

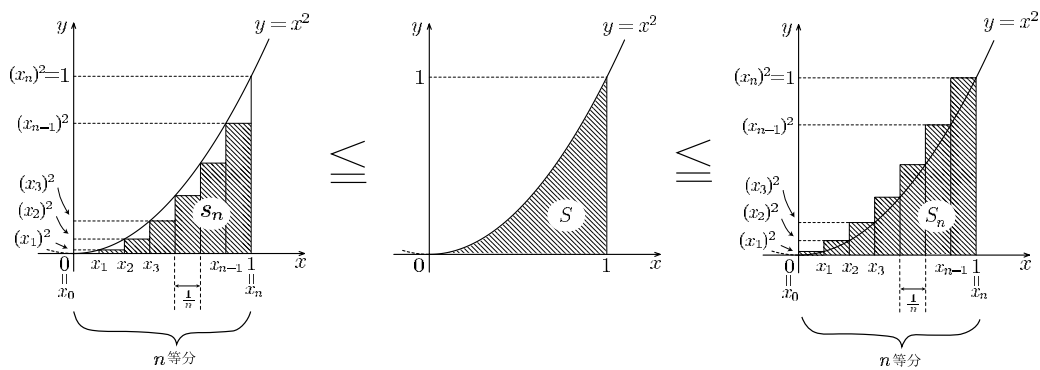


高知工科大学

Kochi University of Technology

数学 2

(2008年度版)



初等関数の積分法

(不定積分, 定積分, 面積, 関数の近似)

井上 昌昭 著

< 微分の復習 1 >

面積や体積を求める求積法はアルキメデスの時代から計算されてきたが、一般の人には理解しにくいものであった。それが簡単に求まるようになったのは、ニュートンとライプニッツの微分積分学の基本定理からである。この定理によって面積や体積を表す定積分は不定積分の値の差として求まることになる。そこでこのワークブックでは、まず不定積分を求める練習をしてから、定積分の計算練習をし、その応用として面積を求める練習をする。不定積分は微分の逆演算である。従って微分がわかっているならば、積分は求まる。そこでまず微分の復習をする。

関数 $f(x)$ の定義域内の変数 x に対し、極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ が存在するとき、その関数 $f(x)$ は定義域内で**微分可能**であるといい、その極限を

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

等で表し、 $f(x)$ の**導関数**という。導関数を求めることを「**微分する**」という。次式が成り立つ。

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

ここで三角関数の角 θ は弧度法による角度であり、 e はネピアの数 $e = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = 2.71828182845 \dots$ である。この式と 2 項定理から次の極限式が得られる。ただし e はネピアの数、 $\log x$ は自然対数（底が e の対数）、 n は自然数（1 以上の整数）、 a は 1 でない正の実数である。

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} & (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \\ (3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0 & (4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \\ (5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x & (6) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{xk} \log_a(1+k) = \frac{1}{x} \log_a e \\ (7) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} & (8) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \end{array}$$

問 1 次の導関数を求めよ。ただし K は定数である。

$$\begin{array}{lll} (1) \frac{d}{dx} x^n & (2) \frac{d}{dx} \sin x & (3) \frac{d}{dx} \cos x \\ (4) \frac{d}{dx} \log x & (5) \frac{d}{dx} e^x & (6) \frac{d}{dx} K \end{array}$$

二つの微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して、その合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数は

$$\boxed{y' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \times g'(x)} \quad \text{または} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}} \quad (\text{ただし } u = g(x))$$

で求められる。

問 2 次の関数の導関数を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) (5x-3)^8 & (2) (x^2+3x-4)^6 & (3) \sin(3x) \\ (4) \cos(5x+\pi) & (5) \sin(x^5) & (6) \log(4x) \\ (7) \log(5x-3) & (8) \log(x^5) & (9) \log(x^2+3x+1) \\ (10) \log(\cos x) & (11) e^{3x+2} & (12) e^{-x^2} \end{array}$$

< 微分の復習 2 >

[微分の性質] 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ および定数 K に対して、次の式が成り立つ。

(1) $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$	(4) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(2) $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$	(5) $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
(3) $\{Kf(x)\}' = Kf'(x)$	

問 1 次の関数の導関数を求めよ。

- | | | |
|------------------------|---------------------------|--------------------------|
| (1) $4x^3 - 3x + 5$ | (2) $3 \sin x - 5 \cos x$ | (3) $4e^x - 5 \log x$ |
| (4) $x^3 \sin x$ | (5) $x^4 \cos x$ | (6) $x^2 e^x$ |
| (7) $x \log x$ | (8) $\frac{1}{\sin x}$ | (9) $\tan x$ |
| (10) $e^{2x} \sin(3x)$ | (11) $e^{3x} \cos(4x)$ | (12) $\sin(2x) \cos(3x)$ |

自然対数 $\log x$ と微分可能な関数 $f(x)$ との合成関数 $\log(f(x))$ の導関数が

$$\frac{d}{dx} \log(f(x)) = \frac{1}{f(x)} \times \frac{d}{dx} f(x)$$

となることを利用して導関数を求める方法を対数微分法という。例えば任意の実数 r に対して、関数 $y = x^r$ の導関数を求めてみる。両辺の自然対数をとると、 $\log y = \log(x^r) = r \log x$ だから、この両辺を x で微分すると、 $\frac{d}{dx} \log y = \frac{d}{dx} r \log x$ より、 $\frac{1}{y} \times \frac{d}{dx} y = r \times \frac{1}{x}$ 。よって $\frac{dy}{dx} = r \times \frac{1}{x} \times y = rx^{r-1}$ となる。従って公式

$$\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}$$

が任意の実数 r に対して成立することがわかる。分数 $\frac{1}{x^n}$ や累乗根の関数 $\sqrt[n]{x^n}$ を微分するときは、 $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ や $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x^{\frac{n}{n}}$ などの形にしてから、上記微分公式を使う。

問 2 次の関数の導関数を求めよ。

- | | | | | | |
|---------------------|----------------|---------------------|---------------------|-----------------------------|----------------------|
| (1) $\frac{1}{x^3}$ | (2) \sqrt{x} | (3) $\sqrt[4]{x^3}$ | (4) $\sqrt[3]{x^5}$ | (5) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ | (6) $x^5 \sqrt{x^2}$ |
|---------------------|----------------|---------------------|---------------------|-----------------------------|----------------------|

単調関数 $f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の微分公式は $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (ただし $x = f(y)$) となる。逆三角関数 $y = \tan^{-1}(x)$ の導関数は、 $x = \tan(y)$ に注意すると

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} \tan(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

となる。同様にして次ぎの微分公式が得られる。

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

最後に、自然対数と絶対値関数 $|x|$ との合成関数の微分公式は $\frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) であることを注意しておく。

< 不定積分 1 >

x の関数 $f(x)$ に対して、微分すると $f(x)$ になる関数、すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ があれば、それを $f(x)$ の**原始関数**という。

例 1 $f(x) = 3x^2$ のとき、 $(x^3)' = 3x^2$ だから $F(x) = x^3$ は $f(x) = 3x^2$ の原始関数である。しかし、原始関数は 1 個ではない。 $(x^3 + 1)' = 3x^2$ より $x^3 + 1$ も $3x^2$ の原始関数である。同様に考えると

$$x^3 + 2, \quad x^3 + 3, \quad x^3 + 4, \quad x^3 - 1, \quad x^3 - 2, \quad x^3 + \frac{5}{2}, \quad \dots$$

等は全て $f(x) = 3x^2$ の原始関数である。従って $3x^2$ の原始関数は無限に多くあるが、いずれも

$$x^3 + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

の形をしている。

一般に $F'(x) = f(x)$ のとき、 $f(x)$ の原始関数は無限に多くあるが、いずれも $F(x) + C$ (C は任意の定数) の形をしている。この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい、 $\int f(x)dx$ で表す。

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき } \boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad (\text{不定積分})$$

$f(x)$ の不定積分を求めることを、 $f(x)$ を**積分する**といい、上の定数 C を**積分定数**と呼ぶ。また、このとき $f(x)$ を**被積分関数**といい、 x を**積分変数**という。

例 2 $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^5 dx$ (2) $\int \frac{1}{x} dx$

(3) $\int \cos x dx$ (4) $\int \sin x dx$

(5) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ (6) $\int e^x dx$

< 不定積分 2 >

微分公式 $\frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx} x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^{\alpha}$ (α は実数) より次の不定積分が求まる。

$$\textcircled{1} \quad \alpha \neq -1 \text{ のとき} \quad \int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha = -1 \text{ のとき} \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

例 $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$

(注1) 例の結果が正しいかどうか調べるためには、不定積分 $2\sqrt{x} + C$ を微分して被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ になれば良い。

$$\frac{d}{dx} (2\sqrt{x} + C) = \frac{d}{dx} (2x^{\frac{1}{2}}) = 2 \times \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

より正しい。

(注2) $\int \frac{1}{f(x)} dx$ を $\int \frac{dx}{f(x)}$ と略記することがある。

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x^9 dx$$

$$(2) \int \frac{1}{x^4} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(4) \int \sqrt{x} dx$$

$$(5) \int \sqrt[5]{x^3} dx$$

< 不定積分 3 >

不定積分について、次の公式が成り立つ。ただし両辺の積分定数の違いは無視している。

$1. \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$ $2. \int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ $3. \int \{f(x) - g(x)\} dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$	(定数倍, 和・差の不定積分)
---	-----------------

例
$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} dx = \int \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx$$

$$= \int dx - 3 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{1}{x^2} dx = x - 3 \log|x| - \frac{2}{x} + C$$

