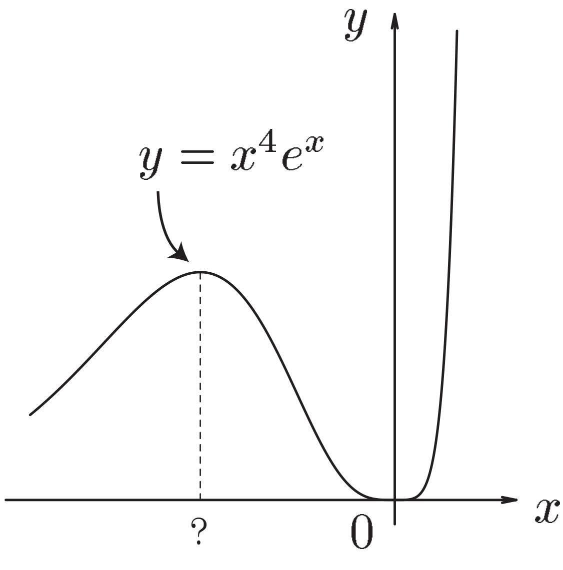
高知工科大学
Kochi University of Technology

数学 1

（2008年度版）



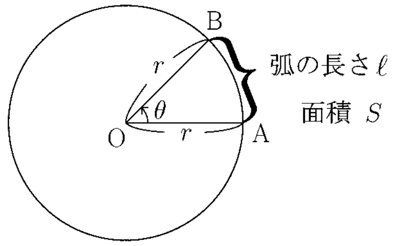
初等関数の微分法

（指数・対数・三角関数の微分，和・差・積・商の微分
合成関数・逆関数の微分法，関数の増減）

井上 昌昭　著

< 弧度法の復習 >

中心角 θ，半径 r の扇形 OAB の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を求めたい。



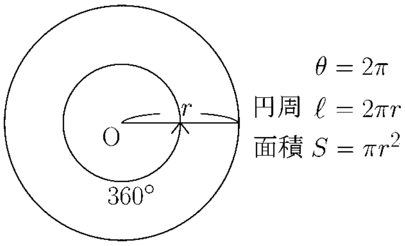
(1) $\theta = 2\pi$(ラジアン)$= 360^\circ$ のときは

ℓ は円周の長さだから

$\ell = 2\pi r$

であり S は円の面積だから

$S = \pi r^2$

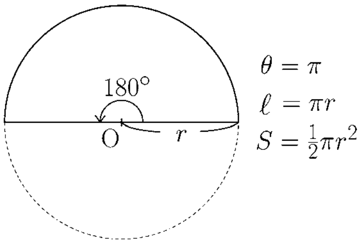


(2) $\theta = \pi$(ラジアン)$= 180^\circ$ のときは

(1) の半分であるから

$\ell = \pi r$

$S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$



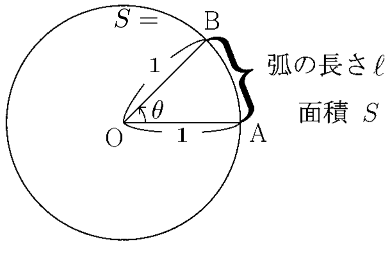
問 1　次の表を完成させよ。

度数法	$180^\circ/\pi$		60°	90°	120°		360°	
弧度法 θ	1	$\frac{\pi}{4}$				π		θ
弧の長さ ℓ		$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$	
面積 S				$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2	

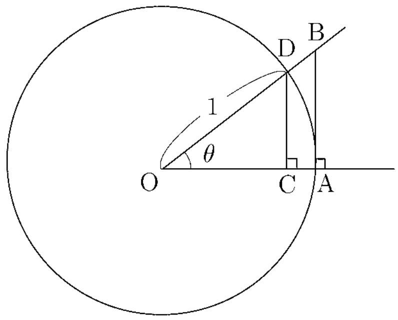
問 2　上の表を参考にして，一般に角度が θ(ラジアン) で，半径が $r = 1$ であるとき，弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を θ を用いて表せ。

$\ell =$

$S =$



< 三角関数の極限 1 >



[定理] $\boxed{\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1}$

[証明] 次の不等式が成り立つ。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\boxed{\sin\theta<\theta<\tan\theta}$ $(*)$

(これは右図のような中心 O，半径 1 の円 (OA=OD=1) で，
CD の長さ $=\sin\theta$，弧 AD の長さ $=\theta$，AB の長さ $=\tan\theta$ であり，
CD< 弧 AD<AB による。この不等式 $(*)$ の厳密な証明はワークブックの
ホームページで「数学小話」の中の「三角関数の極限について」に書いてある。)

$(*)$ 式より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\boxed{\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1} \qquad \cdots\ (**)$$

が成り立つ。また $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ だから

$$\cos(-\theta)=\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$$

より $\cos(-\theta)<\dfrac{\sin(-\theta)}{-\theta}<1$ が成り立つ。従って $(**)$ 式は θ が負のときも成り立つ。

ここで θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\sin\theta}{\theta} & : \ (\theta\neq 0 \text{ のとき})\\ 1 & : \ (\theta=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

と定めると，$(**)$ 式から

$$\boxed{\cos\theta\leqq f(\theta)\leqq 1} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ。よって極限の性質から

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta\leqq\lim_{\theta\to 0}f(\theta)\leqq 1$$

が成り立つ。ここで $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=\cos 0=1$ より $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}f(\theta)=1$ だから $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ (証明終)

＜ 三角関数の極限 2 ＞

前ページの結果より

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

が成り立つ。この極限の応用問題を練習する。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\times\frac{\sin(2x)}{2x} = 2\times 1 = 2$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1^2-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\times\frac{1}{1+\cos 0} = \frac{1}{2}$$

問　次の極限値を求めよ。

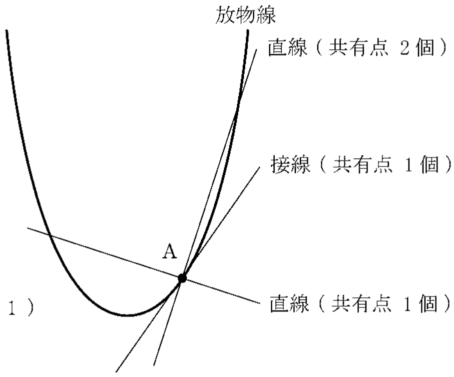
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$

< 接線の傾き 1 >

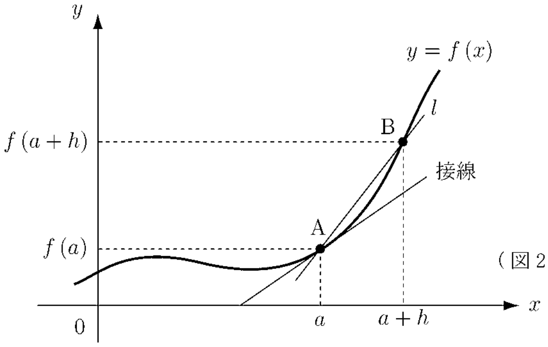
図 1 のように放物線上の 1 点 A を通る直線と放物線との共有点の個数は 1 または 2 である。共有点が 1 点である直線を接線という。



（図 1 ）

図 2 のように，一般のなめらかな曲線 $y = f(x)$ 上の 1 点 A を通る直線を考える。
点 A の近くで，曲線との共有点が 1 点 A だけである直線を，点 A における**接線**という。

この接線の傾きを求めたい。
点 A の x 座標を a とする。また曲線上の点で，x 座標が $a+h$ である点を B とする。



（図 2 ）

このとき点 A の座標は $(a, f(a))$ であり，点 B の座標は $\big(a+h,\ f(a+h)\big)$ となる。
2 点 A,B を通る直線を l とする。点 A を固定し，h を 0 に近づけると点 B は点 A に近づく。このとき直線 l は接線に近づく。すなわち $h \to 0$ のとき $l \to$ 接線 であるから

$$\boxed{\text{接線の傾き} = \lim_{h\to 0} l\ \text{の傾き} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

