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\Big(f(x),\ g(x)$ が $x = a$ で定義されていなくても $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ならば同じことがいえる。$\Big)$

[2]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[3]　$x \to a + 0$(右極限) のとき $f(x) \to +\infty,\ g(x) \to +\infty$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[4]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明の概略)

[1] は $Cauchy$ の平均値の定理 $\displaystyle\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < x)$ より従う。

[2] は $F(x) = f(\frac{1}{x}),\ G(x) = g(\frac{1}{x})$ に対して [1] の結果を使う。

[3] は $a < x < x_1$ に対しコーシーの平均値定理より

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (x < c < x_1)$$

と表されるので

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \times \frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

と変形されることにより従う。

[4] は $F(x) = f(\frac{1}{x}),\ G(x) = g(\frac{1}{x})$ とおいて [3] の結果 を使う。

< 付録 4 : 単関数のフーリエ逆変換 >

補題	$\displaystyle \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{x}\,dx = \mathrm{sgn}(\lambda) = \begin{cases} 1 & : \ \lambda > 0 \\ 0 & : \ \lambda = 0 \\ -1 & : \ \lambda < 0 \end{cases}$

(証明) ① $\lambda > 0$ のとき $\lambda x = t$ とおくと

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\frac{t}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\lambda}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = 1$$

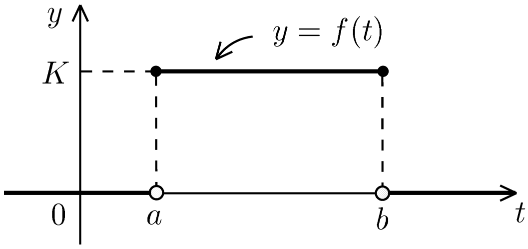
② $\lambda < 0$ のとき $\lambda = -\lambda'(\lambda' > 0)$ とおくと $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ だから

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(-\lambda' x)}{x}\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda' x)}{x}\,dx = -1$$

③ $\lambda = 0$ のとき 明らか。 (証明終)

例 定数 $a, b, K\ (a < b,\ K > 0)$ に対し、関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t > b \\ K & : \quad a \leqq t \leqq b \\ 0 & : \quad t < a \end{cases}$$



のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_a^b K e^{-ixt}\,dt = \frac{K}{ix}\left\{e^{-ixa} - e^{-ixb}\right\}$$

である。 これのフーリエ逆変換を補題を用いて求める。

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f(t)]] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{K}{ix}\{e^{-ixa} - e^{-ixb}\}e^{ixt}\,dx$$

$$= \frac{K}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \left\{\frac{e^{ix(t-a)}}{x} - \frac{e^{ix(t-b)}}{x}\right\}dx$$

$$= \frac{K}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \left\{\frac{\cos(t-a)x}{x} + i\,\frac{\sin(t-a)x}{x} - \frac{\cos(t-b)x}{x} - i\,\frac{\sin(t-b)x}{x}\right\}dx$$

$$= \frac{K}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin(t-a)x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin(t-b)x}{x}\,dx\right\} = \frac{K}{2}\left\{\mathrm{sgn}(t-a) - \mathrm{sgn}(t-b)\right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & : \quad b < t \\ \frac{K}{2} & : \quad t = b \\ K & : \quad a < t < b \\ \frac{K}{2} & : \quad t = a \\ 0 & : \quad t < a \end{cases}$$