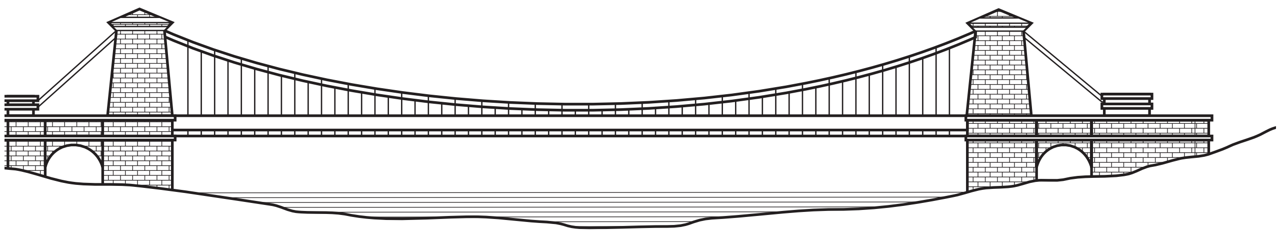
高知工科大学
Kochi University of Technology

基 礎 数 学

2

（2008年度版）



指数・対数，三角関数
合成関数，逆関数，極限

山﨑 和雄，井上昌昭　著

＜ 指数の拡張 ＞

a を n 個掛け合わせたものを a の n 乗といい、a^n で表す。

このとき、n を a^n の**指数**という。

m, n が自然数のとき、次の指数法則が成り立つ。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

問 1　次の計算をせよ。

(1)　$x^3 \times x^4$　　(2)　$x^2 \times x$　　(3)　$(x^3)^4$

(4)　$(x^2)^4$　　(5)　$(ab)^3$　　(6)　$(a^2b^3)^4$

指数が 0 や負の整数について、次のように定める。

$a \neq 0$ とき、　$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

問 2　次の値を求めよ。

(1)　3^0　　(2)　5^{-1}

(3)　5^{-2}　　(4)　0.1^{-1}

(5)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　　(6)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$

問 3　次の計算を行い、結果を負の指数を用いないで表せ。

(1)　$3x \div 5x^2$　　(2)　$(-3x^2)^3$

(3)　$x^3y \div xy^3$　　(4)　$\left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)^2 \times 27x^2y$

(5)　$12x^2y^3 \div \left(-2xy^2\right)^2$　　(6)　$(-3ab^2)^2 \div (-a^2b)$

< 分数の指数 >

$a > 0$ の場合 3 乗すると a となる正の数を $\sqrt[3]{a}$ と表した。
このとき,

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$$

となるから,

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

となることがわかる。また,

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2$$

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{2\times\frac{1}{3}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{a^2})$$

したがって,

$$a^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

まとめると,

$a > 0, m$ が整数, n が正の整数のとき

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$$

また, 指数がどのような整数や分数 (有理数) であっても, 次の指数法則が成り立つ。

$a > 0,\ \ b > 0$ で, p, q が有理数のとき,

$$a^p \times a^q = a^{p+q} \qquad (a^p)^q = a^{pq} \qquad (ab)^p = a^p b^p$$

問 1　次の計算をせよ。(ただし, $a > 0,\ \ b > 0$ とする)

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5}$　　(2) $a\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $\sqrt{ab^3} \div \sqrt[3]{a^2 b}$　　(4) $\sqrt[6]{a^3 b} \times \sqrt[3]{ab} \div \sqrt[3]{ab^2}$

問 2　次の値を求めなさい。

(1) $4^{\frac{1}{2}}$　　(2) $27^{\frac{2}{3}}$　　(3) $8^{\frac{2}{3}}$　　(4) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

(5) $(-4)^3$　　(6) $(-27)^{\frac{1}{3}}$　　(7) $9^{\frac{3}{2}}$　　(8) $16^{\frac{3}{4}}$

< 指数関数とそのグラフ >

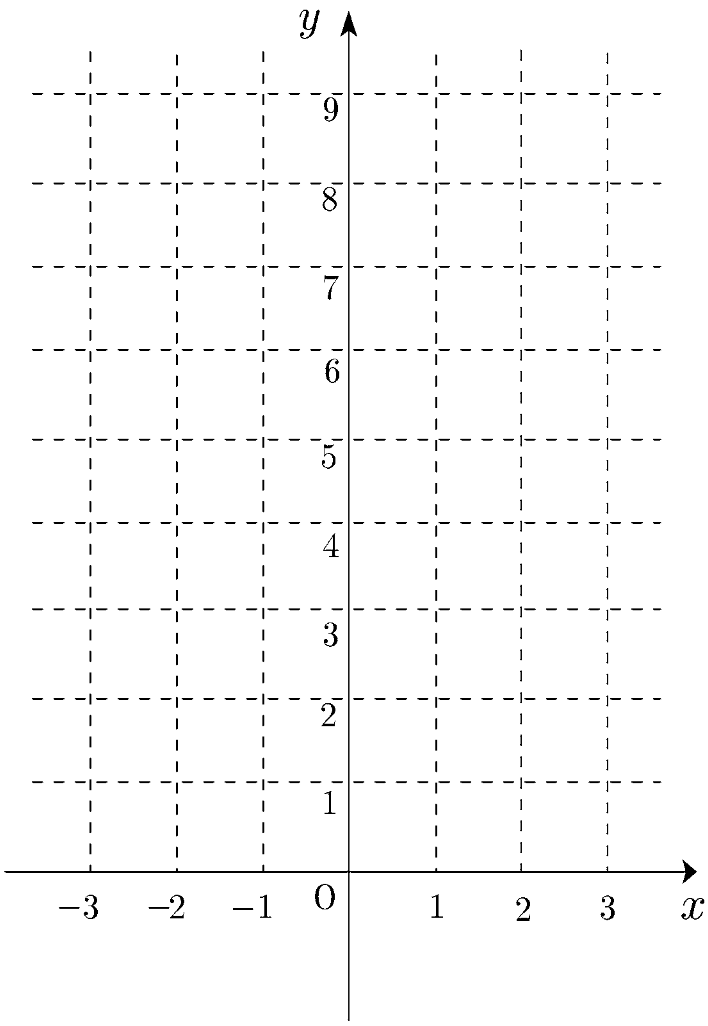
問 (1) $y = 2^x$ と, (2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = 2^x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$

(2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$



＜ 常用対数 ＞

「$100 = 10^r$ となる r の値はいくらか」という問題の答えは 2 である。

このことを

$\log_{10} 100 = 2$ 　　　　(log はログと読む。)

と表す。

$\log_{10} 100$ ということは、「100 は 10 の何乗になるか」という意味である。

このことを、一般化すると、正の数 R に対して

$$R = 10^r$$

となるような数 r を、

$$\log_{10} R$$

と表す。$\log_{10} R$ を R の**常用対数**という。また 10 を**底**という。

100 は 10^2 である。これを $\log_{10} 100 = 2$ と表し、100 の常用対数は 2 であることを意味する。

つまり、対数という意味は「与えられた数に対する指数のこと」と考えるとよい。

問 1　次の式を $\log_{10}$ の記号を用いて表せ。

(1)　$1000 = 10^3$　　　　(2)　$1 = 10^0$

(3)　$0.01 = 10^{-2}$　　　　(4)　$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

問 2　次の値を求めよ。

(1)　$\log_{10} 100$　　　　(2)　$\log_{10} 1$

(3)　$\log_{10} 0.1$　　　　(4)　$\log_{10} \sqrt{10}$

< 一般の対数 >

$8 = 2^3$ である。このことを

$$\log_2 8 = 3$$

と表して、これを

「2 を底とする 8 の対数は 3 である。」という。

一般に、$R = a^r$ のとき　　(a は 1 でない正の数とする)

$$\log_a R = r$$

と表し、

「a を底とする R の対数は r である」という。

つぎに、$\log_a M, \log_a N$ の値が与えられているとき、

1.　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

の式が成り立つことを証明する。

$$\log_a M = m, \quad \log_a N = n$$

とおくと、

$$M = a^m, \quad N = a^n$$

となる。

$$MN = M \times N = a^m \times a^n = a^{m+n}$$

であるから

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

となる。

問 1　指数法則

$$a^m \div a^n = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn}$$

を利用して、次の性質を導け。

2.　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3.　$\log_a M^n = n \log_a M$

問 2　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\log_3 27$

(2)　$\log_{10} \dfrac{1}{10000}$

(3)　$\log_4 2 + \log_4 32$

(4)　$\log_3 \sqrt{54} - \log_3 \sqrt{6}$

(5)　$\log_2 \dfrac{8}{3} + \log_2 6$

(6)　$\log_5 75 - \log_5 3$

＜ 底の変換公式 ＞

$a^0 = 1,\quad a^1 = a$ であるから、

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

が成り立つことがわかる。

次に、a を底とする対数 $\log_a b$ を、c を底とする対数で表してみよう。

$$\log_a b = p$$

とおくと

$$a^p = b$$

c を底とする両辺の対数をとると

$$\log_c a^p = \log_c b \qquad p\log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ であるから、$\log_c a \neq 0$