(注) この例のように、積分定数は最後にまとめて C で表す。

また $\int 1dx$ は 1 を省略して $\int dx$ と書くことがある。

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x^2 - 4x + 1}{x^3} dx$

(2) $\int \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{x^4} dx$

(3) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$

(4) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx$

< 不定積分 4 >

問 1 三角関数の定義 (または性質) を用いて, 次の値を求めよ。

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x$

(2) $\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \left(4 \sin x - 3 \cos x + \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx$

(2) $\int \frac{3 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx$

(3) $\int (2 - \tan x) \cos x dx$

(4) $\int \frac{dx}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$

(5) $\int (1 + \tan^2 x) dx$

問 3 逆三角関数の微分法の結果を用いて, 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(2) $\int \frac{5}{1+x^2} dx$

< 積分記号 >

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\frac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\int \square dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば、

$$\frac{d}{dt}(F(t)) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

$$\text{例 1} \quad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \quad \text{より} \quad \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2 \quad \text{より} \quad \int 3t^2 dt = t^3 + C$$

$$\frac{d}{du}(u^3) = 3u^2 \quad \text{より} \quad \int 3u^2 du = u^3 + C$$

$$\text{例 2} \quad (1) \quad \int (t^2 - 4t + 3) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$$

$$(2) \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$(3) \quad \int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \quad \int (10 - 9.8t) dt =$$

$$(2) \quad \int 4\pi r^2 dr =$$

$$(3) \quad \int e^u du =$$

$$(4) \quad \int \frac{1}{y} dy =$$

$$(5) \quad \int \cos u du =$$

< 置換積分法 1 >

$\int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき, $F(x)$ と $g(x)$ の合成関数 $F(g(x))$ の導関数は

$$\{F(g(x))\}' = F'(g(x)) \times g'(x) = f(g(x)) \times g'(x)$$

であった。よって

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \cdots \textcircled{1}$$

ここで $g(x) = u$ とおくと $g'(x) = \frac{du}{dx}$ より

$$\textcircled{1} \text{の左辺} = \int f(u) \frac{du}{dx} dx$$

$$\textcircled{1} \text{の右辺} = F(u) + C = \int f(u) du$$

よって

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du} \quad (\text{ただし } u = g(x))$$

すなわち x の積分が u の積分になった。これを置換積分という。

例 $\int \cos(3x+2)dx$ を求めたい。 $u = 3x+2$ とおく。

$$\frac{du}{dx} = (3x+2)' = 3$$

より

$$\begin{aligned} \int \cos(3x+2)dx &= \frac{1}{3} \int \cos(3x+2) \times 3dx = \frac{1}{3} \int \cos(u) \frac{du}{dx} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin(u) + C = \underline{\underline{\frac{1}{3} \sin(3x+2) + C}} \end{aligned}$$

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \cos(4x-3)dx$$

$$(2) \int \sin(3x+4)dx$$

< 置換積分法 2 >

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (5x + 3)^6 dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{6x + 5}$$

$$(3) \int \frac{dx}{\cos^2(3x - 4)}$$

$$(4) \int e^{4x+1} dx$$

< 置換積分法 3 >

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sqrt{4x-3} dx$

(2) $\int \frac{1}{(5x-3)^4} dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

< 置換積分法 4 >

例 $\int x^2 e^{x^3} dx$ を求めたい。 $u = x^3$ とおくと $\frac{du}{dx} = 3x^2$ より

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{x^3} dx &= \frac{1}{3} \int e^{x^3} \times (3x^2) dx = \frac{1}{3} \int e^u \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{3} \int e^u du \\ &= \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C\end{aligned}$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^3 e^{x^4+1} dx$

(2) $\int x^2 \cos(x^3 + 2) dx$

(3) $\int x \sin(x^2 + 3) dx$

(4) $\int x(x^2 + 1)^5 dx$

< 置換積分法 5 >

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$$

$$(2) \int \frac{3x}{x^2 + 4} dx$$

$$(3) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$(4) \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$(5) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

< 置換積分法 6 >

例 $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{dx}{(5x-4)^2+1}$

(2) $\int \frac{dx}{(6x+10)^2+4}$

< 不定積分の練習 1 >

問 1 次の不定積分を求めよ。ただし a, b, n は定数で $a \neq 0, n \neq -1$ である。

$$(1) \int \cos(ax + b) dx =$$

$$(2) \int \sin(ax + b) dx =$$

$$(3) \int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx =$$

$$(4) \int e^{ax+b} dx =$$

$$(5) \int \frac{1}{ax + b} dx =$$

$$(6) \int (ax + b)^n dx =$$

$$(7) \int \frac{1}{1 + (ax + b)^2} dx =$$

問 2 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \cos(3x + 4) dx =$$

$$(2) \int \sin(4x - 3) dx =$$

$$(3) \int \frac{1}{\cos^2(5x + 3)} dx =$$

$$(4) \int e^{3x-5} dx =$$

$$(5) \int \frac{1}{7x + 10} dx =$$

$$(6) \int (7x - 5)^3 dx =$$

$$(7) \int (-8x + 10)^7 dx =$$

$$(8) \int \frac{1}{1 + (5x - 3)^2} dx =$$

< 不定積分の練習 2 >

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{1}{(3x+4)^6} dx$$

$$(2) \int \sqrt{5x+4} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{7x-3}} dx$$

$$(4) \int x \cos(x^2+3) dx$$

$$(5) \int x e^{-x^2} dx$$

$$(6) \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$(7) \int \tan x dx$$

< 分数関数の積分 >

例 $\int \frac{1}{(x+3)(x+5)} dx$ を求めたい。この被積分関数 $\frac{1}{(x+3)(x+5)}$ は $\frac{A}{x+3}$ と $\frac{B}{x+5}$

(A と B は定数) の形の和として表すことができる。すなわち

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5}$$

とおいて右辺を通分すると

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{(A+B)x + (5A+3B)}{(x+3)(x+5)}$$

となる。この最後の式の分子が 1 になるように A と B を決めれば良い。つまり

$$1 = (A+B)x + (5A+3B)$$

より

$$A+B=0 \quad \dots \text{①}$$

$$5A+3B=1 \quad \dots \text{②}$$

であればよい。①, ②より $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+3} - \frac{\frac{1}{2}}{x+5} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\}$$

と表される。よって求める積分は

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+3)(x+5)} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\} dx = \frac{1}{2} \{ \log|x+3| - \log|x+5| \} + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x+3}{x+5} \right| + C \end{aligned}$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{1}{x(x+1)} dx$

(2) $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx$

(3) $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$

(4) $\int \frac{1}{x^2 + x - 12} dx$

(5) $\int \frac{1}{(2x+1)(3x+4)} dx$

< 部分積分法 1 >

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の微分公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

より

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

となる。この両辺を積分すると

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx} \quad (\text{部分積分})$$

が成り立つ。これを**部分積分の公式**という。

問 1 $\int f'(x)g(x)dx$ を $f(x)g(x)$ と $\int f(x)g'(x)dx$ で表せ。

例
$$\begin{aligned} \int (x+2) \cos x dx &= \int (x+2)(\sin x)' dx = (x+2) \sin x - \int (x+2)' \sin x dx \\ &= (x+2) \sin x - \int 1 \sin x dx = (x+2) \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

(注) 不定積分の結果が正しいかどうか調べるためには、右辺を微分し、被積分関数になれば良い。

例の場合は

$$\begin{aligned} &((x+2) \sin x + \cos x)' \\ &= (x+2)' \sin x + (x+2) \times (\sin x)' + (\cos x)' \\ &= \sin x + (x+2) \cos x - \sin x = (x+2) \cos x \end{aligned}$$

より正しい。

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 2x \cos x dx$

(2) $\int x \sin x dx$

(3) $\int (4x-3)e^x dx$

< 部分積分法 2 >

問 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x \cos(4x - 3) dx$$

$$(2) \int x \sin(2x + 3) dx$$

$$(3) \int x e^{3x+2} dx$$

< 部分積分法 3 >

$$\begin{aligned}
 \text{例 1} \quad \int \log x dx &= \int 1 \times \log x dx = \int (x)' \times \log x dx \\
 &= x \log x - \int x \times (\log x)' dx = x \log x - \int x \times \frac{1}{x} dx \\
 &= x \log x - \int 1 dx = \underline{x \log x - x + C}
 \end{aligned}$$

問 1 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x \log x dx$$

$$(2) \int x^2 \log x dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{例 2} \quad \int x^2 \cos x dx &= \int x^2 (\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \\
 &= x^2 \sin x + \int 2x (\cos x)' dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x dx \\
 &= \underline{x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C}
 \end{aligned}$$

問 2 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x^2 \sin x dx$$

$$(2) \int x^2 e^x dx$$

< 三角関数の不定積分 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って、簡単な形に直してから積分する。

特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式
$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

2. 積を和に直す公式

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \} \end{aligned}$$

これらの公式は、右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1)
$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} \{ 1 + \cos(2x) \} \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

(2)
$$\begin{aligned} \int \sin(2x) \cos x \, dx &= \int \frac{1}{2} \{ \sin(3x) + \sin x \} \, dx \\ &= -\frac{1}{6} \cos(3x) - \frac{1}{2} \cos x + C \end{aligned}$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1)
$$\int \sin^2 x \, dx =$$

(2)
$$\int \cos(3x) \cos(2x) \, dx =$$

(3)
$$\int \sin(4x) \sin x \, dx =$$

(4)
$$\int \sin(4x) \cos(3x) \, dx =$$

(5)
$$\int \cos^2(3x) \, dx =$$

(6)
$$\int \sin^2(4x) \, dx =$$

< 三角関数による置換積分 >

例 $\int \sqrt{1-x^2} dx$ を求めたい。ここで x の定義域は $-1 \leq x \leq 1$ である。

今 $x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと $\cos \theta \geq 0$ より $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$ となる。

また $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\sin \theta) = \cos \theta$ だから置換積分法より