が得られる。この極限値を <u>曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線の傾き</u> という。

例　$\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{h}$ は <u>曲線 $y = \tan x$ の $x = \frac{\pi}{4}$ における接線の傾き</u> を表す。

問　次の極限値はどんな接線の傾きであるかを示せ。

(1)　$\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{h}$

(2)　$\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-\cos\frac{\pi}{3}}{h}$

(3)　$\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$

(4)　$\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^5-2^5}{h}$

＜ 接線の傾き 2 ＞

3 ページの結果より

① $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1}$, ② $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0}$

が成り立つ。

(注) ① は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h - \sin 0}{h} = 1$ とも書ける。これは $y = \sin x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きが 1 であることを意味する。

② は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - \cos 0}{h} = 0$ とも書ける。これは $y = \cos x$ のグラフの $x = 0$ における接線の傾きが 0 であることを意味する。

例題　曲線 $y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における接線の傾きを求めよ。

解　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos h + \cos\frac{\pi}{3}\sin h - \sin\frac{\pi}{3}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)(\cos h - 1) + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)(\sin h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\times\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\times\frac{\sin h}{h}\right\}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 0 + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\times 1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

問 1　曲線 $y = \sin x$ の $x = a$ における接線の傾きを求めよ。

問 2　曲線 $y = \cos x$ の $x = a$ における接線の傾きを求めよ。

< 導関数 1 >

関数 $f(x)$ の定義域内の値 a に対して，曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線の傾き $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を対応させる関数を，$f(x)$ の**導関数**といい，$\boldsymbol{f'(x)}$で表す。

導関数 $f'(x)$ は次式で定義される。

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \quad \text{（導関数の定義）}$$

例 1　$f(x) = 1$ のとき

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

例 2　$f(x) = x^3$ の導関数を定義に従って求める。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$$

問　$f(x)$ が次の各場合に，導関数の定義に従って (極限の計算で) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x) = 2$

$f'(x) =$

(2)　$f(x) = x$

$f'(x) =$

(3)　$f(x) = x^2$

$f'(x) =$

＜ 導関数 2 ＞

$(a+b)^n$ の展開公式の係数を右のように並べたものをパスカルの三角形という。

$(a+b)^0 = 1$ ……………… 1

$(a+b)^1 = a + b$ ……………… 1　1

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ……………… 1　2　1

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ……………… 1　3　3　1

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ ……………… 1　4　6　4　1

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ……………… 1　5　10　10　5　1

問 1　$f(x)$ が次の各場合に，導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ にしたがって，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x) = x^4$

$f'(x) =$

(2)　$f(x) = x^5$

$f'(x) =$

問 2　自然数 n に対し $f(x) = x^n$ とする。問 1 の結果から $f'(x)$ を類推せよ。

< 導関数 3 >

例　$f(x)=\sqrt{x}$ の導関数を定義に従って求める。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\times\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(注)　関数 $f(x)$ からその関数 $f'(x)$ を求めることを、$f(x)$ を**微分する**という。

問　次の関数を、定義に従って微分せよ。

(1)　$f(x)=\sqrt{x+1}$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$

(3)　$f(x)=\sin x$

(4)　$f(x)=\cos x$

＜導関数 4 ＞

例　7 ページで類推したように $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ である。これを

$$(*) \quad \boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

と略記する。

また 2 つの微分可能な関数 $f(x), g(x)$ および定数 k に対して次の式が成立する。

1. $\{kf(x)\}' = kf'(x)$　　　(k は定数)
2. $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$
3. $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

＜ 1 の証明 ＞

$$\{kf(x)\}' = \lim_{h\to 0} \frac{\{kf(x+h)\} - \{kf(x)\}}{h} = \lim_{h\to 0} k \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \times f'(x)$$

＜ 2 の証明 ＞

$$\begin{aligned}\{f(x) + g(x)\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

問 1　公式 3 を証明せよ。

例　$\{4x^3 + 5\}' = \left(4x^3\right)' + (5)' = 4 \times \left(x^3\right)' + 0 = 4 \times 3x^2 = 12x^2$

(注)　定数を微分すると 0 になる。

問　2　　公式 $(*)$ と 1〜3 を用いて次の関数を微分せよ。

(1)　$x^5 + 4$

(2)　$2x^6 - 3x^3$

(3)　$(x-1)^2$

(4)　$(x+1)(x^2 - x)$

< 積の微分 1 >

$f(x), g(x)$ が共に微分可能であるとき, 次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\{f(x) \times g(x)\}' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)} \quad \text{(積の微分)}$$

< 証明 >

$$\{f(x) \times g(x)\}' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \times g(x+h) + f(x) \times \left\{ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \right]$$

$$= f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

(証明終)

例 1 $\left\{x^3 \sin x\right\}' = \left(x^3\right)' \times \sin x + x^3 \times (\sin x)'$

$$= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$

例 2 $\left\{(x+1)^2\right\}' = \left\{(x+1)(x+1)\right\}' = (x+1)' \times (x+1) + (x+1) \times (x+1)' = 2(x+1)$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x-1)\sin x$　　(2) $\left(x^2+1\right)\cos x$

(3) $\sin x \cos x$　　(4) $(x+1)^4$

< 積の微分 2 >

問 1　8 ページ例の結果より $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である。これと積の微分を用いて

次式を微分せよ。ただし k は定数とする。

(1) $x\sqrt{x}$

(2) $k\sqrt{x}$

問 2　積の微分公式 $\big(f(x) \times g(x)\big)' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$ を用いて,

定数倍の微分公式 $\big(k \times f(x)\big)' = k \times f'(x)$ を証明せよ。ここで k は定数とする。

問 3　$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ がともに微分可能であるとき，3 つの積の導関数を

$f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を用いて表せ。

$\big(f(x)g(x)h(x)\big)' =$

< 商の微分 >

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の商の導関数について, 次の公式が成り立つ。

1. $\boxed{\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

2. $\boxed{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

<1 の証明 >

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \qquad \text{(証明終)}$$

問 1 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$ であることと上記 1 と積の微分公式を用いて 2 を証明せよ。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = -\dfrac{(x^3)'}{(x^3)^2} = -\dfrac{3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

(2) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = \dfrac{(x^2)'\times(x-1)-x^2\times(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1)-x^2\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $\dfrac{1}{x^2}$

(2) $\dfrac{1}{x^4}$

(3) $\dfrac{x^3}{x+1}$

(4) $\dfrac{x}{\sin x}$

< 三角関数の微分 >

次が成り立つ.

1. $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

2. $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

3. $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

問 1　1 と 2 の結果と商の微分公式を用いて，3 を証明せよ。

問 2　次の関数を微分せよ.