したがって

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{(底の変換の公式)}$$

とくに

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

問　次の式を計算せよ。

(1)　$\log_{10} 60 + 2\log_{10}\sqrt{5} - \log_{10} 3$

(2)　$\log_2 4 - \log_2 3 + \log_2 6$

(3)　$\log_8 5 \cdot \log_{49} 16 \cdot \log_5 7$

(4)　$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

(5)　$\left(\log_3 \sqrt{2} + \log_9 \sqrt[3]{4}\right)\log_2 3$

(6)　$\log_2 8\sqrt{6} + \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{3}$

< 対数関数とそのグラフ >

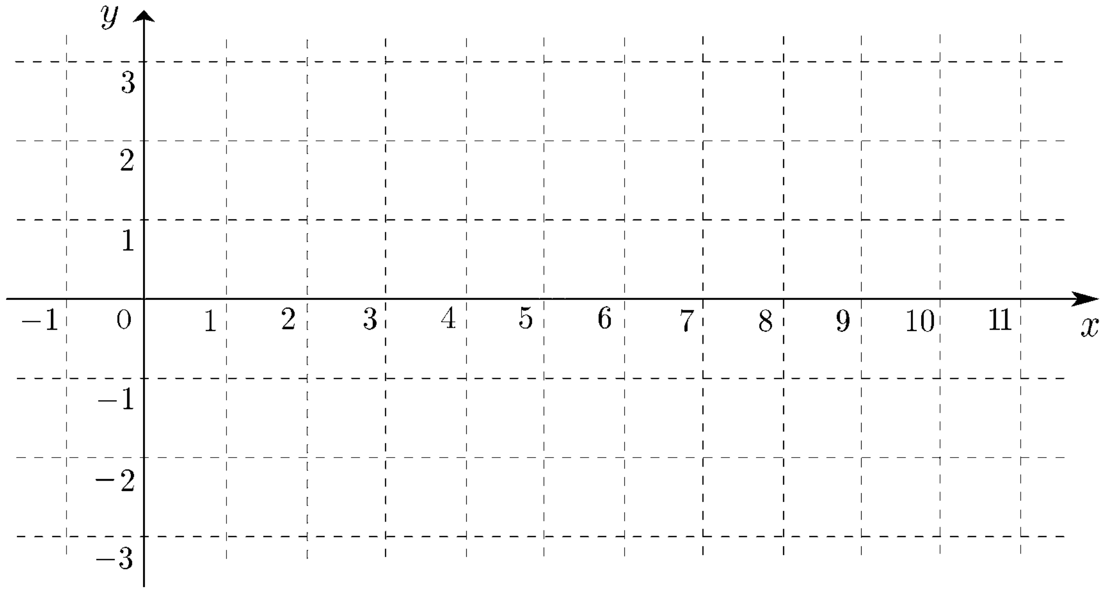
問 (1) $y = \log_2 x$ と, (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを表を完成してからかきなさい。

(1) $y = \log_2 x$

x	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y										

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

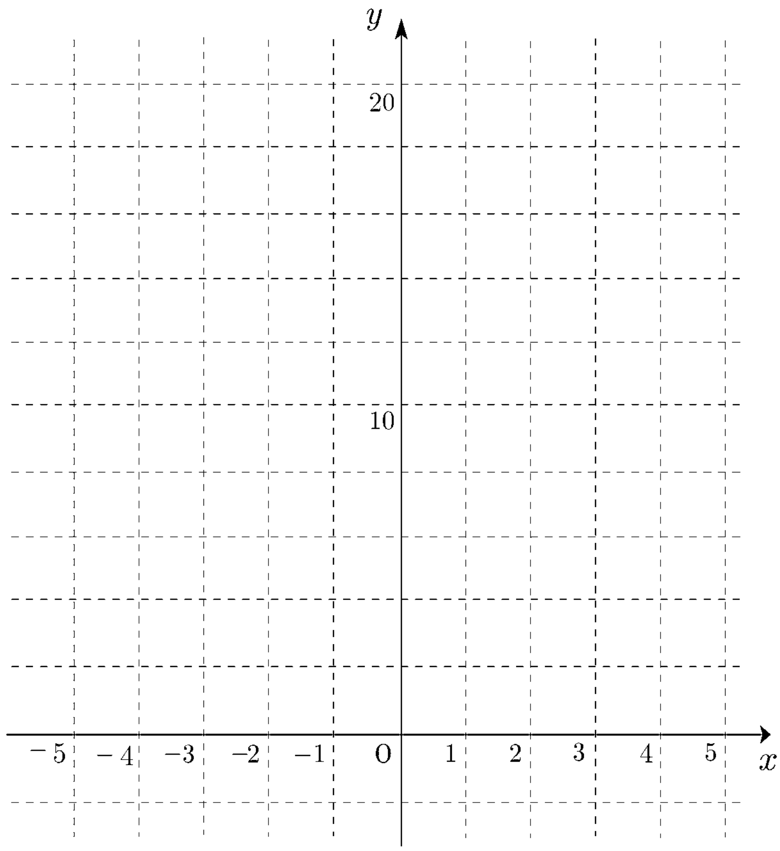
x	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y										



＜ 関数のグラフ ＞

問 1　次の関数のグラフを同じ座標平面上にかけ。

1. $y = x^2$
2. $y = x$
3. $y = 2^x$
4. $y = 2^{-x}$



問 2　1. $y = x$ と $y = x^2$ の交点の座標を求めよ。

2. $x \geqq 0$ のとき、$y = x^2$ と $y = 2^x$ の交点の座標を求めよ。

3. $x \leqq 0$ のとき、$y = x^2$ と $y = 2^{-x}$ の交点の座標を求めよ。

＜ 指数方程式・対数方程式 ＞

例題 1　$2^{3x-2} = 32$ を解け。

(解)　$32 = 2^5$　より　$2^{3x-2} = 2^5$　よって　$3x - 2 = 5 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{7}{3}}$

問 1　次の方程式を解け。

(1)　$3^x = 81$

(2)　$2^{2x-1} = 64$

(3)　$3^{2x-1} = 243$

(4)　$2^{3x} = \dfrac{1}{4}$

(5)　$3^{x+1} = \sqrt{3}$

(6)　$4^{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

例題 2　$\log_3 x - \log_3 4 + \log_3 5 = 2$ を解け。

(解)　$\log_3 \dfrac{x \times 5}{4} = \log_3 9$　より　$\dfrac{5x}{4} = 9 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{36}{5}}$

問 2　次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x = 3$

(2)　$\log_3 3x = 4$

(3)　$\log_2 (x+1) - \log_2 3 = 1$

(4)　$\log_3 \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$

(5)　$\log_2 (x-1) + \log_2 5 = -1$

(6)　$\log_3 6x - \log_3 5 + \log_3 2 = 3$

< 指数関数と対数関数の比較 >

指数関数 $y = 2^x$　　　対数関数 $y = \log_2 x$

1. 定義

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

真数 $M > 0$

底 $a > 0$, $a \neq 1$

$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　　　$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$

2. 指数法則

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$　$\longleftrightarrow$　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$　$\longleftrightarrow$　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

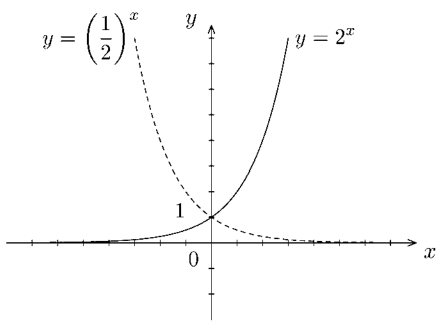
③ $(a^m)^n = a^{mn}$　$\longleftrightarrow$　$\log_a M^k = k \log_a M$

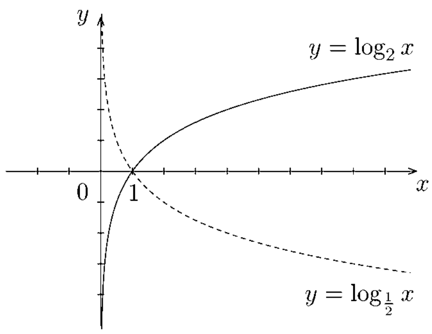
④ $(ab)^n = a^n b^n$　　　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　(底の変換の公式)

(条件. $a > 0$, $b > 0$, m , n は実数)