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 \theta} \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int \cos^2 \theta d\theta = \int \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right\} d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin(2\theta) + C \end{aligned}$$

ここで $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} = 2x \sqrt{1-x^2}$ である。

また $x = \sin \theta$ より $\theta = \sin^{-1} x$ だから

$$\text{(答)} \quad \underline{\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C}$$

問 正の定数 a に対して、不定積分 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ を求めよ。

< 不定積分の検証 >

不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには、右辺の関数 $F(x)$ を積分して、被積分関数 $f(x)$ になっているかどうかを調べれば良い。

例 1 $\int x^2 (x^3 + 1)^4 dx = \frac{1}{15} (x^3 + 1)^5 + C$ が正しいかどうか調べる。

右辺を微分する。 $y = \frac{1}{15} (x^3 + 1)^5$, $u = x^3 + 1$ とおくと合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{15} (x^3 + 1)^5 \right) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \left(\frac{1}{15} u^5 \right) \times \frac{d}{dx} (x^3 + 1) \\ &= \frac{1}{15} \times 5u^4 \times 3x^2 = x^2 u^4 = x^2 (x^3 + 1)^4 \text{ より正しい。} \end{aligned}$$

例 2 $\int \frac{1}{(x-3)(x+4)} dx = \log \left| \frac{x-3}{x+4} \right| + C$ が正しいかどうか調べる。

右辺 = $\log |x-3| - \log |x+4| + C$ より右辺を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\log \left| \frac{x-3}{x+4} \right| + C \right) &= \frac{d}{dx} (\log |x-3| - \log |x+4|) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+4} \\ &= \frac{7}{(x-3)(x+4)} \text{ より正しくない。} \end{aligned}$$

例 2 $\int (2x+1) \cos x dx = (2x+1) \sin x + 2 \cos x + C$ が正しいかどうか調べる。

右辺を微分すると (積の微分法より)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ (2x+1) \sin x + 2 \cos x + C \} &= \left(\frac{d}{dx} (2x+1) \right) \times \sin x + (2x+1) \times \left(\frac{d}{dx} \sin x \right) + \frac{d}{dx} (2 \cos x) \\ &= 2 \sin x + (2x+1) \cos x - 2 \sin x = (2x+1) \cos x \text{ より正しい。} \end{aligned}$$

問 次の式の右辺を微分することにより、次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

$$(1) \int x^3 (x^4 - 1)^3 dx = \frac{1}{4} (x^4 - 1)^4 + C$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-3)(x-2)} dx = \log \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$$

$$(3) \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

< 不定積分の練習 3 >

問 1 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-2)(x+1)} dx$$

$$(3) \int (3x+4) \cos x dx$$

$$(4) \int x \sin(2x) dx$$

$$(5) \int x e^{3x-1} dx$$

$$(6) \int 2 \log x dx$$

$$(7) \int x^3 \log x dx$$

$$(8) \int \cos^2(2x) dx$$

$$(9) \int \sin^2(3x) dx$$

問 2 次の式の右辺の導関数を求め、不定積分の式が正しいかどうか判定せよ。

$$(1) \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

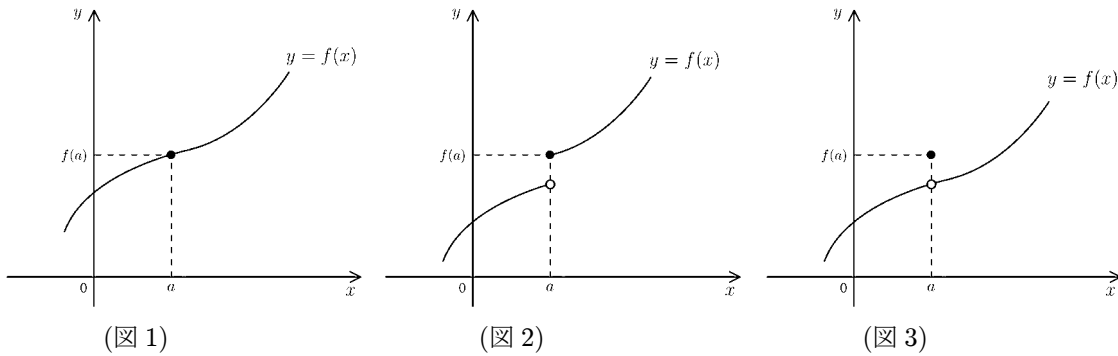
$$(2) \int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

< 連続性・微分可能性 >

< 連続性 > 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在して、

式 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成立するということである。

図 1 は $x = a$ で連続の場合であり、図 2 と図 3 は連続でない場合である。



関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることは、幾何学的には、曲線 $y = f(x)$ が $x = a$ でつながっているということである。

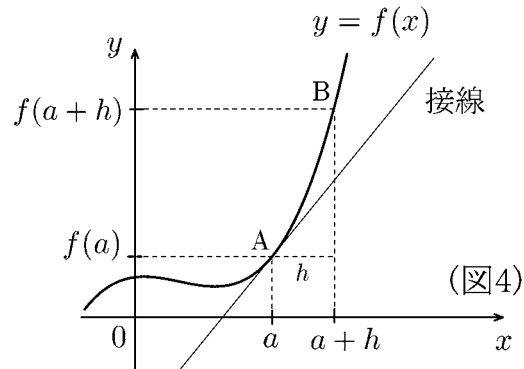
< 微分可能性 >

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは、

極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在する

ことを言う。この極限値を

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

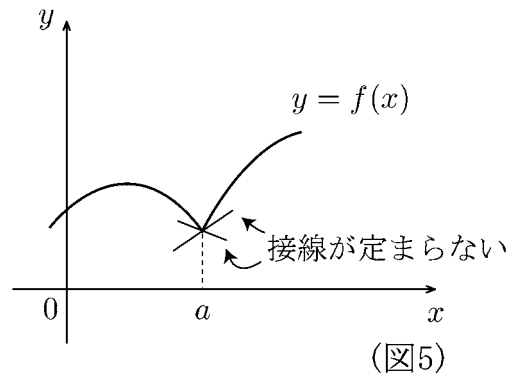


とおき、 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数という。図 4 は $f(x)$ が $x = a$ で微分可能な場合である。このとき $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きを意味する。

(注 1) $x = a$ で微分可能であれば、 $x = a$ で連続である。

(注 2) 曲線 $y = f(x)$ が図 5 のようなとき、 $x = a$ で微分可能ではない。

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であることは、幾何学的には、 $x = a$ の近くでなめらかな曲線であることを意味する。



< 平均値の定理 >

$x_1 < x_2$ のとき, 不等式

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad x_1 < x < x_2, \quad x_1 < x, \quad x \leq x_2$$

などを満たす実数 x の集合を区間といい,

$$[x_1, x_2], \quad (x_1, x_2), \quad (x_1, +\infty), \quad (-\infty, x_2]$$

などで表す。 $[x_1, x_2] = \{x : x_1 \leq x \leq x_2\}$ を閉区間, $(x_1, x_2) = \{x : x_1 < x < x_2\}$ を开区間という。

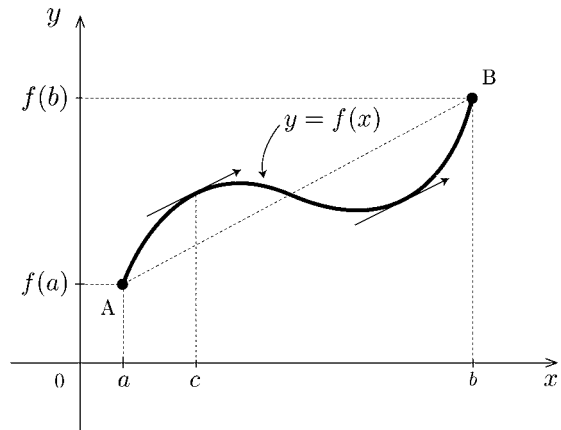
関数 $f(x)$ が閉区間 $[x_1, x_2]$ で連続であるとは, $[x_1, x_2]$ 内の任意の数 x_0 ($x_1 \leq x_0 \leq x_2$) で $f(x)$ が連続であることをいう。また $f(x)$ が开区間 (x_1, x_2) で微分可能であるとは, (x_1, x_2) 内の任意の数 x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) で微分可能であることをいう。

< 平均値の定理 >

$f(x)$ は $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能な関数とする。このとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。

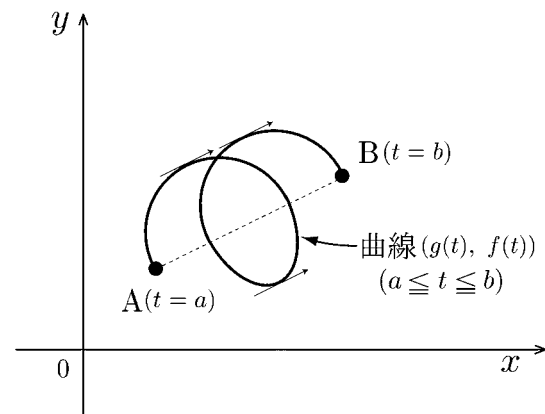


< コーシー (Cauchy) の平均値の定理 >

$f(t), g(t)$ は $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能であり, $g(a) \neq g(b)$ とする。このとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。



< 和の記号 Σ >

数列の和を表すのに、記号 Σ を使って次のように表す。

$$a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=j}^n a_k$$

例 1 ① $\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, ② $\sum_{k=2}^4 k^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3$

③ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$, ④ $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$

問 1 次の和を記号 Σ を使って表せ。

(1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ (2) $2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2$

(3) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ (4) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n}{n}$

記号 Σ の定義から次の公式が得られる。

① $\sum_{k=1}^n 1 = n$, ② $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, ③ $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ④ $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