(1) $3\sin x + 4\cos x$

(2) $-3\cos x + 5\tan x$

(3) $(x + \sin x)\cos x$

(4) $\sin^2 x$

(5) $\cos^2 x$

(6) $x\tan x$

(7) $\dfrac{\sin x}{x}$

(8) $\dfrac{\cos x}{x}$

問 3　次の導関数を計算し，結果を $\sin x$ または $\cos x$ を用いてあらわせ。

(1) $\mathrm{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$

(2) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(3) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

< 微分の練習 1 >

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$

問 2　次の関数を導関数の定義に従って微分せよ。

(1) $f(x)=4$

(2) $f(x)=x^3$

(3) $f(x)=\sqrt{3x}$

(4) $f(x)=\dfrac{5}{x}$

(5) $f(x)=2\sin x$

(6) $f(x)=3\cos x$

問 3　次の関数を微分せよ。

(1) $4x^3-6x^5-18$　　(2) $\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

(3) $5\sin x+6\cos x$　　(4) $3\sin x-4\tan x$

(5) $x^2\sin x$　　(6) $x^3\cos x$

(7) $\sin x\tan x$　　(8) $\dfrac{x}{x+1}$

(9) $x^4\tan x$　　(10) $\dfrac{\sin x}{x^2}$

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

等の記号で表す (全て同じ意味である)。$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は，変数が x である関数の導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。変数が x 以外の文字でも同様である。例えば変数 u の関数 $y = f(u)$ の導関数を

$$y' = f'(u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} = \frac{dy}{du} = \frac{df}{du} = \frac{d}{du} f(u)$$

等の記号で表す。

例 1

$y = x^5 - 3x^2$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = 5x^4 - 6x$

$s = u^5 - 3u^2$ のとき　$\dfrac{ds}{du} = 5u^4 - 6u$

$k = t^5 - 3t^2$ のとき　$\dfrac{dk}{dt} = 5t^4 - 6t$

例 2

$\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$

$\dfrac{d}{du} \sin u = \cos u$

$\dfrac{d}{dt} \sin t = \cos t$

問 1　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^3 - 4x^2 + 5$　$\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos u$　$\dfrac{dy}{du} =$

(3) $\ell = 3t^2 - 2t$　$\dfrac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$　$\dfrac{dS}{dr} =$

(5) $V = \dfrac{4}{3} \pi r^3$　$\dfrac{dV}{dr} =$

問 2　次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx} x^5$

(2) $\dfrac{d}{dt} (t^7 - 5t^4)$

(3) $\dfrac{d}{du} \left(\sqrt{u}\right)$

(4) $\dfrac{d}{dt} \cos t$

(5) $\dfrac{d}{du} \tan u$

(6) $\dfrac{d}{du} \sin u \cos u$

< 微分と極限 1 >

関数 $f(x)$ の導関数の極限による定義式は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

である。変数が x でなく，他の文字でも同様である。

$$f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$f'(u) = \frac{d}{du}f(u) = \lim_{h\to 0}\frac{f(u+h)-f(u)}{h}$$

例

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^4-t^4}{h} = \frac{d}{dt}(t^4) = 4t^3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(u+h)-\sin u}{h} = \frac{d}{du}(\sin u) = \cos u$$

問　次の極限値を微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(t+h)-\sin t}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(u+h)-\cos u}{h}$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\tan(r+h)-\tan r}{h}$

< 微分と極限 2 >

関数 $f(x)$ の導関数の極限による定義式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\ell\to 0}\frac{f(x+\ell)-f(x)}{\ell}$$

ここで，0 へ収束する変数は h だけでなく ℓ でも良いし，他の文字を使っても良い。

例

(1) $\displaystyle\lim_{\ell\to 0}\frac{\sin(x+\ell)-\sin x}{\ell} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(t+h)-\cos t}{h} = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$

(3) $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{\tan(u+r)-\tan u}{r} = \frac{d}{du}(\tan u) = \frac{1}{\cos^2 u}$

問　次の極限値を微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{\ell\to 0}\frac{\cos(x+\ell)-\cos x}{\ell}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(u+h)-\sin u}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{(u+r)^4-u^4}{r}$

(4) $\displaystyle\lim_{v\to 0}\frac{(t+v)^6-t^6}{v}$

(5) $\displaystyle\lim_{\ell\to 0}\frac{\tan(t+\ell)-\tan t}{\ell}$

< 合成関数の微分 1 >

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数 $f(g(x))$ の導関数は $u = g(x)$ とおくと

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{\frac{d}{du}f(u)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}}$$

で計算される。

< 証明 >

$u = g(x)$, $g(x+h) - g(x) = \ell$ とおくと

$h \to 0$ のとき $\ell \to 0$ であり，$g(x+h) = g(x) + \ell = u + \ell$ より

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(u+\ell) - f(u)}{\ell} \times \frac{\ell}{h}$$

$$= \lim_{\ell\to 0}\frac{f(u+\ell) - f(u)}{\ell} \times \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \left\{\frac{d}{du}f(u)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}$$

(証明終)

例 $\sin(x^3)$ の導関数を求めたい。$u = x^3$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\sin(x^3) = \left\{\frac{d}{du}\sin u\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}x^3\right\} = \cos(u) \times 3x^2 = 3x^2\cos(x^3)$$

問 次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^4)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\tan(x^5)$

< 合成関数の微分 2 >

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{\frac{d}{du}f(u)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}} \qquad \Big(\text{ただし } u = g(x)\Big)$$

例 1　$\sin(4x+3)$ の導関数を求めたい。$u = 4x+3$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3) = \left\{\frac{d}{du}\sin u\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(4x+3)\right\} = \cos(u) \times 4$$

$$= 4\cos u = 4\cos(4x+3)$$

例 2　$\cos(x^2+x^3)$ の導関数を求めたい。$u = x^2+x^3$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\cos(x^2+x^3) = \left\{\frac{d}{du}\cos u\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(x^2+x^3)\right\} = -\sin(u) \times (2x+3x^2)$$

$$= -(2x+3x^2)\sin u = -(2x+3x^2)\sin(x^2+x^3)$$

問　次の関数を微分せよ。

(1) $\sin(5x)$

(2) $\cos(7x)$

(3) $\sin(4x-5)$

(4) $\cos(2x+3)$

(5) $\tan(8x-7)$

(6) $\sin(x^3+2x^4)$

< 合成関数の微分 3 >

合成関数 $f(g(x))$ の微分公式

$$(*)\qquad \boxed{\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left\{\frac{d}{du}f(u)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}} \qquad (\text{ただし } u = g(x))$$

は $y = f(g(x))$, 　$u = g(x)$ とおくと $y = f(u)$ より

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{dy}{dx} \quad , \qquad \frac{d}{du}f(u) = \frac{dy}{du} \quad , \qquad \frac{d}{dx}g(x) = \frac{du}{dx}$$

と書ける。従って，公式 $(*)$ は

$$(*)' \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

と書きなおせる。この $(*)'$ 式の方がおぼえやすい。

例　$y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。$u = x^3 + 5x^2$ とおくと，$y = u^7$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{\frac{d}{du}y\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}u\right\} = \left\{\frac{d}{du}(u^7)\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(x^3 + 5x^2)\right\} = (7u^6) \times (3x^2 + 10x)$$

$$= 7(3x^2 + 10x)u^6 = 7(3x^2 + 10x)(x^3 + 5x^2)^6$$

問　次の関数を微分せよ。

(1) $y = (3x + 4)^5$　　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = (4x - 5)^{10}$　　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = (x^2 + 3x)^6$　　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(4) $y = \cos(x^2 - 3x)$　　　$\dfrac{dy}{dx} =$

< 微分の練習 2 >

問 1　次の導関数を求めよ。ただし n は自然数である。

(1) $\dfrac{d}{dx}(4x^5 - 7x^9 + 12)$　　(2) $\dfrac{d}{dt}(4t^2 - 8t + 5)$

(3) $\dfrac{d}{du}(\sin u)$　　(4) $\dfrac{d}{du}(\cos u)$

(5) $\dfrac{d}{du}(\tan u)$　　(6) $\dfrac{d}{du}(u^n)$

問 2　合成関数の微分法を用いて次の導関数を求めよ。

(1) $\sin(x^2)$　　(2) $\cos(x^3)$

(3) $\tan(x^4)$　　(4) $\sin(4x)$

(5) $\cos(5x)$　　(6) $\tan(6x)$

(7) $\sin(2x-3)$　　(8) $\cos(3x+5)$

(9) $\tan(7x+6)$　　(10) $\sin(x^2+2x)$

(11) $(3x+4)^6$　　(12) $(4x-3)^7$

(13) $(5x+8)^{10}$　　(14) $(x^2-3x)^5$

(15) $(1+\sin x)^8$　　(16) $(2+\cos x)^9$

問 3　合成関数の微分法と積の微分法を用いて，次の関数を微分せよ。

(1) $x^2\sin(4x)$　　(2) $x^3\cos(5x)$　　(3) $\sin(2x)\cos(3x)$

問 4　3 つの関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ に対し，次式の導関数を求めよ。

(1) $f(x)\{g(x)-h(x)\}$　　(2) $f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$　　(3) $\dfrac{f(x)h(x)}{g(x)}$