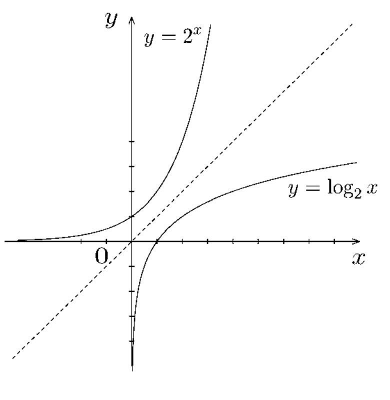
(条件. $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, k は実数
$b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$)

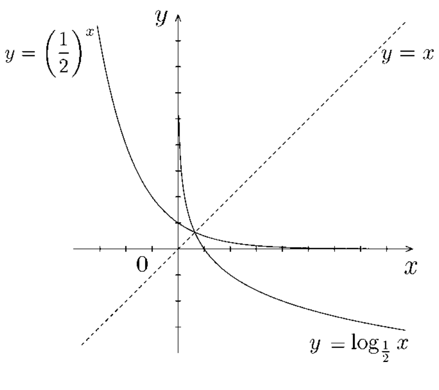
3. グラフ





4. グラフ





< 指数・対数の練習 >

1. 次の計算をせよ。　ただし　$a > 0$, $b > 0$ とする。

(1)　$a^5 \times a^{-3}$　　(2)　$(a^{-3})^2$　　(3)　$(a^2b^{-1})^2$　　(4)　$(ab^{-2})^{-2}$

(5)　$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$　　(6)　$a^2 \div a^{-3}$　　(7)　$a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}}$

2. 次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[3]{125}$　　(2)　$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$　　(3)　$\sqrt[4]{16}$　　(4)　$\sqrt[3]{-8}$

(5)　$(0.1)^{-1}$　　(6)　$27^{\frac{2}{3}}$　　(7)　$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$　　(8)　$\sqrt[4]{25} \times \sqrt[6]{125}$

3. 次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = 3^x$　　(2)　$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

4. 次の値を計算せよ。

(1)　$\log_{10} 1$　　(2)　$\log_{10} 10$　　(3)　$\log_{10} 100$　　(4)　$\log_{10} 0.1$

(5)　$\log_{10} \dfrac{1}{100}$　　(6)　$\log_2 4$　　(7)　$\log_6 4 + \log_6 9$　　(8)　$\log_3 15 - \log_3 5$

(9)　$\dfrac{1}{2} \log_7 49$　　(10)　$(\log_2 3) \times (\log_3 2)$

5. 次の関数のグラフをかけ。

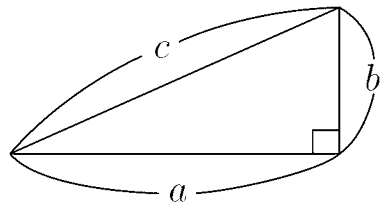
(1)　$y = \log_3 x$　　(2)　$y = \log_{\frac{1}{3}} x$

6. 次の方程式を解け。

(1)　$2^{x+2} = 16$　　(2)　$\log_5 x - \log_5 2 = 2$

< 直角三角形 >

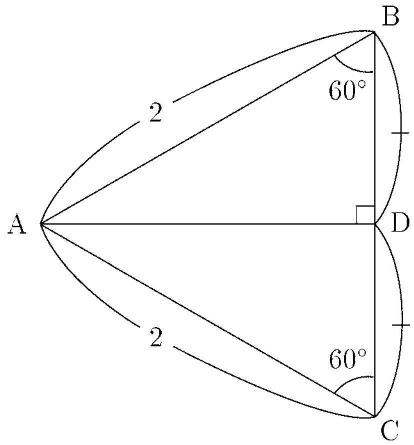
問１　底辺 a，高さ b，斜辺 c，の直角三角形に対し，ピタゴラスの定理を用いて斜辺の長さ c を a と b で表せ。



（図１）

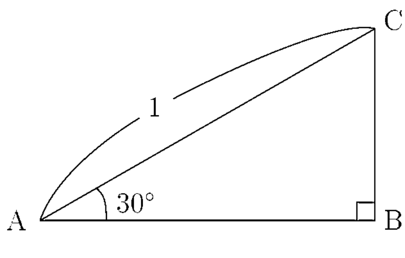
(注)　$\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$, であるが $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
たとえば $5 = \sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4 = 7$

問２　図２のように一辺の長さが２である正三角形 ABC に対し，BC の中点を D とするとき，AD の長さを求めよ。



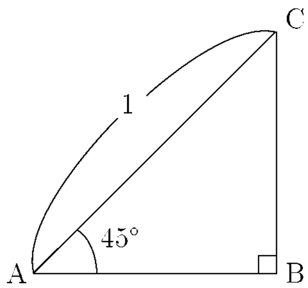
（図２）

問３　図３の直角三角形 ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図３）

問３　図４の直角三角形 ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図４）

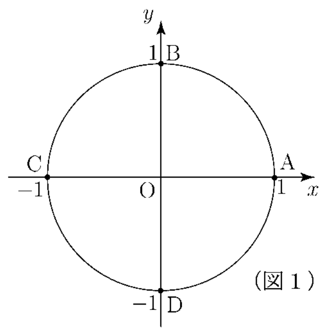
＜ 円周上の点 ＞

原点 O を中心として半径１の円周上の点の座標を求める練習をする。前のページの結果を使ってもよい。

問１　図１の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (　　,　　) , B (　　,　　)

C (　　,　　) , D (　　,　　)

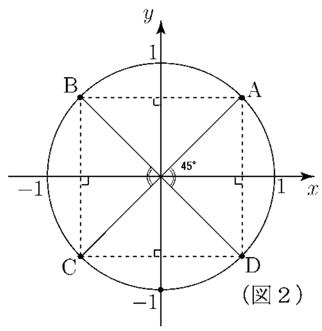


（図１）

問２　図２の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (　　,　　) , B (　　,　　)

C (　　,　　) , D (　　,　　)

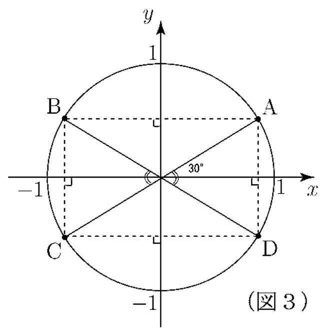


（図２）

問３　図３の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (　　,　　) , B (　　,　　)

C (　　,　　) , D (　　,　　)

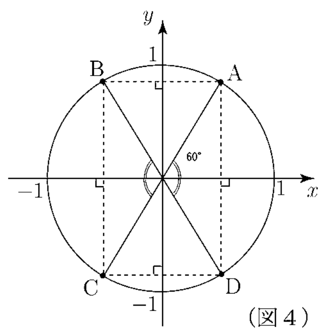


（図３）

問４　図４の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A (　　,　　) , B (　　,　　)

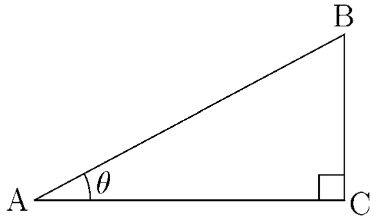
C (　　,　　) , D (　　,　　)



（図４）

< 鋭角の三角比 >

右図のような直角三角形 ABC に対し、角 A が θ であるとき、辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ を角 θ の**正接**（tangent）といい



$$\boxed{\tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \left(= \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}\right)}$$

と書く。同様に辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**正弦**（sine）といい

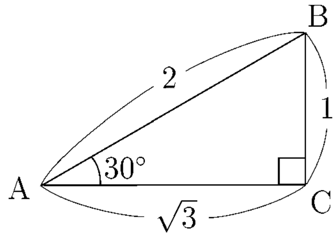
$$\boxed{\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \left(= \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}\right)}$$

と書く。又、$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**余弦**（cosine）といい

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \left(= \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}\right)}$$

と書く。これらをまとめて**三角比**という。

例　図 1 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると

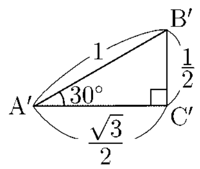


$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。一方、図 2 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると



$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

で上と同じ結果になる。どちらで考えてもよい。

問　45° と 60° の三角比を求めよ。

$\sin 45^\circ =$

$\sin 60^\circ =$

$\cos 45^\circ =$

$\cos 60^\circ =$

$\tan 45^\circ =$

$\tan 60^\circ =$

< 三角関数の定義 >

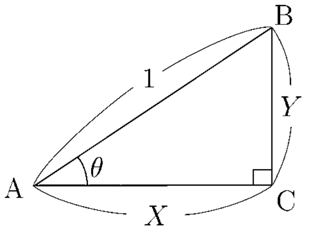


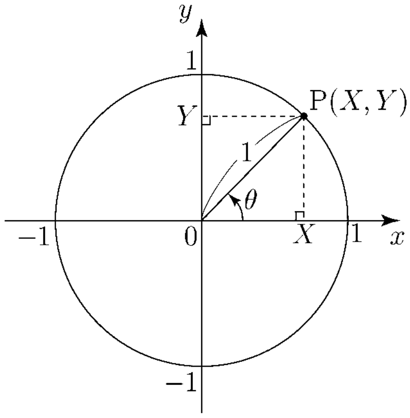
図１のように斜辺の長さが１の直角三角形 ABC で角 θ の三角比を考えると

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{Y}{1} = Y$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{X}{1} = X$$