(略証) ①は明らか。②は等差数列の和の公式。③は $(n+1)^3 - 1^3 = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \text{ と①, ②の結果から導かれる。④は}$$

$$(n+1)^4 - 1^4 = \sum_{k=1}^n (k+1)^4 - \sum_{k=1}^n k^4 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

と①, ②, ③の結果から導かれる。

例 2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$

例 3 $\sum_{k=1}^n (k-1)^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$

(4) $\sum_{k=1}^n (k-1)$

(5) $\sum_{k=1}^n (k-1)^2$

< 定積分の定義 >

関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定義されているものとする。この区間 $I = [a, b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

のように $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ をとって n 個の小区間

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

に分ける。これを区間 $[a, b]$ の分割という。各小区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ から任意の値 ξ_k

をとる。 ξ_k を小区間 I_k の代表値と呼ぶ。この分割と関数 $f(x)$ に対し、次の和

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を作る。この和を **リーマン和** という。 σ 自体は I の分割の仕方と代表値のとり方によって異なるが、分割の個数 n を限りなく大きくし、

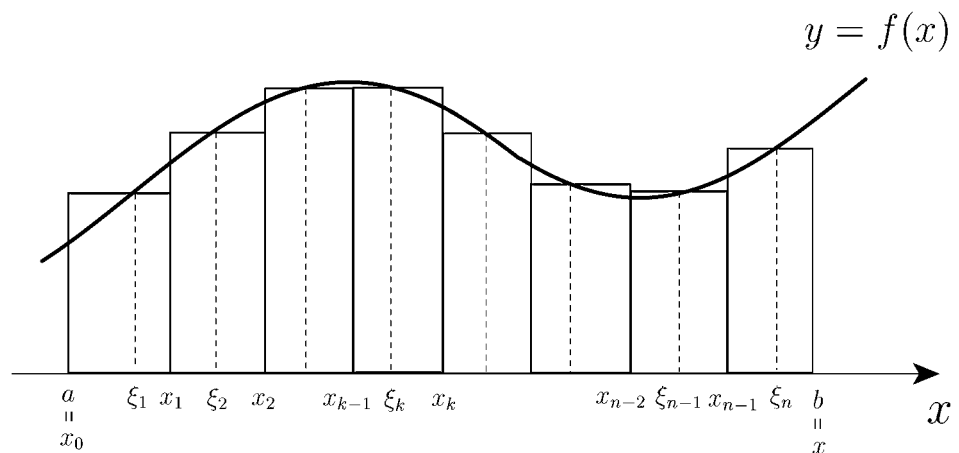
$$\text{分割の最大幅} = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$$

を限りなく小さくしたとき、常に (どんな分割であっても、どんな代表値のとり方をしても) 一定の極限值に σ が近づくならば、 $f(x)$ は $[a, b]$ で**積分可能**または**リーマン積分可能**であるといい、この極限値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書き、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における**定積分**という。

(注) $f(x) > 0$ の場合、
 σ は右図の長方形の集まりの面積を表す。さらに $f(x)$ が積分可能なとき極限值 $\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれた部分の面積を表す。



< 積分可能性 >

定理

$f(x)$ が $[a, b]$ で連続であれば、積分可能である

実は連続でなくても不連続点がある有限個の場合や、 $f(x)$ が単調関数である場合は積分可能である。積分可能であるための必要十分条件は

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) : (x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1}) \text{ の最大値}$$

$$m_k = \min \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} : x_{k-1} \leq x \leq x_k \text{ の範囲で } f(x) \text{ の最小値}$$

$$M_k = \max \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} : x_{k-1} \leq x \leq x_k \text{ の範囲で } f(x) \text{ の最大値}$$

とおくとき

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \times (x_k - x_{k-1}) = 0$$

となることである。なお $S = \sum_{k=1}^n M_k \times (x_k - x_{k-1})$ を ダルブーの過剰和 といい、

$s = \sum_{k=1}^n m_k \times (x_k - x_{k-1})$ を ダルブーの不足和 という。この記号を使うと、積分可能性の必要十分条件は

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} (S - s) = 0 \text{ となる。}$$

例 (積分可能でない例)

関数 $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で定義され、 x が有理数のときは $f(x) = 0$ 、 x が無理数のときは $f(x) = 1$ と定める。有理数はどんなに小さな区間にも無限個存在する。そこで ξ_k を有理数とすれば、リーマン和は

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 0 \times (x_k - x_{k-1}) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

となる。一方無理数もどんなに小さな区間にも無限個存在する。

そこで ξ_k を無理数とすればリーマン和は

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 1 \times (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1 \cdots \textcircled{2}$$

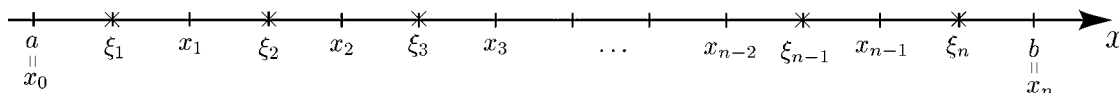
となる。リーマン和が代表値のとり方で 0 になったり 1 になったりするので、一定の極限值には近づかない。従って積分可能ではない。

< 微分積分学の基本定理 >

区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ の定積分の定義は

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \cdots (*)$$

であつた。ここで $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ は $[a, b]$ の分割であり,



ξ_k は小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の任意の値である。この極限 \lim は分割 x_0, x_1, \dots, x_n と ξ_k をどのように選んでも、分割の最大幅 $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ が 0 に近づく限り、一定の極限值に収束することを意味する。

< 微分積分学の基本定理 >

$f(x)$ が連続で、 $\int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

この定理は「ニュートン・ライプニッツの定理」ともいう。

(証明) $f(x)$ は連続であるから、積分可能である。従つて定積分の定義式 (*) における極限值は一意的に存在する。 $F'(x) = f(x)$ より、 $F(x)$ は連続で、微分可能である。 $[a, b]$ の分割 x_0, x_1, \dots, x_n に対して、平均値の定理から

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(\xi_k) \quad (x_{k-1} < \xi_k < x_k)$$

をみたま $\xi_k (1 \leq k \leq n)$ が存在する。従つて

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = F(b) - F(a) \text{ となる。}$$

ここで分割を細かくする ($n \rightarrow \infty, \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0$) 極限をとると、極限值の一意的から

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = F(b) - F(a) \text{ が成り立つ。 (証明終)}$$

< 定積分の計算 1 >

微分積分の基本定理より $f(x)$ が連続で $\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(注) $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ と略記する。

例 1 $\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_1^3 = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{242}{5}$

例 2 $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 4$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_4^{10} dx$

(2) $\int_{-1}^2 x^3 dx$

(3) $\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$

(4) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

(5) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

(6) $\int_0^2 e^x dx$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(8) $\int_0^{\pi} \sin x dx$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(10) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(注) $\int_a^b 1 dx$ を $\int_a^b dx$ と略記する。また $\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx$ を $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ と略記する。

< 定積分の計算 2 >

問 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_1^2 \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2} dx$$

$$(2) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

$$(3) \int_0^\pi \cos^2 x dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$$

< 定積分の性質 >

定積分の定義から次の性質が導かれる。

$$(I) \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(II) \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$(III) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ は定数})$$

$$(IV) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$(V) \text{ 区間 } [a, b] \text{ で常に } f(x) \geq 0 \text{ であれば } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

また、次式が成り立つように定積分の定義を拡張する。

$$(VI) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

例 (1) $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \int_{-1}^2 (-x^2 + 2x + 3) dx = \int_{-1}^2 6 dx = 18$

(2) $\int_{-1}^{0.5} x^2 dx + \int_{0.5}^4 x^2 dx = \int_{-1}^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^4 = \frac{64}{3} - \frac{(-1)}{3} = \frac{65}{3}$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_3^3 e^{-x^2} dx$

(2) $\int_{-1}^3 (x^2 + 3x + 4) dx - \int_{-1}^3 (x^2 - 3x - 4) dx$

(3) $\int_{-2}^1 (x^2 + x^3) dx + \int_1^2 (x^2 + x^3) dx$

< 定積分の積分変数 >

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$$

のように定積分の値は変わらない。すなわち

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

例 (1) $\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\int_1^3 t^4 dt = \left[\frac{1}{5}t^5 \right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\int_1^2 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3 \right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3}\pi \times 8 - \frac{4}{3}\pi \times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(4) $\int_0^\pi 4 \cos \theta d\theta = \left[4 \sin \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4 \sin \pi - 4 \sin 0 = 0$

問 次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\int_1^3 (4 - 10t)dt$

(2) $\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta$

(4) $\int_a^b u^n du$

(5) $\int_1^9 \sqrt{u} du$

< 定積分の置換積分法 1 >

例題 $\int_{-1}^1 (5x+2)^3 dx$ を求めよ。

(解) まず不定積分 $\int (5x+2)^3 dx$ を求める。 $u = 5x+2$ と置くと $\frac{du}{dx} = 5$ より

$$\begin{aligned} \int (5x+2)^3 dx &= \frac{1}{5} \int (5x+2)^3 \times 5 dx = \frac{1}{5} \int u^3 \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{5} \int u^3 du \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{20} u^4 + C = \frac{1}{20} (5x+2)^4 + C \end{aligned}$$

であるから

$$\int_{-1}^1 (5x+2)^3 dx = \left[\frac{1}{20} (5x+2)^4 \right]_{-1}^1 = \frac{7^4}{20} - \frac{(-3)^4}{20} = \frac{2401 - 81}{20} = 116$$

(別解) $u = 5x+2$ とおくと x と u の対応は $\begin{array}{c|c} x & -1 \rightarrow 1 \\ \hline u & -3 \rightarrow 7 \end{array}$ であり, また $\frac{du}{dx} = 5$ より