< ネピアの数 >

a を 1 でない正の数とするとき，対数関数 $\log_a x$ の導関数を求めたい。導関数の定義

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ に従って計算する。

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)$$

ここで $\dfrac{h}{x} = k$ とおくと $h \to 0$ のとき $k \to 0$ より

$$(\log_a x)' = \lim_{k \to 0} \frac{1}{xk} \log_a(1+k) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

となる。そこで $k \to 0$ のときの $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の極限を調べてみる。k に 0.1，0.01，0.001，0.0001，$\cdots$ および -0.1，-0.01，-0.001，-0.0001，$\cdots$ を代入して，$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値を計算すると，次の表が得られる。

k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$		k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$
0.1	$2.59342\cdots$		-0.1	$2.867971\cdots$
0.01	$2.704813\cdots$		-0.01	$2.731999\cdots$
0.001	$2.716923\cdots$		-0.001	$2.719642\cdots$
0.0001	$2.718145\cdots$		-0.0001	$2.718417\cdots$
0.00001	$2.718268\cdots$		-0.00001	$2.718295\cdots$

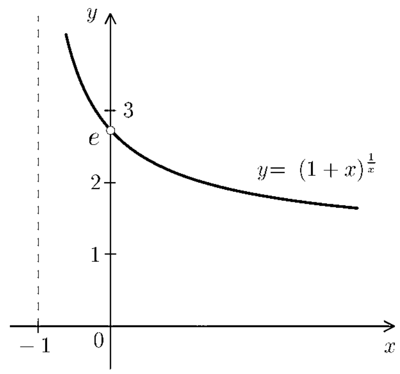
この表から予想されるように，$k \to 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に近づく。この極限値を $\boldsymbol{e}$ で表す。

$$e = \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$$

$\boldsymbol{e}$ は無理数で，その値は

$$\boldsymbol{e = 2.71828182845 \cdots}$$

であることが知られている。$\boldsymbol{e}$ を**ネピアの数**または**自然対数の底**という。右図は $\boldsymbol{y = (1+x)^{\frac{1}{x}}}$ のグラフである。



問　次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$

(2) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n$

(3) $\lim_{k \to 0} \dfrac{1}{k} \log_a(1+k)$

< 対数関数の導関数 >

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ に対し，$x=a$ を代入した値 $f'(a)$ を「$x=a$ における**微分係数**」という。

例　関数 $f(x)=\log_{10}x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。定義から

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_{10}(2+h)-\log_{10}2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(\frac{2+h}{2}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

ここで $\dfrac{h}{2}=k$ とおくと，$h\to 0$ のとき $k\to 0$ より

$$f'(2)=\lim_{k\to 0}\frac{1}{2k}\log_{10}(1+k)=\lim_{k\to 0}\frac{1}{2}\log_{10}(1+k)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}\log_{10}e$$

(注) ここで前のページの結果 $\displaystyle\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$ を使った。

問 1　例と同じ関数 $f(x)=\log_{10}x$ の微分係数 $f'(3)$ と導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。

(1) $f'(3)=$

(2) $f'(x)=$

問 2　a を 1 でない正の数とする。$f(x)=\log_a x$ の導関数 $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。

$f'(x)=$

< 自然対数 >

問 1　前ページの問の結果を用いて次の対数関数の導関数を求めよ。(ただし $a > 0,\ a \neq 1$)

(1) $(\log_{10} x)' =$　　(2) $(\log_a x)' =$

問 2　底が e(ネピアの数 ≒ 2.718) である対数関数 $\log_e x$ の導関数を求め，できるだけ簡単にせよ。

(答) $(\log_e x)' =$

底がネピアの数 e である対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼び，底を省略する。

$$\boxed{\log_e x = \log x} \qquad \text{(自然対数)}$$

今後底を省略した対数 $\log x$ は必ず自然対数を意味する。

(注) 常用対数 $\log_{10} x$ と区別するため，自然対数を $\ln x$ と書くこともある。

例　$\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}$　　$\ln\sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$

$\log\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e(e^{-2}) = -2$　　$\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \log_e\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -2$

問 3　次の自然対数の値を求めよ。

(1) $\log e$　　(2) $\log(\sqrt[3]{e})$　　(3) $\log\left(\dfrac{1}{e}\right)$　　(4) $\log 1$

(5) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$　　(6) $\ln(\sqrt[4]{e})$　　(7) $\ln(e)$　　(8) $\ln(e\sqrt{e})$

問 4　問 2 の結果を使って自然対数の導関数を求めよ。

$(\log x)' =$

$(\ln x)' =$

問 5　$y = \log x$ のグラフを描け。

$<\log f(x)$ の導関数 $>$

例　関数 $y=\log(x^2+3x+4)$ の導関数を求めたい。

$u=x^2+3x+4$　とおくと　$y=\log u$　　となる。

合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}(\log u)\times\frac{d}{dx}(x^2+3x+4)=(\log u)'\times(x^2+3x+4)'$$

$$=\frac{1}{u}\times(2x+3)=\frac{1}{x^2+3x+4}\times(2x+3)=\frac{2x+3}{x^2+3x+4}$$

問 1　例にならって，次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y=\log(x^3+2x-5)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log(1+\sin x)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log(5-\cos x)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

問 2　上の結果から，一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し合成関数 $y=\log\big(f(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)　$\boxed{\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'=\qquad\qquad}$

例 2　$\Big(\log(\cos x)\Big)' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

問 3　問 2 の結果を用いて次の導関数を求めよ。

(1)　$\log(x^2+2x)$　　(2)　$\log(x^6+3x^4)$　　(3)　$\log(\sin x)$

＜指数関数の導関数 1＞

22 ページの結果から

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e} \qquad \cdots ①$$

である。この極限式①より

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1} \qquad \cdots ②$$

が導かれる。

＜②式の証明の概略＞

①式より　$h \fallingdotseq 0$ のとき $e \fallingdotseq (1+h)^{\frac{1}{h}}$

である。両辺を h 乗すると

$$h \fallingdotseq 0 \text{ のとき } e^h \fallingdotseq 1+h$$

だから　$h \fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{e^h-1}{h} \fallingdotseq 1$

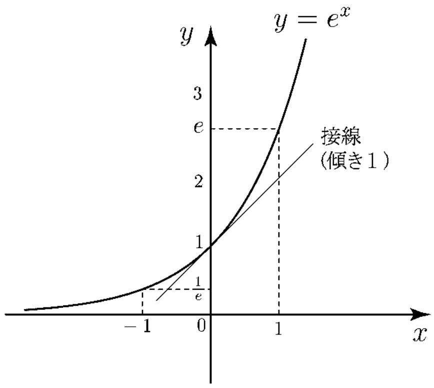
より②式が導かれる。

(注)　指数関数 $f(x)=e^x$ に対し，

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-e^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

より，曲線 $y=e^x$ の $x=0$ における接線の

傾きが $f'(0)=1$ であることが②式からわかる。



例　$f(x)=e^x$ に対し

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2+h}-e^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^2\times e^h-e^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}e^2\times\frac{e^h-1}{h}=e^2\times 1=e^2$$

問　$f(x)=e^x$ に対し，微分係数 $f'(3)$ および導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f'(3)=$

(2) $f'(x)=$

< 指数関数の導関数 2 >

前のページの結果より，ネピアの数 e を底とする指数関数 $f(x) = e^x$ の導関数は
$f'(x) = e^x$ である。すなわち

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x}$$

このように微分しても変わらない関数は e^x の定数倍だけである。そこでこの指数関数を特に $e^x = \mathrm{EXP}(x)$ という記号で表すことがある。

例 1　$y = e^{5x}$ の導関数を求めたい。$u = 5x$ とおくと $y = e^u$ より合成関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{\frac{d}{du}e^u\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(5x)\right\} = e^u \times 5 = 5e^{5x}$$