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{Y}{X}$$

となる。この (X, Y) を座標平面上の点 P と考えると、原点を中心として半径１の円周上にある。角度 θ が大きくなれば点 P は（１，０）から出発して円周上を反時計まわりにまわる。そのとき、点 P の座標 (X, Y) で



$$\boxed{\sin\theta = Y,\ \cos\theta = X,\ \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$

と定める。これで一般の角に対する三角関数が求まる。角度 θ は図２のように x 軸を基準に反時計まわりにはかる。

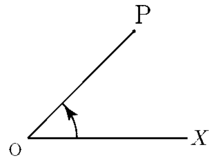
問 次の表を完成させよ。

角度 θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$\sin\theta$	0				1			
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$					
$\tan\theta$								$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

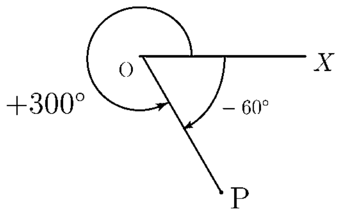
180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$-\frac{1}{2}$							
				0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
		1						0

< 一般角 >

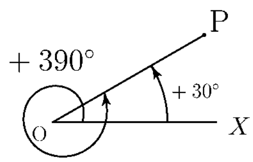
OX を固定した線とし、点 O を中心に、OP が回転する。
OX を始線と言い、OP を動径という。反時計まわりを
プラス方向、時計まわりをマイナス方向として、始線に
対する動径の回転の大きさと向きを表す角を**一般角**という。



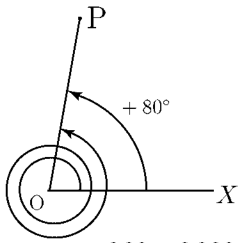
例 1　(1)



(2)

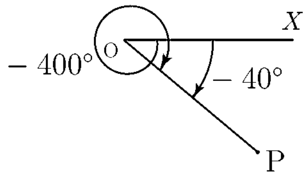


(3)

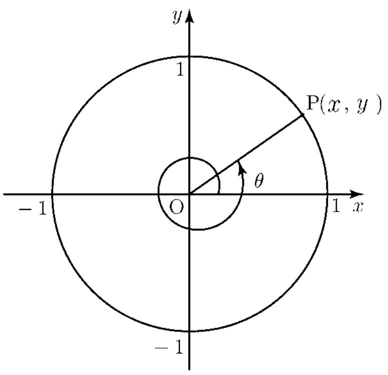


$80° + 360° \times 2 = +800°$

(4)



[一般角の三角関数]



一般角 θ に対する三角関数を $0 \leqq \theta \leqq 360°$ の場合と同様に、
点 P の座標 (x, y) で

$$\cos\theta = x \quad , \quad \sin\theta = y \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して

$$\cos(\theta + 360°) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360°) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 360°) = \tan\theta$$

が成り立つ。

例 2　$\sin 400° = \sin 40°$　,　$\cos(-60°) = \cos 300°$　,　$\tan 800° = \tan 80°$

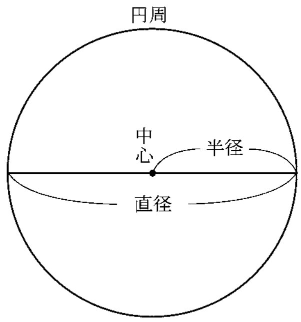
問　次の三角関数の値を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 450°$　　(2) $\cos(-90°)$　　(3) $\tan 510°$

(4) $\sin(-240°)$　　(5) $\cos 600°$　　(6) $\tan 850°$

＜ 円周率 ＞

古代から円の円周と直径の長さの比が一定であることは知られていた。それは大きな円と小さな円は相似だから



$$\frac{\text{大きな円の円周}}{\text{大きな円の直径}} = \frac{\text{小さな円の円周}}{\text{小さな円の直径}}$$

が成り立つからである。この比を**円周率**という。すなわち

$$\text{円周率} = \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \frac{\text{円周の長さ}}{2 \times \text{半径の長さ}}$$

となる。ギリシャの数学者アルキメデス (BC 267 ∼ BC 212) は円に内接する正多角形の辺の長さを計算して，円周率が 約 3.14 であることを示した。その後さらに円周率を正確に求める計算が行われ，現在ではコンピュータを使って 10 億桁まで知られている。円周率が不規則な無限小数 (= 無理数) であることがわかったのは 18 世紀の終り (約 200 年前) である。また円周率をギリシャ語の円周率 ($\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\eta\varsigma$) の頭文字をとって π としたのは 18 世紀の始めであった。π の小数点以下 20 桁までは

$$\text{円周率}\quad \pi = 3.14159265358979323846\cdots$$

である。これを江戸時代の人は「身一つ世一つ生くに無意味，曰くなく御文や読む」と覚えたそうである。今後，円周率は常に π を用いる。

例　半径 5cm の円周の長さを求めたい。円周の長さを ℓ とおくと

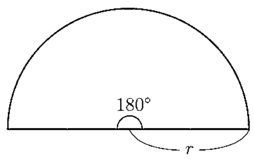
$$\pi = \frac{\ell}{2\times 5} = \frac{\ell}{10} \qquad \text{より} \qquad \underline{(\text{答})\ \ \ell = 10\pi\ (\text{cm})}$$

問 1　次の半径の円周を求めよ。

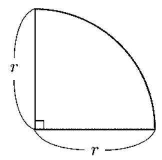
(1)　半径 2cm　　　(2)　半径 r (単位不要)

問 2　次の長さを求めよ。(単位不要)

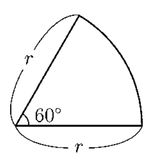
(1)　半径 r の半円の弧の長さ



(2)　半径 r の $\frac{1}{4}$ 円の弧の長さ



(3)　半径 r, 中心角 60° の弧の長さ

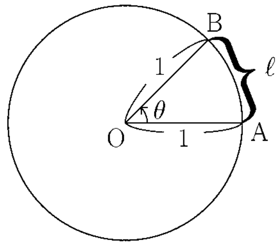


＜ 弧度法 1 ＞

右図のように、角度 θ を、半径 1 の円の
弧 AB の長さ l で表す方法を**弧度法**という。
単位をラジアンで表し、

$\theta = l$ (ラジアン)

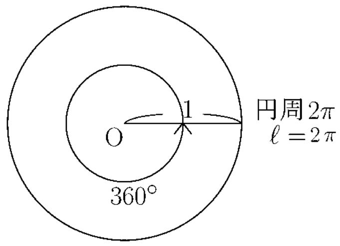
と記す。



例 (1) $\theta = 360^\circ$ のとき、半径 1 の
円周の長さは 2π だから

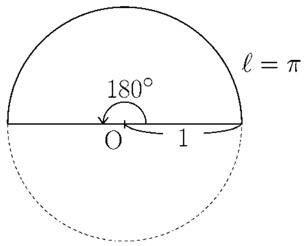
$360^\circ = 2\pi$(ラジアン)

である。(π は円周率＝ 3.14)



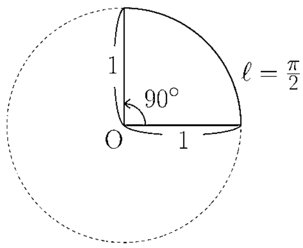
(2) $\theta = 180^\circ$ のとき、半径 1 の
半円の弧の長さは π だから

$180^\circ = \pi$(ラジアン)



(3) $\theta = 90^\circ$ のとき、半径 1 の
円周の $\dfrac{1}{4}$ の長さは $\dfrac{\pi}{2}$ だから

$90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$(ラジアン)