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (5x+2)^3 dx &= \frac{1}{5} \int_{x=-1}^{x=1} (5x+2)^3 \times 5 dx = \frac{1}{5} \int_{x=-1}^{x=1} u^3 \times \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{5} \int_{u=-3}^{u=7} u^3 du \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_{u=-3}^{u=7} = \frac{1}{5} \left(\frac{7^4}{4} - \frac{(-3)^4}{4} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{2401 - 81}{4} \right) = 116 \end{aligned}$$

(注) 別解の方法を定積分の置換積分法という。

問 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{-1}^1 (2x+1)^4 dx$$

< 定積分の置換積分法 2 >

問 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^2 (3x - 2)^4 dx$$

$$(2) \int_0^4 \sqrt{2x + 1} dx$$

$$(3) \int_0^1 \frac{1}{(4x + 1)^3} dx$$

$$(4) \int_0^2 \frac{3}{5x + 2} dx$$

< 定積分の置換積分法 3 >

例 $\int_0^1 x^2(x^3+1)^4 dx$ を求めたい。 $u = x^3 + 1$ とおくと $\frac{du}{dx} = 3x^2$

u と x との対応は $\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline u & 1 \rightarrow 2 \end{array}$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2(x^3+1)^4 dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3+1)^4 \times 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int_{x=0}^{x=1} u^4 \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{3} \int_{u=1}^{u=2} u^4 du \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5} u^5 \right]_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{3} \times \left\{ \frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right\} = \frac{31}{15} \end{aligned}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(x^2+2)^3 dx$

(2) $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$

(3) $\int_{-1}^2 \frac{x^2}{x^3+2} dx$

(4) $\int_{-1}^1 x^2 e^{x^3+1} dx$

< 定積分の部分積分法 1 >

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

から定積分の部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

が得られる。

例
$$\int_0^5 x(x-5)^2 dx = \int_0^5 x \times \left\{ \frac{(x-5)^3}{3} \right\}' dx$$

$$= \left[x \times \frac{(x-5)^3}{3} \right]_0^5 - \int_0^5 (x)' \times \frac{(x-5)^3}{3} dx = 0 - 0 - \int_0^5 \frac{(x-5)^3}{3} dx$$

$$= - \left[\frac{(x-5)^4}{12} \right]_0^5 = - \left\{ \frac{0^4}{12} - \frac{(-5)^4}{12} \right\} = \frac{625}{12}$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(x-1)^3 dx =$

(2) $\int_0^\pi x \cos x dx =$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx =$

(4) $\int_0^1 xe^x dx =$

< 定積分の部分積分法 2 >

問 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\pi} x \cos(2x) dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(3x) dx$$

$$(3) \int_0^3 x e^{4x} dx$$

< 定積分の部分積分法 3 >

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_1^e x \log x dx$

(2) $\int_1^3 x^2 \log x dx$

(3) $\int_1^{\sqrt{e}} x^3 \log x dx$

(4) $\int_1^2 \log x dx$

< 定積分の部分積分法 4 >

問 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$(3) \int_0^1 x^2 e^x dx$$

< 定積分の練習 1 >

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^3 dx$

(2) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x}$

(3) $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$

(4) $\int_0^{\pi} (3 \sin x - 4 \cos x) dx$

(5) $\int_1^2 \frac{4x^2 - 3x + 1}{x^2} dx$

(6) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(7) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(8) $\int_0^2 \frac{1}{3x+1} dx$

(9) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x) dx$

(12) $\int_{-2}^2 e^{3x-1} dx$

(13) $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$

< 定積分の練習 2 >

問 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^5} dx$$

$$(2) \int_1^{10} \sqrt{5x-1} dx$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^4} dx$$

$$(4) \int_0^1 \frac{3x}{x^2+1} dx$$

$$(5) \int_0^\pi (3x+2) \cos x dx$$

$$(6) \int_0^\pi x \sin(3x) dx$$

$$(7) \int_1^4 \log x dx$$

$$(8) \int_{-1}^1 (2x+1)e^x dx$$

$$(9) \int_0^\pi x^2 \cos x dx$$

< 面積 1 >

定積分の定義 $\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k)$

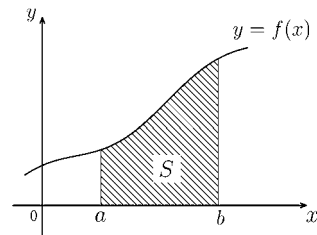
から次の定理が導かれる。

定理 連続関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ と

x 軸および直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積を S とすると,

$$(*) \quad S = \int_a^b f(x)dx$$

である。



例 放物線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S について $(*)$ を確認する。区間

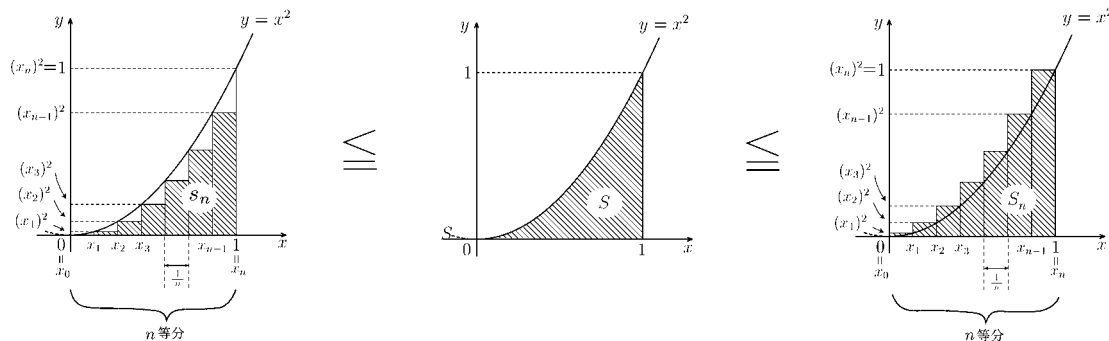
$[0, 1]$ を n 等分する。 k 番目の分点は $x_k = \frac{k}{n} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$

である。代表値が $\xi_k = x_{k-1}$ の場合と $\xi_k = x_k$ の場合のリーマン和をそれぞれ

$$s_n = \sum_{k=1}^n (x_{k-1})^2(x_k - x_{k-1}) \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^n (x_k)^2(x_k - x_{k-1})$$

とおくと図より

$$s_n \leq S \leq S_n$$



となる。従って $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq S \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ である。また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n k^2\right) \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

だから $\frac{1}{3} \leq S \leq \frac{1}{3}$ より $S = \frac{1}{3}$ である。

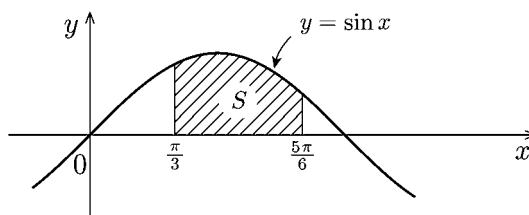
一方 $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ である。よって $(*) \quad S = \int_0^1 x^2 dx$ が成り立つ。

(注) 上の例の分割の場合, ダルブー過剰和が S_n , ダルブー不足和が s_n である。

< 面積 2 >

例 曲線 $y = \sin x$ と 2 直線 $x = \frac{\pi}{3}$ と $x = \frac{5\pi}{6}$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求める。

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$



問 次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$

(2) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 9$

(3) $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$

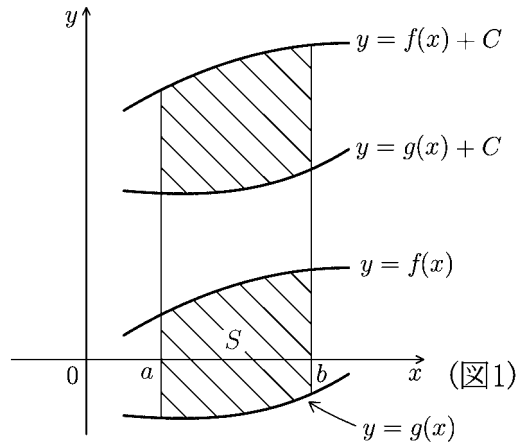
(4) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$

< 面積 3 >

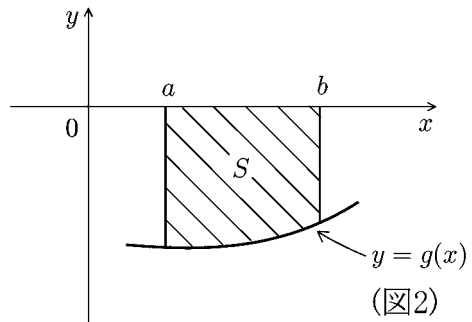
$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq g(x)$ である場合、2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$(*) \quad S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

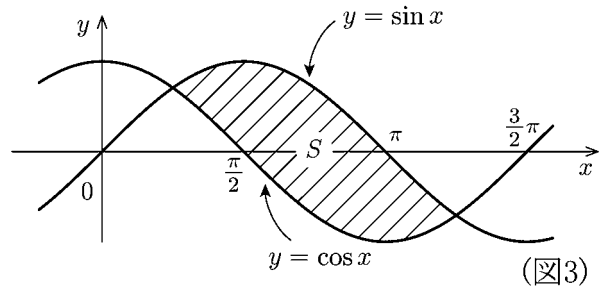
< 証明略 >



問 1 $a \leq x \leq b$ の範囲で $g(x) < 0$ の場合、曲線 $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を $g(x)$ に関する定積分で表せ。