例 2　$y = e^{x^2}$ の導関数を求めたい。$u = x^2$ とおくと $y = e^u$ より合成関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left\{\frac{d}{du}e^u\right\} \times \left\{\frac{d}{dx}(x^2)\right\} = e^u \times 2x = 2xe^{x^2}$$

問 1　次の関数を微分せよ。ただし a，K は定数で $a > 0$, $a \neq 1$ とする。

(1) $y = e^{2x}$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = e^{-3x}$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = e^{2x-1}$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(4) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(5) $y = e^{Kx}$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(6) $y = e^{x\log a}$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

問 2　$a > 0,\ a \neq 1$ とする。このとき等式 $a = e^{\log a}$ が成立する。ただし $\log a = \log_e a$ は自然対数である。この等式を用いて，一般の指数関数 $y = a^x$ の導関数を求めよ。

< 逆関数の微分 1 >

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数は次式で与えられる。

$$(*) \quad \boxed{\frac{d}{dx}\{f^{-1}(x)\} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\{f(y)\}}} \qquad (\text{ただし } y = f^{-1}(x))$$

＜証明＞

$y = f^{-1}(x),\ \ y + \ell = f^{-1}(x+h)$ とおくと

$f(y) = x,\ \ f(y+\ell) = x + h$ であり

$h \to 0$ のとき $\ell = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x) \to 0$ だから

$$\frac{d}{dx}\{f^{-1}(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} = \lim_{\ell\to 0}\frac{y+\ell-y}{f(y+\ell)-f(y)}$$

$$= \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{\frac{f(y+\ell)-f(y)}{\ell}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\{f(y)\}} \qquad (\text{証明終})$$

(注) $y = f^{-1}(x)$ とおくと $x = f(y)$ であり $\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x) = \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d}{dy}f(y) = \dfrac{dx}{dy}$ より上の

公式で (∗) は次式 (∗∗) のように書ける。この (∗∗) 式の方が覚えやすい 。

$$(**) \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}} \qquad (\text{逆関数の微分公式})$$

例 $y = \sqrt[3]{x}$ の導関数を求めたい。$x = y^3$ より

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}x} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^3)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

問 次の導関数を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$　　　　(2) $y = \sqrt[4]{x}$

< 逆関数の微分 2 >

例　逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。ここで定義域は $-1 \leqq x \leqq 1$，値域は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$x = \sin y$ より

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}x} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\sin y} = \frac{1}{\cos y}$$

ここで $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ で，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $\cos y \geqq 0$ より

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

だから

$$(\text{答})\ \underline{\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

問 1　$y = \cos^{-1} x$ の導関数を求めよ。ただし $\cos^{-1} x$ の定義域は $-1 \leqq x \leqq 1$，値域は $0 \leqq y \leqq \pi$ とする。

$\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x =$

問 2　$y = \tan^{-1} x$ の導関数求めよ。ただし $\tan^{-1} x$ の定義域は実数全体，値域は $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

$\dfrac{d}{dy}\tan^{-1} x$

< 対数微分法 1 >

一般の関数 $y = f(x)$ に対し，自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (25 ページの結果より)

$$\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから，} \frac{d}{dx}\log y = \frac{y'}{y}$$

例　指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x\log 2$$

である。両辺を x で微分すると $\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x\log 2)$ より

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

(注)　両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1　$y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 2　$a > 0$ $(a \neq 1)$ に対し、$y = a^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 3　$y = x^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

< 対数微分法 2 >

例　$y = x^{\frac{3}{2}}$ $\left(= \sqrt{x^3}\right)$ の導関数を対数微分法で求める。

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

両辺の自然対数をとる。

$$\log y = \log\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

より

$$y' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \ \left(= \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

であるから

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

問 1　$y = x^{\frac{4}{3}}$ $\left(= \sqrt[3]{x^4}\right)$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答)　$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' =$

問 2　一般の実数 r に対し，関数 $y = x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答)　$(x^r)' =$

$<x^r$ の導関数 $>$

前のページより任意の実数 r に対し，

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}}$$

が成り立つ。

例 1　$y = \sqrt[3]{x^5}$ の導関数を求めたい。分数指数の定義 $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}}$ から

$$\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

問 1　次の導関数を求め，結果を根号 ($\sqrt{}$, $\sqrt[n]{}$ 等) で表せ。

(1) $\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' =$　　(2) $\left(\sqrt[5]{x^7}\right)' =$　　(3) $\left(\sqrt{x^3}\right)' =$

例 2　$y = \dfrac{1}{x^2}$ の導関数を求めたい。負の指数の定義 $\boxed{\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}}$ から

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2 \times \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$$

問 2　次の導関数を求め，結果を分数の形にせよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' =$　　(2) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' =$　　(3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

例 3　$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

問 3　次の導関数を求め，結果を例 3 のように根号で表せ。

(1) $(\sqrt[4]{x})' =$　　(2) $\left(\sqrt[5]{x^4}\right)' =$　　(3) $(\sqrt{x})' =$

例 4　$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}+1}} = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

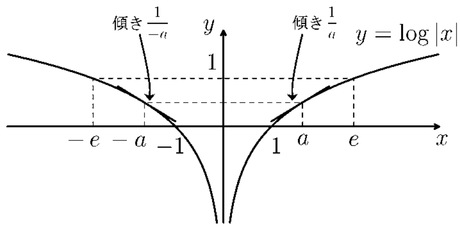
(注)　$\sqrt[3]{x^4} = x\sqrt[3]{x}$

問 4　次の導関数を求め，結果を例 4 のように根号で表せ。

(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'$　　(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'$　　(3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

$<\ \log|x|$ の導関数 $>$

例 1　関数 $y=\log|x|$ を考える。



絶対値の定義から，$a>0$ に対し

$$\log|-a|=\log a=\log|a|$$

より，$y=\log|x|$ のグラフは右図のように y 軸対称となる。

この導関数は

(1) $x>0$ のとき $|x|=x$ より $y'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

(2) $x<0$ のとき $|x|=-x$ より $y'=(\log|x|)'=(\log(-x))'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$

(1), (2) より $x\neq 0$ のとき

$$\boxed{(\log|x|)'=\frac{1}{x}}$$ となる。

例 2　関数 $y=\log|\cos x|$ を微分したい。

$u=\cos x$ とおくと $y=\log|u|$

より合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\log|u|)'\times(\cos x)'=\frac{1}{u}\times(-\sin x)=\frac{1}{\cos x}\times(-\sin x)$$
$$=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

問　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\log|\tan x|$ ，$\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log|x^2+3x|$ ，$\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log|f(x)|$ ，$\dfrac{dy}{dx}=$

< 微分の練習 3 >

問 1　次の極限値を求めよ。ただし e は自然対数の底であり，$\log x$ は自然対数である。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\log(1+k)$　　(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$

問 2　$f(x)=\log_2 x$ の導関数 $f'(x)$ を，導関数の定義に従って求めよ。

問 3　次の関数を微分せよ。

(1) $2e^x$　　(2) $3\log x$

(3) $\sqrt[3]{x}$　　(4) $\dfrac{1}{x^3}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　(6) e^{4x+1}

(7) $\log(5x)$　　(8) $e^{-\frac{x^2}{2}}$

(9) $\log\left(x^3\right)$　　(10) $\log|4x|$

(11) $\log|\sin x|$　　(12) $x\sqrt{x}$

(13) $e^x\sin x$　　(14) $e^{3x}\cos(4x)$

(15) xe^{-x}　　(16) $x^2\log|x|$

(17) $y=\sin^{-1}x$　　(18) $y=\tan^{-1}x$

問 4　次の関数を対数微分法を用いて微分せよ。

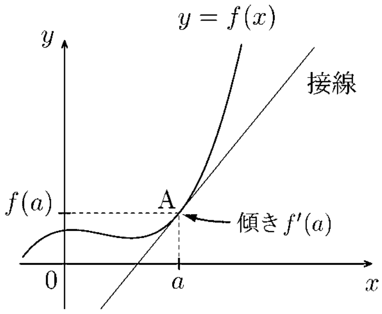
(1) $y=4^x$　　(2) $y=(x+1)^x$

＜ 微分係数と傾き ＞

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}\big(a,\ f(a)\big)$ における接線の傾きを表す。