以上の例から、1 (ラジアン) は
弧の長さが 1 に対する角度 θ で、

1 (ラジアン) $= \dfrac{180^\circ}{\pi} = 57.3$

である。

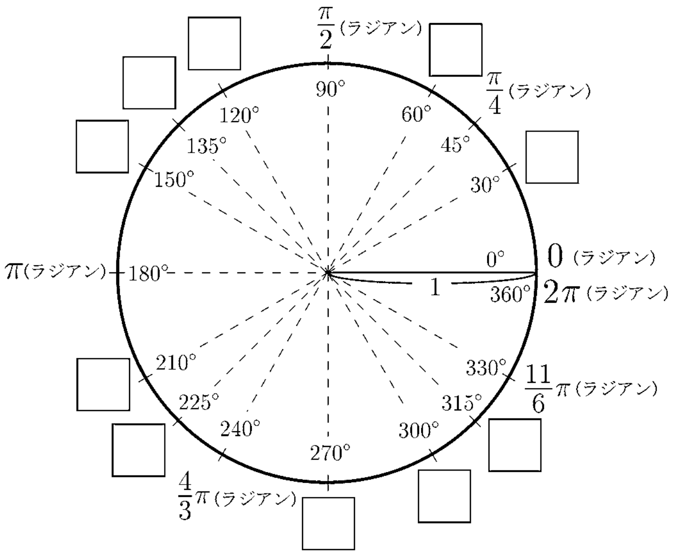
(注)$360^\circ, 180^\circ, 90^\circ$ 等の通常の角度を示す記法を**度数法**という。

問 次の表を完成せよ。

度数法	0°			60°			135°	150°			225°			300°	315°	330°	
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$			π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$				2π

＜ 弧度法２ ＞

問 1　右図は半径 1 の円の内部に度数法による角度が記されている。この円周の外の □ 内に弧度法による角度を記せ。(ただし単位ラジアンは省略してよい)



例　0° から 360° 以外の一般角も弧度法によって表される。

(1)　$420^\circ = 360^\circ + 60^\circ = 2\pi + \frac{\pi}{3}$(ラジアン)$= \frac{7}{3}\pi$(ラジアン)

(2)　$-510^\circ = -360^\circ - 150^\circ = -2\pi - \frac{5}{6}\pi$(ラジアン)$= -\frac{17}{6}\pi$(ラジアン)

問 2　次の角度を弧度法で表せ。

(1)　540°　　(2)　-270°　　(3)　630°

(4)　-405°　　(5)　750°　　(6)　-855°

問 3　次の表を完成させよ。

角度(度数法)	-30°		45°			120°		270°		330°	390°		600°
弧度法 θ		0		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{3}$			$\frac{9\pi}{4}$	
$\sin\theta$													
$\cos\theta$								0					
$\tan\theta$			1										

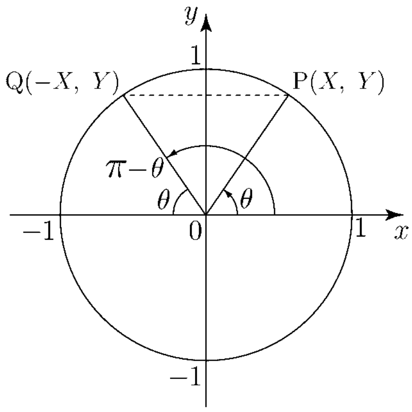
< 三角関数の性質１ >

例　$\cos\theta = X,\ \sin\theta = Y$ のとき，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ と y 軸に関して対称な点 $\mathrm{Q}(-X,\ Y)$ は角 $\pi-\theta$ を表す点である。従って

$$\cos(\pi-\theta) = -X$$
$$\sin(\pi-\theta) = Y$$
$$\tan(\pi-\theta) = \frac{Y}{-X}$$

となる。これを $\cos\theta, \sin\theta, \tan\theta$ で表すと

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi-\theta) = \ \sin\theta$$
$$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

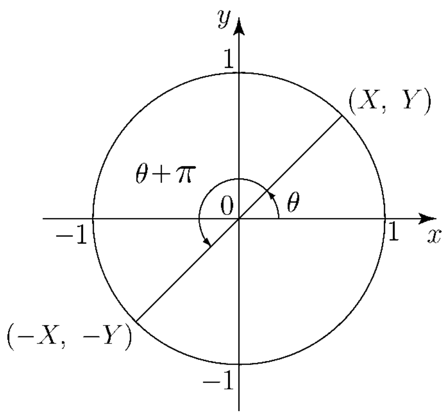


問 1　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ で表せ。

(1)　$\cos(\pi+\theta) =$

(2)　$\sin(\pi+\theta) =$

(3)　$\tan(\pi+\theta) =$

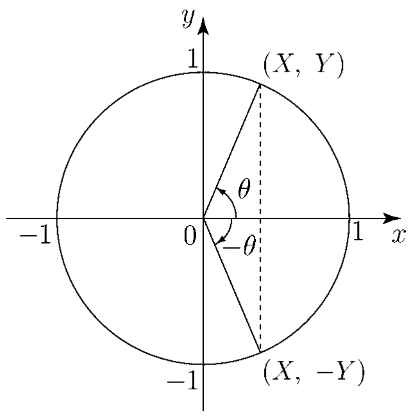


問 2　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ で表せ。

(1)　$\sin(-\theta) =$

(2)　$\cos(-\theta) =$

(3)　$\tan(-\theta) =$



< 三角関数の性質 2 >

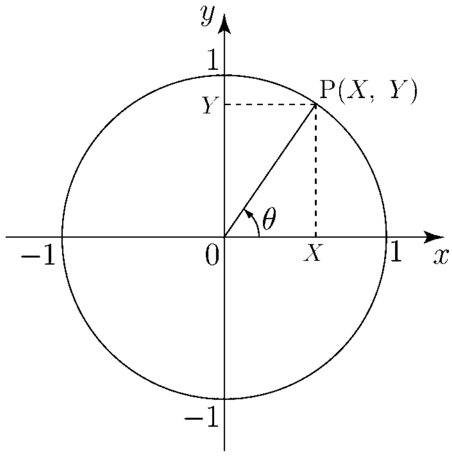
角度 θ を表す点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると，三角関数の定義から

$$\sin\theta = Y\ ,\ \cos\theta = X\ ,\ \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。原点 O と点 P の距離は 1 だから $X^2 + Y^2 = 1$ より

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

が成り立つ。



(注)　記号 $\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2 = (\cos\theta)\times(\cos\theta)$ の意味であり，$\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち
$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 \neq \cos(\theta^2)$,　$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2 \neq \sin(\theta^2)$

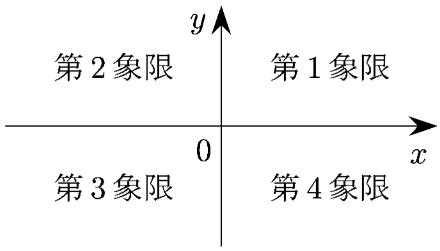
問 1　$\tan\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

問 2　$1 + \tan^2\theta$ を $\cos\theta$ で表せ。

問 3　三角関数の定義から，sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり，第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち

θ	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

となる。表を完成させよ。

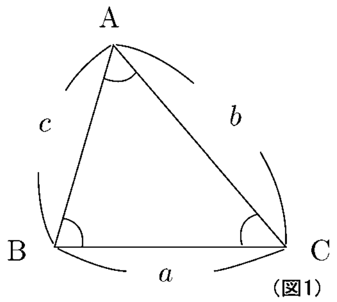


問 4　角度 θ は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ である。このとき $\cos\theta$ と $\tan\theta$ を求めよ。

問 5　角度 θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ で，$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ である。このとき $\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

< 正弦定理・余弦定理 >

三角形の 3 頂点 A,B,C の内角を A, B, C (斜体大文字) で表し，向き合う辺の長さを a, b, c (斜体小文字) で表す。(図 1)

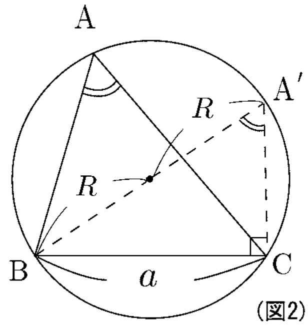


(図1)

< 正弦定理 >

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \boxed{}$$

問 1　正弦定理の $\boxed{}$ 内にはいる式を外接円の半径 R を用いて表せ。



(図2)

< 余弦定理 >

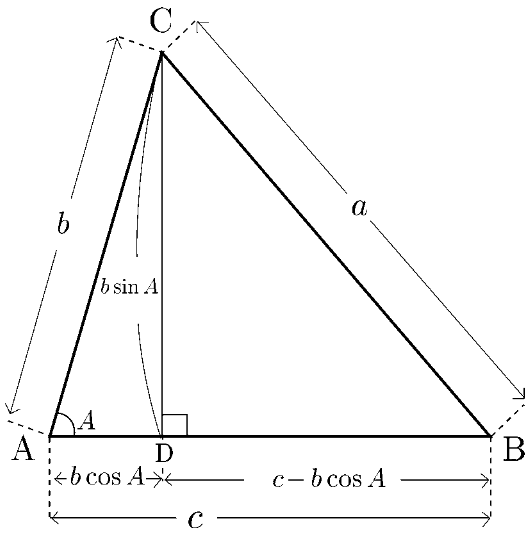
三角形 ABC が図 3 のような場合

$$\begin{aligned} a^2 &= \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos^2 A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