問 2 図 3 の斜線部分の面積 S を求めよ。



問 3 次の曲線や直線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

(2) $y = \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

< 面積 4 >

例 半径 1 の円の面積 S を求めたい。

原点を中心として半径 1 の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1$$

である。 y について解くと

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

である。これは円を上半円 ($y = \sqrt{1-x^2}$) と

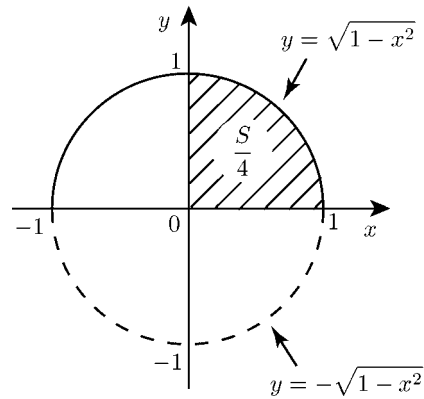
下半円 ($y = -\sqrt{1-x^2}$) に分けたものである。従って $\frac{1}{4}$ 円の面積は P21 の結果より

$$\frac{S}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \sin^{-1}(1) - \frac{1}{2} \sin^{-1}(0)$$

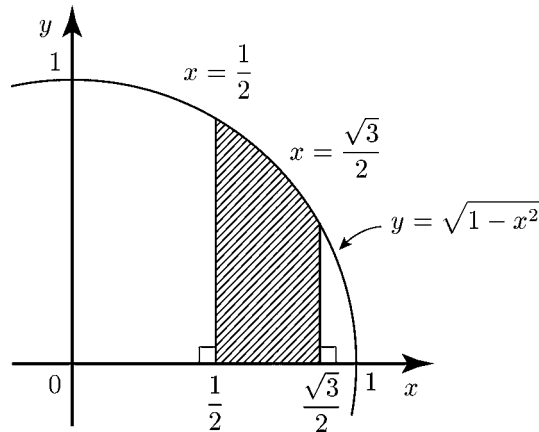
である。ここで $\theta = \sin^{-1}(x) \iff x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) より、

$$\sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1 \iff \sin^{-1}(0) = 0, \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} \text{ だから}$$

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} \implies \text{(答) } \underline{\underline{S = \pi}}$$



問 1 右の図の面積を求めよ。



問 2 a を正の定数とする。半径 a の円の面積を定積分を使って求めよ。

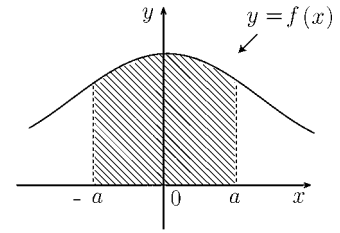
< 偶関数・奇関数の定積分 >

$f(-x) = f(x)$ (y 軸対称) である関数 $f(x)$ を**偶関数**という。

例 1 $f(x) = x^{2n}$ (n は整数), $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin^2 x$ などは偶関数

である。

$$f(x) \text{ が偶関数であれば } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$



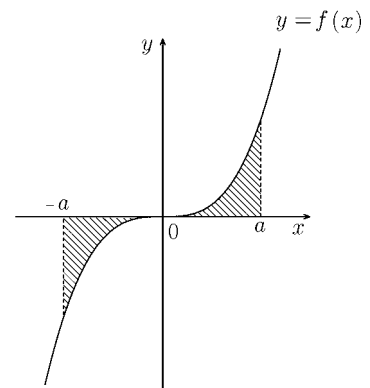
(証明) $f(-x) = f(x)$ であるから $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ よりわかる。

$f(-x) = -f(x)$ (原点对称) である関数 $f(x)$ を**奇関数**という。

例 2 $f(x) = x^{2n-1}$ (n は整数), $f(x) = \sin x$, $f(x) = \tan x$ などは

奇関数である。

$$f(x) \text{ が奇関数であれば } \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$



(証明) $f(-x) = -f(x)$ であるから $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ よりわかる。

例 3 $\int_{-1}^1 (x^3 + x^4)dx = \int_{-1}^1 x^3 dx + \int_{-1}^1 x^4 dx = 0 + 2 \int_0^1 x^4 dx = \frac{2}{5}$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^2 (x^3 + x^4 + x^5)dx$

(2) $\int_{-1}^1 (x + x^3 + x^6)dx$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \tan x \right) dx$

< 定積分の応用問題 >

問 1 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^1 (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) dx$$

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin x + \cos x + \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

問 2 次の図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ と x 軸および 2 直線 $x = 1$ と $x = 4$ で囲まれた部分の面積

(2) 曲線 $y = -x^2 + 3$ と曲線 $y = x^2 - 2x - 1$ で囲まれた部分の面積

(3) 曲線 $y = x^3$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積

(4) $y = \log x$ と x 軸および直線 $x = e$ で囲まれた部分の面積

< 関数の極限 >

$$\text{例 1} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{27 - 8}{3 - 2} = 19$$

$$\text{例 2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

$$\text{例 3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

(注) 初項 a^{n-1} , 公比 $\frac{b}{a}$ の等比数列の和の公式より

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

よって

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\begin{aligned} \text{例 4} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 3^5}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^4 + x^3 \times 3 + x^2 \times 3^2 + x \times 3^3 + 3^4)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81) = 81 \times 5 = 405 \end{aligned}$$

問 次の関数の極限値を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

< ロピタルの定理 1 >

< 定理 (ロピタル) >

$f(x), g(x)$ は微分可能で, $f(a) = 0, g(a) = 0$ であり, 極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明) 右極限を示す。 $x > a$ のとき, コーシーの平均値の定理より

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < x)$$

をみたす c が存在する。 $x \rightarrow a + 0$ のとき $c \rightarrow a + 0$ より, 右辺 $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ は

極限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ に近づく。左極限の場合も同様に示される。

例 1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$ を求めたい。 $x = 1$ を代入すると分母, 分子共に 0 になるから

ロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^5 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{1} = 5$$

例 2 $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{(\log x - 1)'}{(x - e)'} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x - 1}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

< ロピタルの定理 2 >

$$\begin{aligned} \text{例 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 6x + 5}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^6 - 6x + 5)'}{((x-1)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^5 - 6}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6x^5 - 6)'}{(2(x-1))'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{30x^4}{2} = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(2x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = \frac{-\cos 0}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

問 次の関数の極限值を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32 - 80(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1 - \frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1 - \frac{1}{e}(x-e)}{(x-e)^2}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$$

< ロピタルの定理 3 >

例
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5 - 5a^4(x-a)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{5x^4 - 5a^4}{2(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{20x^3}{2} = 10a^3$$

問 次の極限值を求めよ。ただし $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ は n の階乗である。

(5) と (6) は階乗の記号を用いて答えよ。

(1)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$$

(2)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)}{(x-a)^2}$$

(3)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log x - \log a - \frac{1}{a}(x-a)}{(x-a)^2}$$

(4)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a - (\cos a)(x-a)}{(x-a)^2}$$

(5)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a + (\sin a)(x-a) + \frac{1}{2!}(\cos a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

(6)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a - e^a(x-a) - \frac{1}{2!}e^a(x-a)^2 - \frac{1}{3!}e^a(x-a)^3}{(x-a)^4}$$

< 高階導関数 >

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f^{(1)}(x)$$

等で表す。また $f'(x)$ の導関数 $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ を

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx} \right)^2 f(x) = f^{(2)}(x)$$

等で表し、 $f(x)$ の **2 階導関数** という。

また $f''(x)$ の導関数 $f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$ を

$$f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = \left(\frac{d}{dx} \right)^3 f(x) = f^{(3)}(x)$$

等で表し、 $f(x)$ の **3 階導関数** という。

一般に $f(x)$ を n 回微分した関数を

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x) = f^{(n)}(x)$$

等で表し、 $f(x)$ の **n 階導関数** という。

例 $f(x) = x^{10}$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 10x^9, \quad f^{(2)}(x) = 90x^8, \quad f^{(3)}(x) = 720x^7, \quad f^{(4)}(x) = 5040x^6$$

問 $f(x)$ が次の場合に 4 階導関数まで求めよ。

(1) $f(x) = x^5$

$$f^{(1)}(x) = \quad f^{(2)}(x) = \quad f^{(3)}(x) = \quad f^{(4)}(x) =$$

(2) $f(x) = e^x$

$$f^{(1)}(x) = \quad f^{(2)}(x) = \quad f^{(3)}(x) = \quad f^{(4)}(x) =$$

< 高階微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ の $x = a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x = a$ における

$f(x)$ の n 階微分係数という。

例 $f(x) = x^5$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 5x^4, \quad f^{(2)}(x) = 20x^3, \quad f^{(3)}(x) = 60x^2, \quad f^{(4)}(x) = 120x$$

より, $x = 2$ における 4 階までの微分係数は,

$$f^{(1)}(2) = 80, \quad f^{(2)}(2) = 160, \quad f^{(3)}(2) = 240, \quad f^{(4)}(2) = 240$$

問 1 $f(x) = \sin x$ の 8 階までの導関数 $f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)$ を求め,

$x = 0$ における 8 階までの微分係数 $f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)$ を求めよ。

$$f^{(1)}(x) = \quad f^{(2)}(x) = \quad f^{(3)}(x) = \quad f^{(4)}(x) =$$

$$f^{(5)}(x) = \quad f^{(6)}(x) = \quad f^{(7)}(x) = \quad f^{(8)}(x) =$$

$$f^{(1)}(0) = \quad f^{(2)}(0) = \quad f^{(3)}(0) = \quad f^{(4)}(0) =$$

$$f^{(5)}(0) = \quad f^{(6)}(0) = \quad f^{(7)}(0) = \quad f^{(8)}(0) =$$

問 2 $f(x) = \cos x$ の 8 階までの導関数 $f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)$ を求め,