(図1)

問 1　$f(x)=\sin x$ の導関数および次の微分係数を求め，図 2 の $\boxed{}$ 内に傾きを記入せよ。

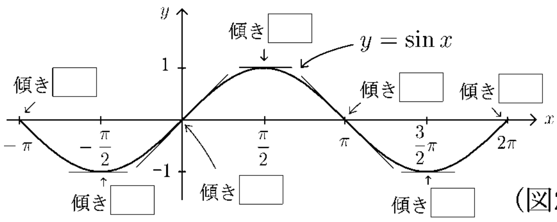
$f'(x)=$

$f'(-\pi)=$　　　　$f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=$

$f'(0)=$　　　　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$

$f'(\pi)=$　　　　$f'\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=$

$f'(2\pi)=$



(図2)

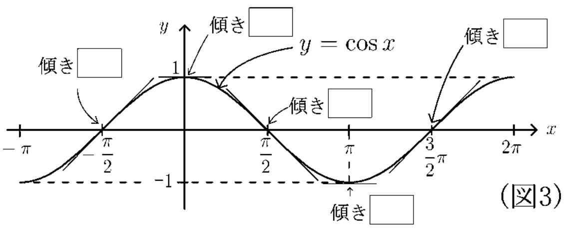
問 2　$f(x)=\cos x$ の導関数および次の微分係数を求め，図 3 の $\boxed{}$ 内に傾きを記入せよ。

$f'(x)=$

$f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=$　　　　$f'(0)=$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$　　　　$f'(\pi)=$

$f'\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=$



(図3)

問 3　$f(x)=e^x$ とする。

(1)　$f^{-1}(x)$ を求めよ。　　$f^{-1}(x)=$

(2)　$g(x)=f^{-1}(x)$ とする。以下の導関数および微分係数を求めよ。

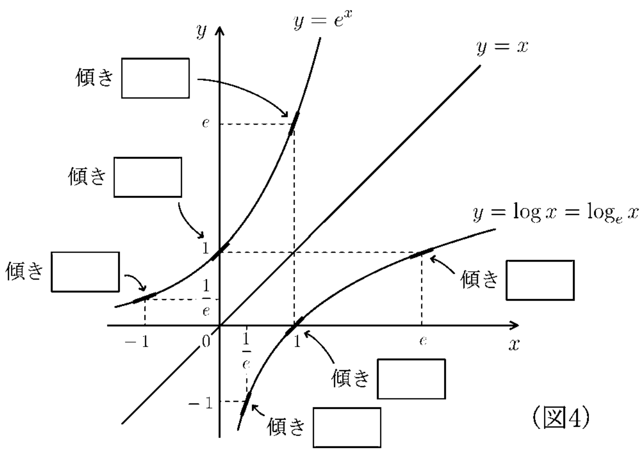
$f'(x)=$　　　　$g'(x)=$

$f'(-1)=$　　　　$g'\left(\dfrac{1}{e}\right)=$

$f'(0)=$　　　　$g'(1)=$

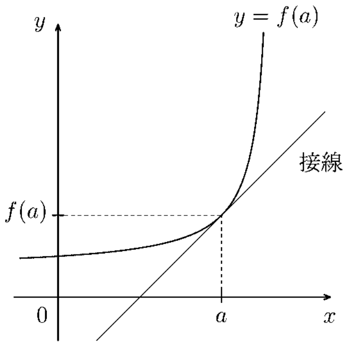
$f'(1)=$　　　　$g'(e)=$

(3)　図 4 の $\boxed{}$ 内に傾きを入れよ。



(図4)

＜ 接線の方程式 ＞



$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の方程式は

$$\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)} \quad \text{(接線の方程式)}$$

である。

例 1 $f(x) = e^{2x}$ のとき $f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2e^0 = 2$

よって $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線の方程式は

$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x + 1$ より $\underline{y = 2x + 1}$ (接線)

例 2 $f(x) = \log x$ のとき $f(e) = \log e = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$

よって $y = \log x$ の $x = e$ における接線の方程式は

$y = f'(e)(x - e) + f(e) = \dfrac{1}{e}(x - e) + 1 = \dfrac{1}{e}x$ より $\underline{y = \dfrac{1}{e}x}$ (接線)

例 3 $f(x) = \cos x$ のとき $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$f'(x) = -\sin x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

よって $y = \cos x$ の $x = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式は

$y = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \times \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 0$ より $\underline{y = -x + \dfrac{\pi}{2}}$ (接線)

例 4 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

よって $y = \sqrt{x}$ の $x = 1$ における接線の方程式は

$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \dfrac{1}{2}(x - 1) + 1 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ より $\underline{y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$ (接線)

問　以下の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 0$ における接線

(2) $y = \log x$ の $x = 1$ における接線

(3) $y = \sin x$ の $x = 0$ における接線

(4) $y = \sqrt{x}$ の $x = 4$ における接線

(5) $y = \dfrac{1}{x}$ の $x = 1$ における接線

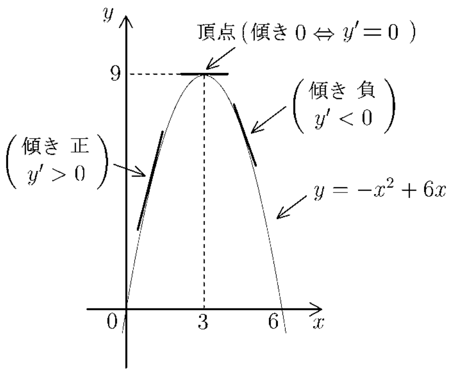
< 関数の増減 1 >

定数 a, b に対して，　$a \leqq x \leqq b$ である実数 x の集合を $\{x : a \leqq x \leqq b\}$ という記号で書くことにする。

実数の集合

$$\{x : a \leqq x \leqq b\}, \quad \{x : a < x < b\}, \quad \{x : x \geqq a\}, \quad \{x : x < b\}$$

などを，一般に**区間**という。



例　2 次関数 $y = -x^2 + 6x$ のグラフは右図のような放物線である。導関数は

$$y' = -2x + 6 = -2(x - 3)$$

であるから，y' の符号は

$$y' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$$

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$y' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3$$

となり，次のことがわかる。

$y' > 0$ ⇒ 傾き正 ⇒ この区間 $(x < 3)$ で単調増加 (グラフは右上がり ↗)

$y' < 0$ ⇒ 傾き負 ⇒ この区間 $(x > 3)$ で単調減少 (グラフは右下がり ↘)

$y' = 0$ ⇒ 傾き 0 ⇒ 頂点 $(x = 3$ のとき $y = 9)$

以上の結果をまとめたのが右の表である。

このような表を**増減表**という。このような増減表を作れば頂点の座標 (3, 9) がわかる。

x	$x < 3$	3	$3 < x$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	9	↘

問　この関数を微分し，増減表を作り，頂点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x + 3$

$y' =$

頂点 (　　,　　)

x			
y'			
y			

(2) $y = -2x^2 + 8x - 1$

$y' =$

頂点 (　　,　　)

x			
y'			
y			

< 関数の増減 2 >

関数 $y = f(x)$ に対し，その増減は $y' = f'(x)$ の符号によって次のようになる。

> $f'(x) > 0$ である区間では $y = f(x)$ は増加 (↗) $f'(x) < 0$ である区間では $y = f(x)$ は減少 (↘)

例　$y = x^3 - 3x$ の増減を調べる。導関数は

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

である。$y' = 0$ とおくと $x = \pm 1$ であるから，y' の符号は

$y' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$ または $1 < x \quad \Leftrightarrow \quad y$ は増加 (↗)