これを余弦定理という。



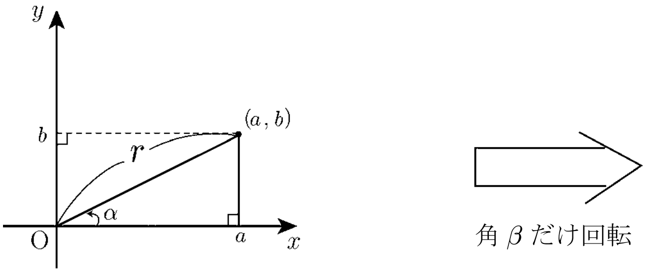
(図3)

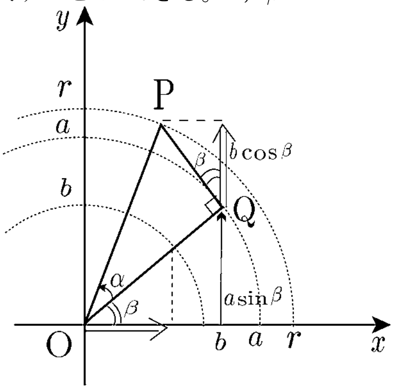
問 2　b を a , c と角 B で表せ。

問 3　c^2 を a , b と角 C で表せ。

＜ 加法定理 ＞

$\sin(\alpha+\beta)$ や $\cos(\alpha+\beta)$ は $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ を用いた式で表すこと ができる。α, β が鋭角の場合，次の図で考えてみよう。





左図の直角三角形を原点を中心にして角度 β だけ回転し，右図のように

直角三角形 OPQ をかく。このとき点 P の y 座標は，$r\sin(\alpha+\beta)$ とも書けるし，

$a\sin\beta+b\cos\beta$ とも書けるので

$$r\sin(\alpha+\beta)=b\cos\beta+a\sin\beta\cdots\cdots\cdots(1)$$

となる。ここで

$$\frac{a}{r}=\cos\alpha\ ,\ \frac{b}{r}=\sin\alpha\ ,\ r=\sqrt{a^2+b^2}$$

であるから、(1) の両辺を r でわると

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}\cdots\cdots\cdots(2)$$

同様に点 P の x 座標が $r\cos(\alpha+\beta)$ とも，$a\cos\beta-b\sin\beta$ とも書けるので

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\cdots\cdots\cdots(3)$$

が得られる。(2) 式をサインの加法定理，(3) 式をコサインの加法定理という。さらに

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta\ ,\ \cos(-\theta)=\cos\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\ \tan(-\theta)=-\tan\theta$$

を利用すると次式が得られる。これらの式をまとめて三角関数の加法定理という。

$$\boxed{\begin{array}{ccc}
\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & , & \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & , & \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} & , & \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}
\end{array}}$$

問 2　加法定理を用いて次式を導け。

(1) $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$　　(2) $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

(3) $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$　　(4) $\dfrac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}=\tan\alpha$

< 加法定理の応用 >

例 ① $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta\cos(2\pi)+\cos\theta\sin(2\pi)=(\sin\theta)\times 1+(\cos\theta)\times 0=\sin\theta$

② $\cos(\theta+\pi)=\cos\theta\cos\pi-\sin\theta\sin\pi==(\cos\theta)\times(-1)-(\sin\theta)\times 0=-\cos\theta$

③ $\tan(\pi-\theta)=\dfrac{\tan\pi-\tan\theta}{1+\tan\pi\tan\theta}=\dfrac{0-\tan\theta}{1+0\times\tan\theta}=-\tan\theta$

④ $2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\left\{\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}\right\}=2\left\{(\sin\theta)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-(\cos\theta)\times\dfrac{1}{2}\right\}=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

問 加法定理を用いて次式を展開し，できるだけ簡単にせよ。

(1) $\cos(\theta+2\pi)=$

(2) $\tan(\theta+2\pi)=$

(3) $\sin(\theta+\pi)=$

(4) $\tan(\theta+\pi)=$

(5) $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{2})=$

(6) $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=$

(7) $\sin(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=$

(8) $\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=$

(9) $\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})=$

(10) $2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=$

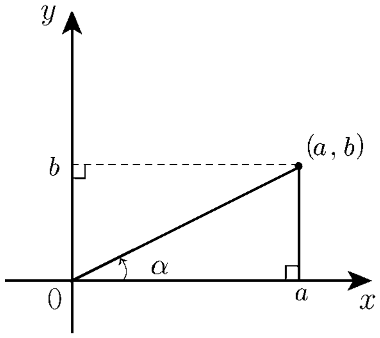
(11) $2\sin(\theta+\dfrac{5\pi}{6})=$

(12) $4\sin(\theta-\dfrac{\pi}{3})=$

< 三角関数の合成 >

加法定理から次の式が得られる。

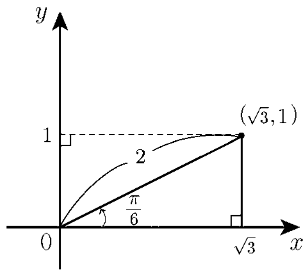
> 0 ではない定数 a, b と角度 θ に対して
>
> $$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$
>
> が成立する。ただし
>
> $$r = \sqrt{a^2+b^2} \quad , \qquad \cos\alpha = \frac{a}{r} \quad , \qquad \sin\alpha = \frac{b}{r}$$
>
> である。



例 1　$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

$$= 2\left\{(\sin\theta)\times\frac{\sqrt{3}}{2} + (\cos\theta)\times\frac{1}{2}\right\}$$

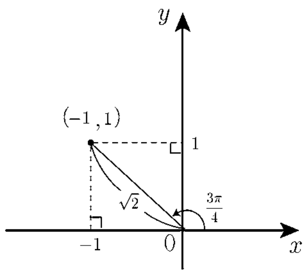
$$= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$



例 2　$-\sin\theta + \cos\theta$

$$= \sqrt{2}\left\{(\sin\theta)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (\cos\theta)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right)$$



問　次式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形にせよ。(ただし $r>0$, α は弧度法で表す)

(1)　$\sin\theta + \cos\theta$

(2)　$\dfrac{1}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

(3)　$-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

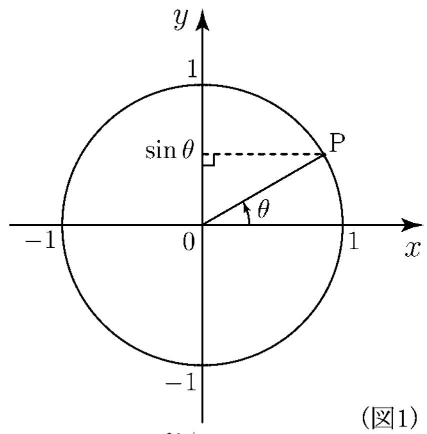
(4)　$-\sqrt{3}\sin\theta - 3\cos\theta$

＜ 三角方程式 1 ＞

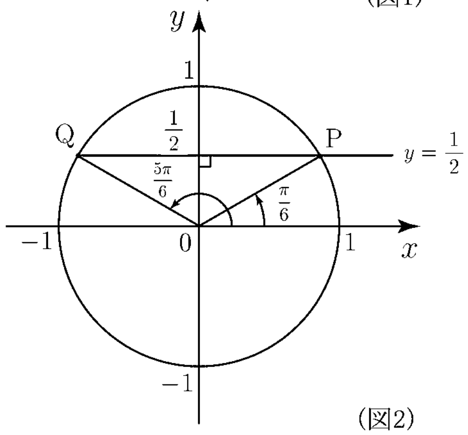
15 ページで学んだように，単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると，

$$\boxed{\sin\theta = \text{点 P の } y \text{ 座標}}$$

である (図 1)。



(図1)



(図2)

例題　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き，y 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 $\left(y = \frac{1}{2}\right)$ を引く。その直線と単位円との交点を P , Q とする。
x 軸からの角度は図 2 のようになる。

(答)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ または $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

問　次式を満たす角度 θ を (　) 内の範囲で求めよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

(2)　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$

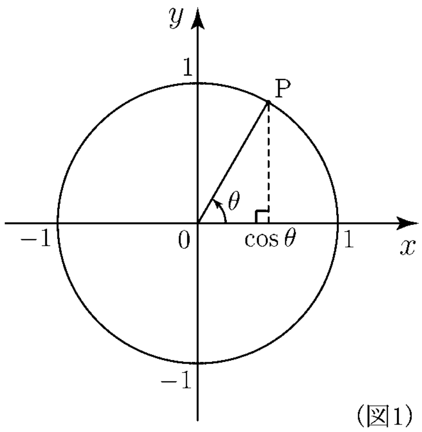
(3)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

< 三角方程式 2 >

15 ページで学んだように，単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると，

$$\boxed{\cos\theta = \text{点 P の } x \text{ 座標}}$$

である (図 1)。



(図1)