$x = 0$ における 8 階までの微分係数 $f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)$ を求めよ。

$$f^{(1)}(x) = \quad f^{(2)}(x) = \quad f^{(3)}(x) = \quad f^{(4)}(x) =$$

$$f^{(5)}(x) = \quad f^{(6)}(x) = \quad f^{(7)}(x) = \quad f^{(8)}(x) =$$

$$f^{(1)}(0) = \quad f^{(2)}(0) = \quad f^{(3)}(0) = \quad f^{(4)}(0) =$$

$$f^{(5)}(0) = \quad f^{(6)}(0) = \quad f^{(7)}(0) = \quad f^{(8)}(0) =$$

問 3 $f(x) = e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め, $x = 0$ における

n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

$$f^{(n)}(x) = \quad f^{(n)}(0) =$$

< テーラーの定理 >

< テーラーの定理 >

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であり, $a < x < b$ で何回でも微分可能であるとする。

このとき

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)} + R$$

とおくと

$$R = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \quad (a < c < b)$$

をみたす c が存在する。

(証明) $n = 1$ のときと $n = 2$ のときの証明をする。

< $n = 1$ のとき >

$$F(x) = f(x) - f(a), \quad G(x) = x - a \quad \text{とおくと}$$

$F'(x) = f'(x)$, $G'(x) = 1$, $F(a) = 0$, $G(a) = 0$ より, コーシーの平均値の定理から

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \quad (a < c < b)$$

をみたす c が存在する。よって $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}$ より

$$\underline{f(b) = f(a) + \frac{f'(c)}{1!}(b-a)}$$

< $n = 2$ のとき >

$$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a), \quad G(x) = (x-a)^2 \quad \text{とおくと}$$

$$F'(x) = f'(x) - f'(a), \quad F''(x) = f''(x), \quad G'(x) = 2(x-a), \quad G''(x) = 2,$$

$F(a) = 0$, $F'(a) = 0$, $G(a) = 0$, $G'(a) = 0$ より, コーシーの平均値の定理から

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} \quad (a < c_2 < c_1 < b)$$

をみたす c_1, c_2 が存在する。よって $\frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{f''(c_2)}{2}$ より

$$\underline{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(c_2)}{2!}(b-a)^2}$$

n が 3 以上のときも同様に示される。

< 関数の 1 次近似 >

テーラーの定理で、 $n = 2$ 、 $b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 \quad (a < c < x)$$

をみたく c が存在する。ここで、 x が a に十分近いと $\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$ は 0 に近いので、

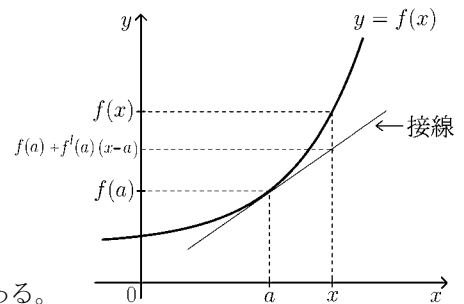
次の近似式が成り立つ。

$$(*) \quad \boxed{x \approx a \text{ のとき } f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)} \quad (1 \text{ 次近似式})$$

これを $f(x)$ の $x = a$ の近くでの 1 次近似式

という。右辺の式は直線

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)} \quad (\text{接線})$$



を表す。これは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式である。

(注) $f(x)$ が $x < a$ でも定義されている場合は、1 次近似式 (*) は $x < a$ のときも成り立つ。

例 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ のとき $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ より $\sqrt[3]{x}$ の 1 次近似式は

$$\underline{\underline{x \approx a \text{ のとき } \sqrt[3]{x} \approx \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x-a)}}$$

問 $f(x)$ が次の関数の場合に $x = a$ の近くでの 1 次近似式を求めよ。

(1) $f(x) = \sqrt{x}$

(2) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

(3) $f(x) = \log x$

(4) $f(x) = \sin x$

(5) $f(x) = \cos x$

(6) $f(x) = e^x$

< 1 次近似値 >

例 前のページの例より $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の $x = a$ の近くでの 1 次近似式は

$$x \doteq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x} \doteq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x - a) \dots (*)$$

であった。この近似値を用いて $\sqrt[3]{8.15}$ の近似式を求める。

$x = 8.15$, $a = 8$ とおくと $x \doteq a$ より (*) 式から

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8.15} &\doteq \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(8.15 - 8) \\ &= 2 + \frac{1}{3 \times 4} \times 0.15 = 2 + \frac{0.05}{4} = 2.0125 \end{aligned}$$

この値 2.0125 は、1 次近似式 (*) を用いるので、 $\sqrt[3]{8.15}$ の 1 次近似値

という。なお実際の値 $\sqrt[3]{8.15} = 2.01242\dots$ と比べると誤差は 0.0001 以内である。

問 次の 1 次近似値を求めよ。

(1) $\sqrt{4.1}$

(2) $\sqrt[4]{16.1}$

(3) $\log(1.1)$

< 関数の 2 次近似 >

テーラーの定理で, $n = 3$, $b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3 \quad (a < c < x)$$

をみたま c が存在する。ここで $f'''(c)$ が大きくない場合, x が a に十分近い

と $\frac{f'''(c)}{3}(x-a)^3$ は小さいので, 次の近似式が成り立つ。

$$(*) \quad \boxed{x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2} \quad (2 \text{ 次近似式})$$

これを $f(x)$ の $x = a$ の近くでの **2 次近似式** という。

(注) $f(x)$ が $x < a$ でも定義されている場合は, 2 次近似式 (*) は $x < a$ のときも成り立つ。

例 $f(x) = x^5$ のとき $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$ より x^5 の 2 次近似式は

$$\underline{x \doteq a \text{ のとき } \quad x^5 \doteq a^5 + 5a^4(x-a) + 10a^3(x-a)^2}$$

問 $f(x)$ が次の関数の場合に $x = a$ の近くでの 2 次近似式を求めよ。

(1) $f(x) = x^n$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

(3) $f(x) = \log x$

(4) $f(x) = \sin x$

(5) $f(x) = \cos x$

(6) $f(x) = e^x$

< テーラー展開 >

テーラーの定理で $b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

をみたす c ($a < c < x$) が存在する。ここで $f(x) = e^x$ や $\sin x$, $\cos x$ などの場合

のように, $f^{(n)}(c)$ が大きくなる場合は, 最後の項 $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ は $n \rightarrow \infty$

のとき 0 に近づく。この極限の式

$$(*) \quad f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

の右辺は無有限個の和である。この式 (*) を $f(x)$ の $x = a$ の近くでの **テーラー展開** という。

(注) $f(x)$ が $x < a$ でも定義されて, (*) 式の右辺が収束する場合は, (*) 式は $x < a$ でも成り立つ。

問 1 定数 $a, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n, \dots$ に対し, 関数 $f(x)$ が無限級数

$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + A_4(x-a)^4 + \cdots + A_n(x-a)^n + \cdots$ で表されている場合を考える。その導関数 $f^{(1)}(x)$ や n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(1)}(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + 4A_4(x-a)^3 + \cdots + nA_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f^{(2)}(x) = 2A_2 + 3 \times 2A_3(x-a) + 4 \times 3A_4(x-a)^2 + \cdots + n \times (n-1)A_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \times 2A_3 + 4 \times 3 \times 2A_4(x-a) + \cdots + n \times (n-1) \times (n-2)A_n(x-a)^{n-3} + \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!A_n + (n+1) \times (n) \times \cdots \times 2A_{n+1}(x-a) + \cdots$$

となる。

(1) 次の値を求めよ。

$$f(a) \quad , \quad f^{(1)}(a) \quad , \quad f^{(2)}(a) \quad , \quad f^{(3)}(a) \quad , \quad f^{(n)}(a)$$

(2) 次の値を $f(a), f^{(1)}(a), f^{(2)}(a), f^{(3)}(a), \dots, f^{(n)}(a)$ を用いて表せ。

$$A_0 \quad , \quad A_1 \quad , \quad A_2 \quad , \quad A_3 \quad , \quad A_n$$

問 2 $f(x) = e^x$ に対し, $x = a$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

< マクローリン展開 1 >

関数 $f(x)$ の $x = 0$ の近くでのテーラー展開

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

をマクローリン展開という。

問 1 $f(x) = e^x$ に対し, $f(0)$ および $f^{(n)}(0)$ の各値を求め,

$f(x) = e^x$ のマクローリン展開を求めよ。

$$f(0) = \qquad \qquad \qquad f^{(n)}(0) =$$

$$e^x =$$

問 2 $f(x) = \sin x$ に対し, $f(0)$ および $f^{(1)}(0) \sim f^{(12)}(0)$ の各値を求め,

$\sin x$ のマクローリン展開を求めよ。

$$\begin{array}{cccccc} f(0) = & f^{(1)}(0) = & f^{(2)}(0) = & f^{(3)}(0) = & f^{(4)}(0) = & \\ & f^{(5)}(0) = & f^{(6)}(0) = & f^{(7)}(0) = & f^{(8)}(0) = & \\ & f^{(9)}(0) = & f^{(10)}(0) = & f^{(11)}(0) = & f^{(12)}(0) = & \end{array}$$

$$\sin x =$$

問 3 $f(x) = \cos x$ に対し, $f(0)$ および $f^{(1)}(0) \sim f^{(12)}(0)$ の各値を求め,

$\cos x$ のマクローリン展開を求めよ。

$$\begin{array}{cccccc} f(0) = & f^{(1)}(0) = & f^{(2)}(0) = & f^{(3)}(0) = & f^{(4)}(0) = & \\ & f^{(5)}(0) = & f^{(6)}(0) = & f^{(7)}(0) = & f^{(8)}(0) = & \\ & f^{(9)}(0) = & f^{(10)}(0) = & f^{(11)}(0) = & f^{(12)}(0) = & \end{array}$$