$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$

$y' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad y$ は減少 (↘)

となり

$x = 1$ のとき $y = 1^3 - 3 \times 1 = -2$

$x = -1$ のとき $y = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2$

である。以上をまとめると右の表のようになる。

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

なお右の増減表で x 欄は右のほうが x の値が大きい範囲であるように書く。その場合 x の範囲 $(x < -1,\ -1 < x < 1,\ 1 < x)$ を略して $\boxed{\cdots}$ と書いても良い。

問　次の関数の導関数を求め，増減表を作れ。

(1) $y = -x^3 + 3x^2$

$y' =$

x					
y'					
y					

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$y' =$

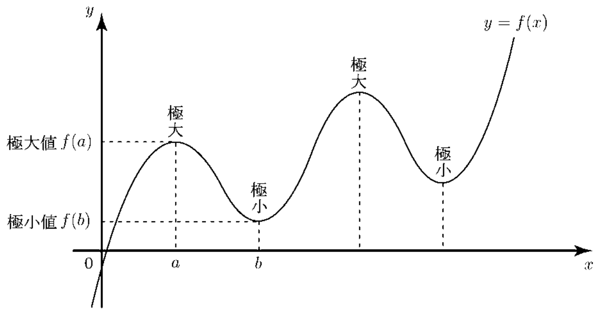
x					
y'					
y					

< 極大・極小 1 >

関数 $f(x)$ について，a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**になるといい，$f(a)$ を**極大値**という。



また，b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$

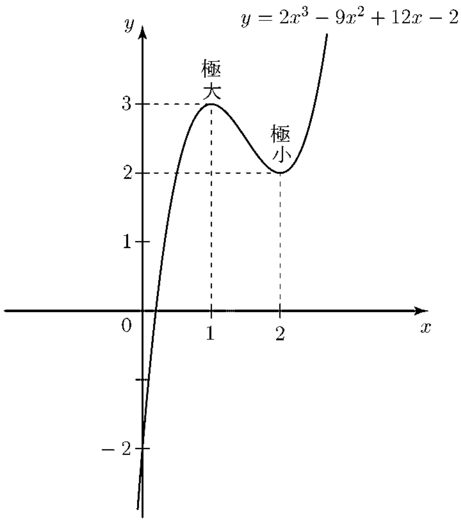
が成り立つとき，$f(x)$ は $x = b$ で**極小**になるといい，$f(b)$ を**極小値**という。
極大値と極小値をまとめて**極値**という。

例　3 次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには，増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき $y' = 0$ となる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$
		極大		極小	



増減表より

$x = 1$ のとき　極大値 $y = 3$

$x = 2$ のとき　極小値 $y = 2$

であることがわかる。

(注)　上の増減表の x の欄の $\cdots$ は以下の意味である。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$

$\Longleftrightarrow$

x	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x$

今後はこのように x の範囲を省略してよい。

問 1　3 次関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の増減表を作り，極値を調べよ。

$x =$ 　　　のとき極大値 $y =$

$x =$ 　　　のとき極小値 $y =$

x	
y'	
y	

< 極大・極小 2 >

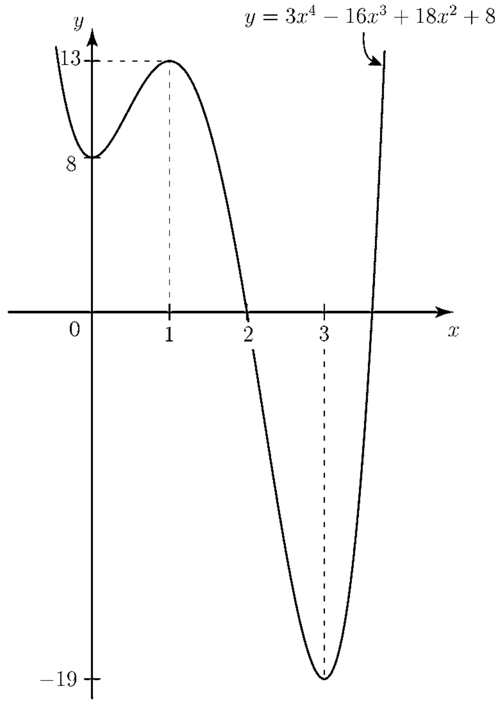
例　4 次関数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$ の極値を調べるには，3 次関数と同様に増減表を作ればよい。

微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 3) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より，$x = 0,\ x = 1,\ x = 3$ のとき $y' = 0$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	8	↗	13	↘	-19	↗
		極小		極大		極小	



増減表より

$x = 1$ のとき極大値 $y = 13$

$x = 0$ のとき極小値 $y = 8$

$x = 3$ のとき極小値 $y = -19$

であることがわかる。

問　以下の関数の増減表を作り，極値を調べよ。

(1)　$y = -x^4 + 2x^2 + 5$

x	
y'	
y	

(2)　$y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2$

x	
y'	
y	

＜ 極大・極小 3 ＞

例題　$y = x^4 e^{-x}$ の極値を調べよ。

(解)　導関数は積の微分公式により

$$y' = (x^4)' \times e^{-x} + x^4 \times (e^{-x})' = 4x^3 \times e^{-x} + x^4 \times (-e^{-x}) = (4-x)x^3 e^{-x}$$

となる従って $y' = 0$ となる x は $x = 0$ と $x = 4$ である。

増減表は右表のようになるので,
求める極値は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{256}{e^4}$	$\searrow$

(答)　$x = 4$ のとき極大値 $\dfrac{256}{e^4}$

$x = 0$ のとき極小値 0

問　次の関数の増減表を作り，極値を調べよ。ただし ( ) 内は定義域である。

(1)　$y = e^x - x$

(2)　$y = x^2 e^{-x}$

(3)　$y = x \log x$　　$(x > 0)$

< 関数のグラフ >

問　次の関数を微分し，増減表を作り，極値を調べ，グラフを描け。
ただし ( ) は定義域である。

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

(2) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 20$

(3) $y = x^2 e^x$

＜ 最大・最小 1 ＞

例題　次の関数の最大値と最小値を，指定された定義域（x の範囲）内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -1 \leqq x \leqq 5)$$

(解)　導関数

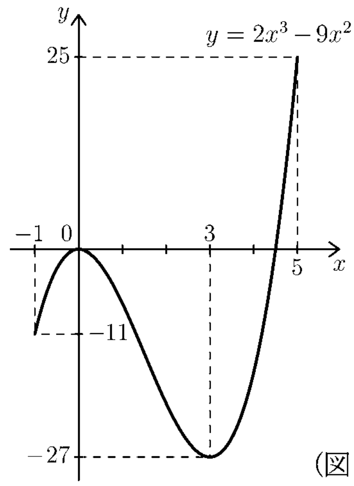
$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$

を求め，$y' = 0$ とおくと

$y' = 0 \ \Leftrightarrow\ 6x^2 - 18x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$ または $x = 3$

であるから $-1 \leqq x \leqq 5$ の範囲で増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$
y	-11	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	25



(図1)

この表よりグラフは図 1 のようになるから

(答)　$\underline{x = 5 \text{ のとき 最大値 } y = 25}$ をとり，$\underline{x = 3 \text{ のとき 最小値 } y = -27}$ をとる。

(注)　最大や最小は定義域によって違ってくる。たとえば

$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -2 \leqq x \leqq 4)$

のとき増減表は右表のようになり，

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$
y	-52	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	-16

この場合の答えは $\underline{x = 0 \text{ のとき 最大値 } y = 0}$，$\underline{x = -2 \text{ のとき 最小値 } y = -52}$ である。

問　次の関数に対し，指定された定義域内で増減表を書き，最大値と最小値を求めよ。

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \qquad (\text{定義域} \quad -1 \leqq x \leqq 3)$