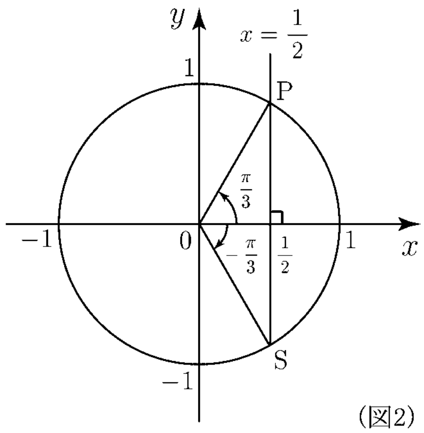
例題　$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き，x 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ を引く。その直線と単位円との交点を P , S とする。x 軸からの角度は図 2 のようになる。

(答)　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ または $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$



(図2)

問　次式を満たす角度 θ を (　) 内の範囲で求めよ。

(1)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$

(2)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　$(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$

(3)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

＜ 三角方程式 3 ＞

単位円と角 θ を表す動径との交点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とすると

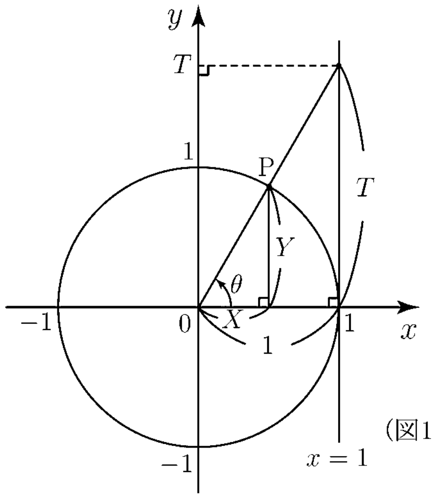
$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。

問 1 図 1 の場合に

$$\boxed{\tan\theta = T}$$

であることを示せ。



(図1)

(証明)

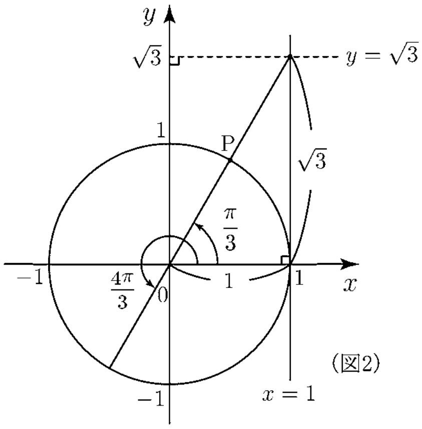
例題 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲で

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

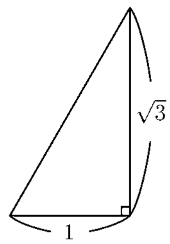
を満たす角度 θ を求めよ。

(解) まず単位円を描き，y 軸上に $\sqrt{3}$ をとる。$y = \sqrt{3}$ と $x = 1$ との交点から原点に直線を引くと図 3 の直角三角形ができる。この直角三角形は斜辺の長さが 2 になるので内角が $\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形になる。図 2 より

<u>(答) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ または $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$</u>



(図2)



(図3)

(注) 24 ページより $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ であるから $\tan\dfrac{4\pi}{3} = \tan\dfrac{\pi}{3}$ である。

問 2 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲で次式を満たす角度 θ を求めよ。

(1) $\tan\theta = 1$　　(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

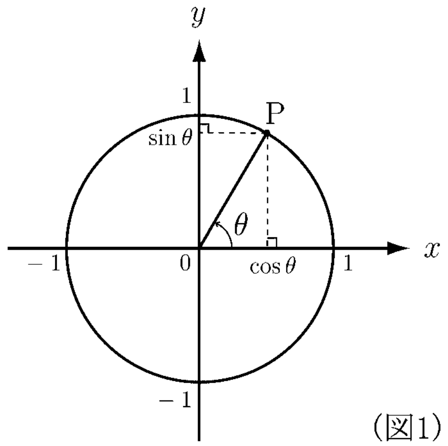
< 三角関数のグラフ 1 >

単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると

$$\sin\theta = \text{点 P の } y \text{ 座標}$$

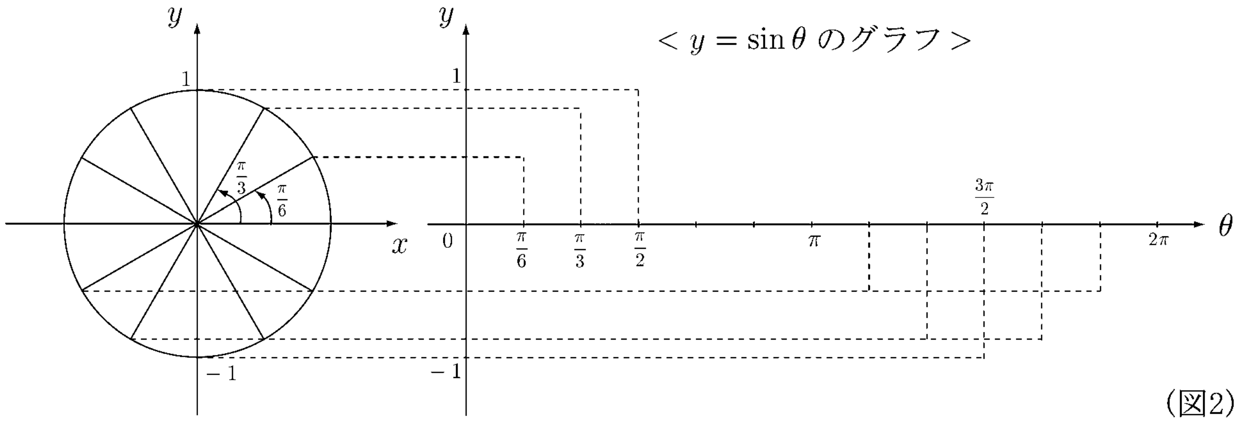
$$\cos\theta = \text{点 P の } x \text{ 座標}$$

である。この性質を用いて $y=\sin\theta$ と $x=\cos\theta$ のグラフを描こう。



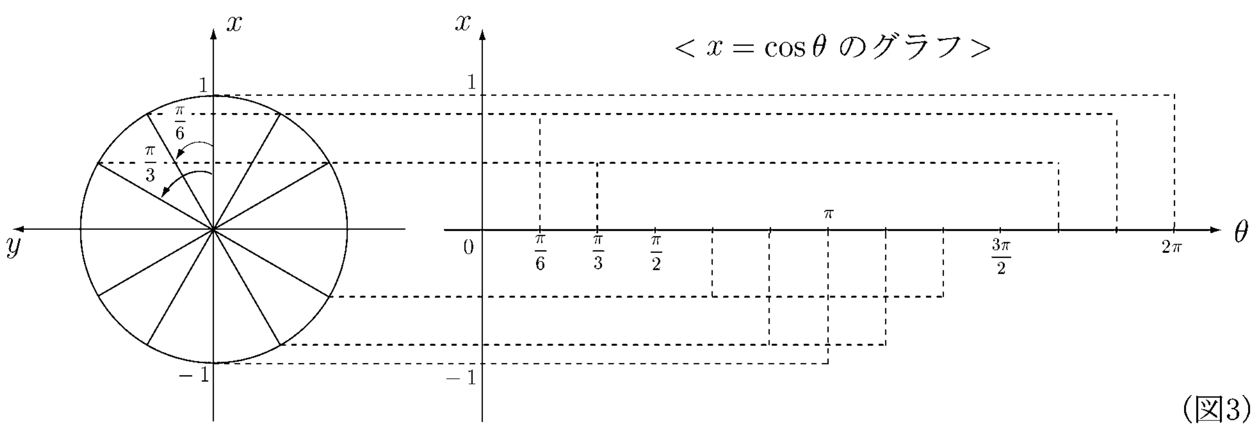
(図1)

問 1　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で $y=\sin\theta$ のグラフを描け。



(図2)

問 2　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で $x=\cos\theta$ のグラフを描け。