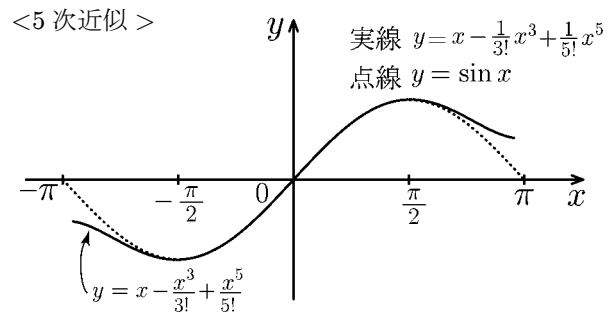
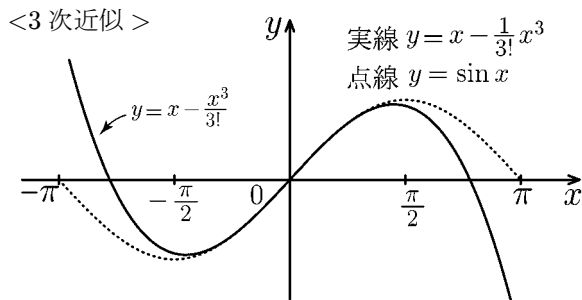
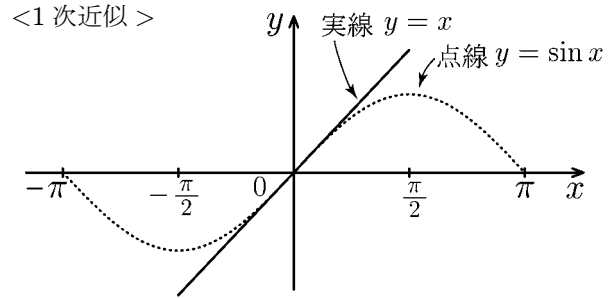
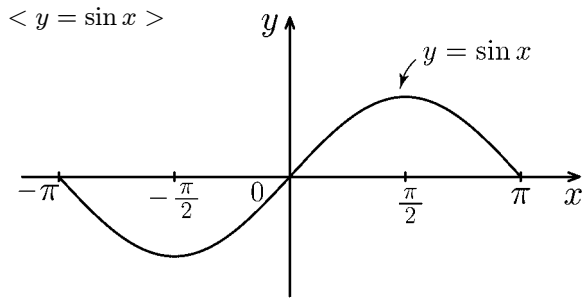
$$\cos x =$$

< マクローリン展開 2 >

例 1 $\sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

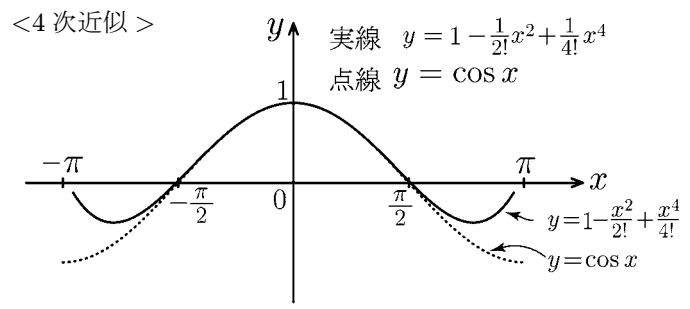
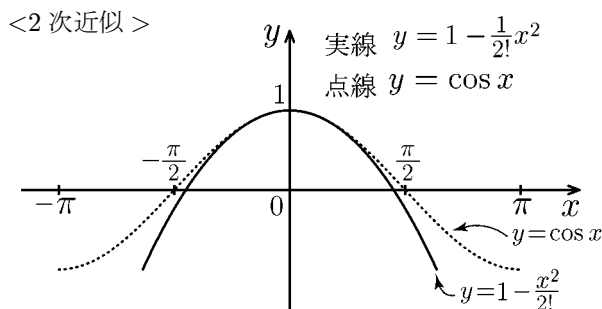
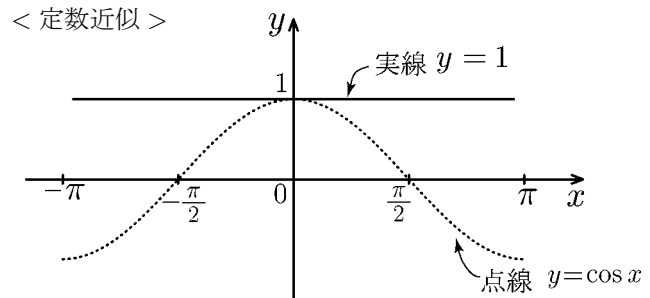
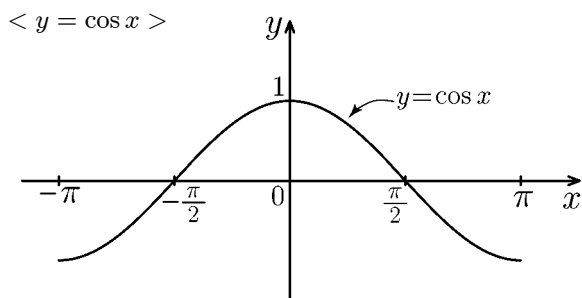
となる。以下の図のように $\sin x$ のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。



例 2 $\cos x$ のマクローリン展開は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots$$

となる。以下の図のように $\cos x$ のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。

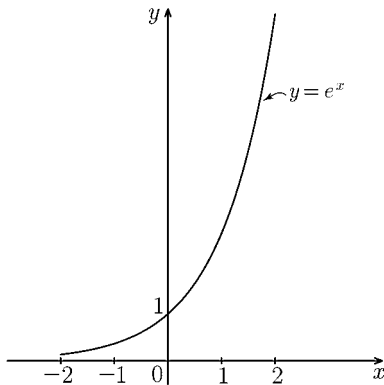


< マクローリン展開 3 >

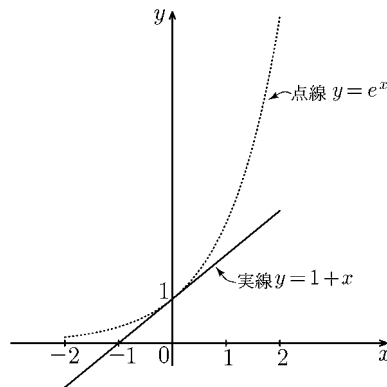
指数関数 e^x のマクローリン展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

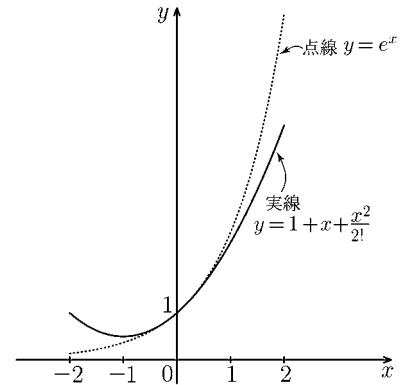
となる。以下の図のように e^x のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。

< $y = e^x$ >

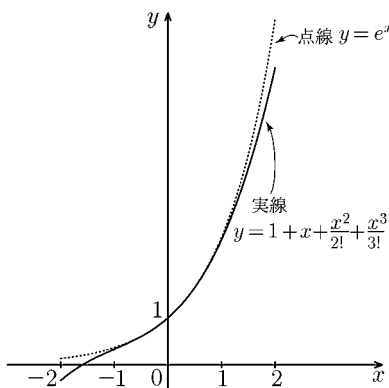
< 1次近似 >



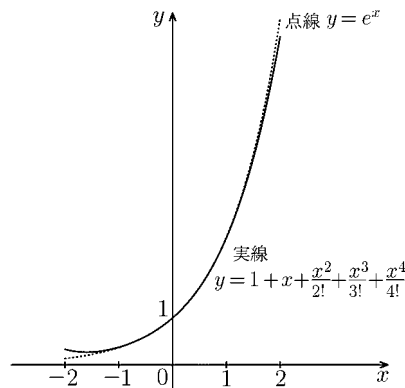
< 2次近似 >



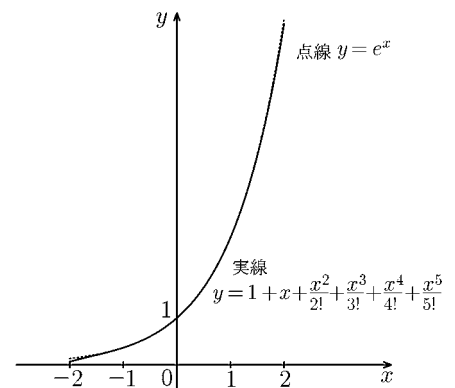
< 3次近似 >



< 4次近似 >



< 5次近似 >



上の図からわかるように 4 次関数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲

で e^x のグラフとほぼ一致している。従って次の近似式が成り立つ。

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ のとき } e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

この近似式で $x=1$ とおくと

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \approx 2.70833$$

となる。実際の値 $e = 2.71828 \cdots$ と比較すると誤差は 0.01 以内である。

< 練習問題 >

問 1 次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log x - \log 3}{x - 3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a - (\cos a)(x - a) + \frac{1}{2}(\sin a)(x - a)^2}{(x - a)^3}$$

問 2 関数 $f(x) = e^x$ の $x = 2$ の近くでのテーラー展開を求めよ。

問 3 次の近似式を求めよ。

(1) $f(x)$ の $x = a$ の近くでの 2 次近似式

(2) $f(x) = \sqrt{x}$ の $x = a$ の近くでの 1 次近似式

(3) $f(x) = \log x$ の $x = a$ の近くでの 1 次近似式

(4) $f(x) = \sin x$ の $x = a$ の近くでの 2 次近似式

問 4 次の 1 次近似値を求めよ。

$$(1) \sqrt{16.1}$$

$$(2) \log 1.05$$

問 5 次のマクローリン展開を求めよ。

$$(1) \sin x$$

$$(2) \cos x$$