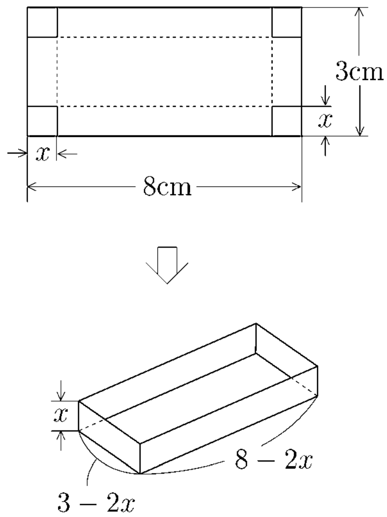
x	-1		3
y'	$\times$		$\times$
y			

(答)　$x =$ ＿＿＿＿ のとき最大値 $y =$ ＿＿＿＿

　　　$x =$ ＿＿＿＿ のとき最小値 $y =$ ＿＿＿＿

< 最大・最小 2 >

例題　たて 3cm，よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から，一辺 $x$cm の正方形を切り取り，右上図の点線のところを折り曲げて，右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 $y$cm^3 を最大にするには，切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？



(解)　容器のたては $3-2x$(cm)，よこは $8-2x$(cm)，高さは x(cm) だから，容積 y(cm^3) は

$$y=(3-2x)(8-2x)x=4x^3-22x^2+24x$$

である。題意より $x>0$ でしかも $2x<3$ であるから，x の範囲は $0<x<\dfrac{3}{2}$ である。
この範囲内で増減表を作り，y の最大値を求める。y を微分すれば

$$y'=12x^2-44x+24=4(3x-2)(x-3)$$

でかつ，

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき

$$y=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3-22\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+24\times\frac{2}{3}=\frac{200}{27}$$

より，増減表は右のようになる。よって

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
y'	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$
y	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

(答)　$x=\dfrac{2}{3}$(cm) のとき，最大容積 $y=\dfrac{200}{27}$(cm^3) をとる。

問　一辺 4cm の正方形のブリキの板から，例題と同様にして，ふたのない容器を作るとき，容器の容積 y(cm^3) を最大にするには，切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？
x の範囲を求め，その範囲内で増減表を作り，y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'	$\times$		0		$\times$
y					

< 微分の応用問題 >

問 1　次の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 1$ における接線

(2) $y = \log x$ の $x = e$ における接線

(3) $y = \sin x$ の $x = \pi$ における接線

(4) $y = \cos x$ の $x = -\dfrac{\pi}{2}$ における接線

(5) $y = \sqrt{x}$ の $x = 9$ における接線

(6) $y = \dfrac{1}{x^2}$ の $x = 1$ における接線

問 2　次の関数の導関数を求め，増減表を作り，極値を調べよ。また，グラフを描け。

(1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

(2) $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2$

(3) $y = x^4 e^x$

問 3　縦 9cm，横 24cm の長方形の板の四角から一辺 x (cm) の正方形をそれぞれ切り取り，折り曲げてふたのない容器を作る。容器の容積 y (cm^3) を最大にするには切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？ x の範囲を求め，その範囲内で増減表を作り，y の最大値を求めよ。

< 付録.1 数学史年表 (0 〜 600) >

年代	数学史	一般史
0		ローマ帝国 (ヨーロッパ)
	ヘロン (100 頃)(アレクサンドリア) (ヘロンの公式，測量術)	
100	メネラオス (100 頃)(アレクサンドリア) (球面三角法，天文学)	
	プトレマイオス・クラウディオス (85〜165 頃) (アレクサンドリア) (30 分ごとの正弦表，トレミーの定理 (円に内接する四角形の辺と対角線の関係)，円錐図法，天文学)	
200		
	ディオファントス (250 頃)(アレクサンドリア) (未知数の導入，不定方程式の整数解)	後漢 (中国)
300	劉徽 (300 頃)(中国) (「九章算術」の注釈，極限の概念，円周率 3.14159)	
	パッポス (300 頃)(アレクサンドリア) (「数学集成」(幾何学)，三平方の定理の拡張，1 点と 1 直線からの距離の比が一定な点の軌跡として楕円・放物線・双曲線を分類，回転曲面の表面積，回転体の体積)	晋 (中国) 東ローマ帝国 (ビザンチン帝国)
400	祖沖之 (429 頃〜500 頃)(中国) ($3.1415926<\pi<3.1415927$，暦法の改訂，地球の歳差運動に起因する天文定数，1 回帰年 =365.2428145 日 (現行との差 46 秒))	南朝 (中国)
500	アールヤバタ (478 頃〜550 頃)(インド) (平方根・立方根の求め方，等差数列・2 乗数列・3 乗数列の和，比例の計算，連立一次方程式の解法，2 次方程式の (正の) 解の公式，円周率 3.1416，半弦値の表 (現在の正弦表と同じ))	グプタ朝 (インド)
	ボエティウス (480 頃〜524 頃)(アテネ) (ラテン語の入門書「算術教程」，連比の応用問題)	
	アンティミオス (500 頃)(コンスタンティノープル) (放物鏡・楕円鏡の焦点を通る光の軌道，楕円上の点から二つの焦点までの距離の和は一定)	マホメット (アラビア) 紙の使用 (中国)
600	ブラフマーグプタ (598 頃〜660 頃)(インド) (比例の計算，2 次方程式の解の公式，正数・負数・ゼロの計算法則)	大化の改新 (日本) 木版による印刷 (中国)

< 付録 2. 数学史年表 (700 〜 1000) >

年代	数学史	一般史
700 800	アル・フワーリズミー (780 頃〜850 頃)(ペルシャ → バグダード) 著書 1「インド数学による計算法」(インド数字・十進法による位取り記数法の紹介，ゼロ記号の使い方=減法で何も残らないとき，空白にならないように，小さな円を書く)(··· 後世 (12 世紀) にこの計算法をアラビア式算法 (アルゴリズム) と呼ばれた。) 著書 2「ジャブルとムカーバラの算法書」(方程式の解法，測量・遺産分配，ジャブル＝負の数を移項して正の項に直す，ムカーバラ＝同類項を整理する) (··· 代数学「アルジェブラ」の語源)	イスラム帝国 (アラビア周辺をイスラム教団が支配 ··· アレクサンドリアの図書館・博物館を破壊 → ヨーロッパの科学が衰退) アッバース朝 (イスラム帝国) (首都バグダード，ギリシャ・インド等の学術書がアラビア語に翻訳される → アラビアで科学が発展) 紙幣の使用 (中国)
900	アル・バッターニー (858 頃〜929 頃)(メソポタミアのバスラ) (イスラムの天文学者，1 年＝ 365 日 5 時間 46 分 24 秒 (現在は 365 日 5 時間 48 分 46 秒)，三角法に正弦 (sin)，余弦 (cos) のほかに正接 (tan)，余接 (cot) を使用 ··· ただし最初に導入した人はわからない。)	フランク王国の分裂 (西ヨーロッパ)→ イタリア・神聖ローマ帝国 (ドイツ)・西フランク (フランス)
	アル・ビールーニー (973〜1048)(ウズベキスタン) (天文学，球面三角法)	
		宋 (中国)
	イブン・ユーヌス (1009 没)(エジプトのカイロ) (イスラムの天文学者，天文表の改訂，三角比の積を和に直す公式)	
	ジェルベール (940 頃〜1003 頃)(フランス) (インド・アラビア数字 1〜9 の紹介)	
1000	アルハーゼン (=イブヌル・ハイサム)(965 頃〜1039 頃) (メソポタミアのハラン) 著書「光学の書」(太陽が地球を照射する範囲，太陽光線の屈折による薄明かりの時間から大気層の厚さ (約 90km) を計算，球面鏡・放物面鏡・柱面鏡について光源と目の位置から反射する点の位置を計算する)	
	分数の表記 インド $\longrightarrow$ アラビア $\begin{matrix}2\\3\end{matrix} \longrightarrow \dfrac{2}{3}$	平安時代末期 (日本) (武士 (平氏) の台頭)