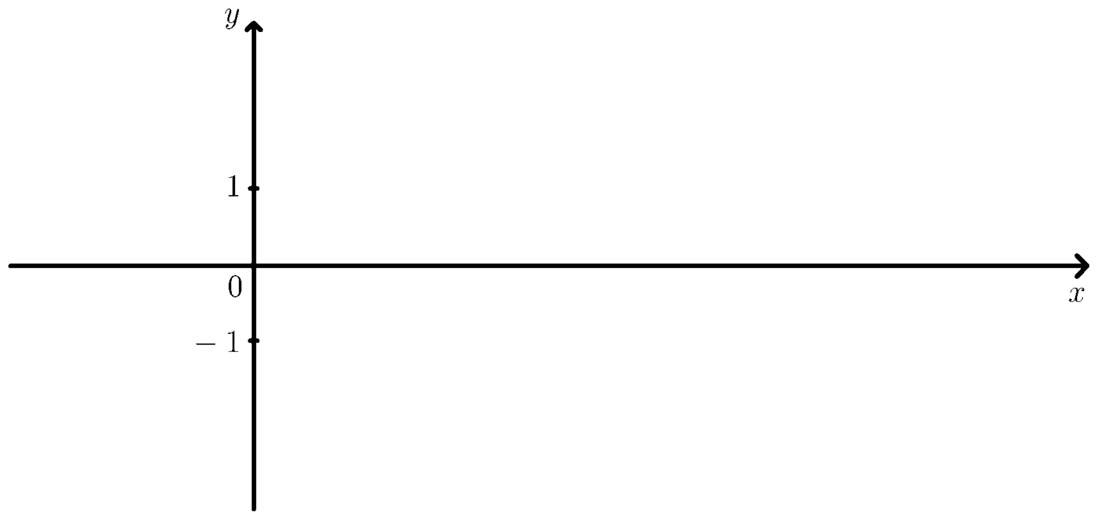
(図3)

< 三角関数のグラフ 2 >

問　表を完成し，$-\pi \leqq x \leqq 3\pi$ の範囲で $y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフを描け。

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin x$											
$\cos x$											

(1) $y = \sin x$



(注)$\dfrac{\pi}{2} \fallingdotseq 1.5$ として x 軸の目もりを $-\pi$ から 4π まで $\dfrac{\pi}{2}$ おきに記入する。

(2) $y = \cos x$　　(x 軸と y 軸を描き，目もりをきざみ，$y = \cos x$ のグラフを描く)

< 三角関数のグラフ 3 >

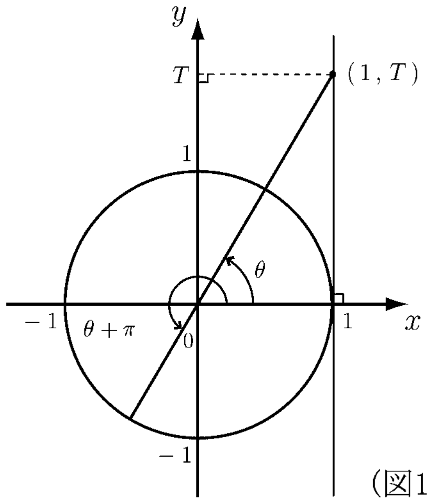
問　表を完成し，$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ の範囲で $y = \tan x$ のグラフを描け。

(ヒント) 図 1 において $T = \tan\theta = \tan(\theta + \pi)$ が成り立つ。

x	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\tan x$							

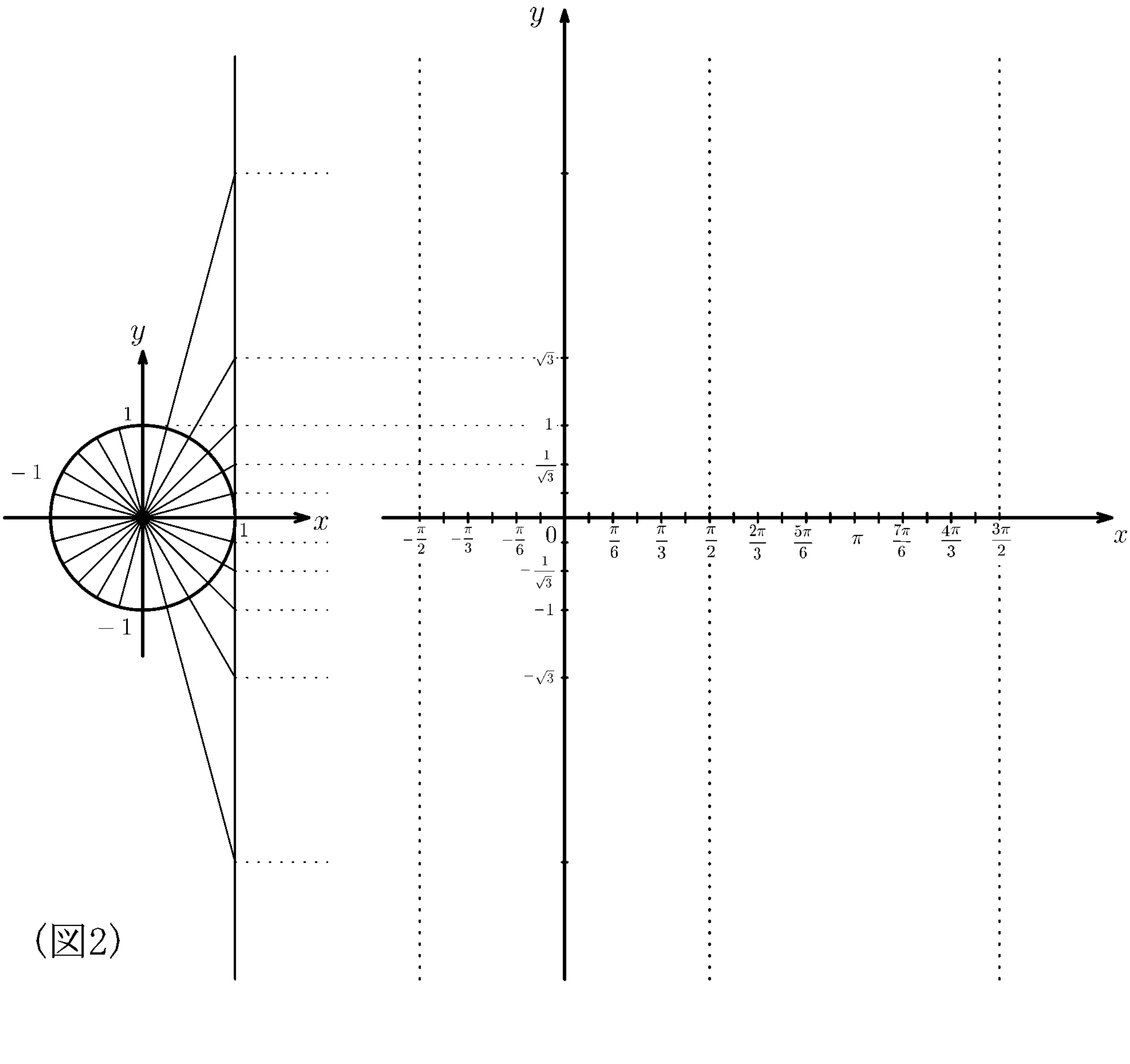
x	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	$\dfrac{7\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{4}$	$\dfrac{4\pi}{3}$
$\tan x$							

(注) (図 2 は図 1 の θ が $\dfrac{\pi}{12}$ の倍数である)



(図1)

$< y = \tan x$ のグラフ $>$



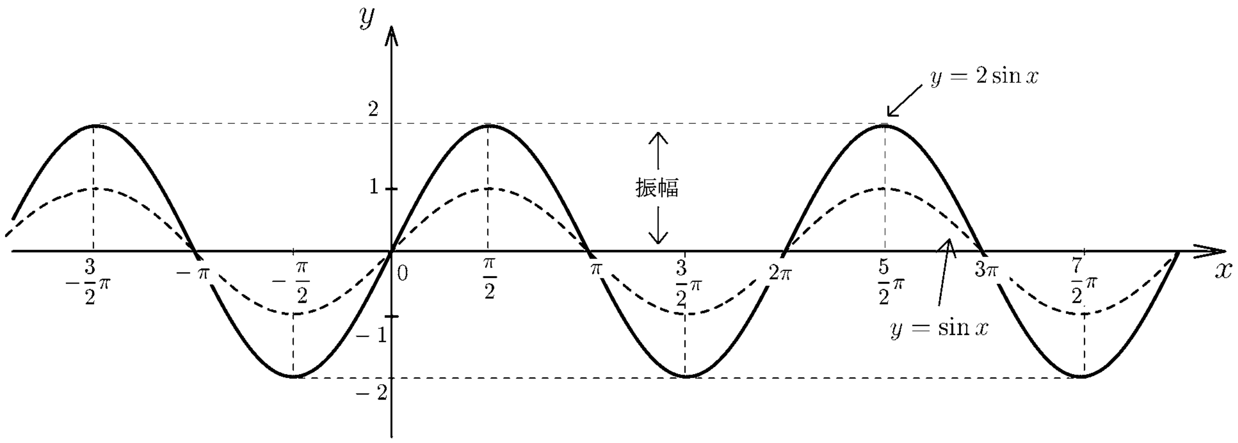
(図2)

< 正弦波 1 >

定数 A，B，C に対し，$y = A\sin(Bx + C)$ のグラフを**正弦波**という。

$\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ だから $y = \cos x$ のグラフも正弦波である。

例

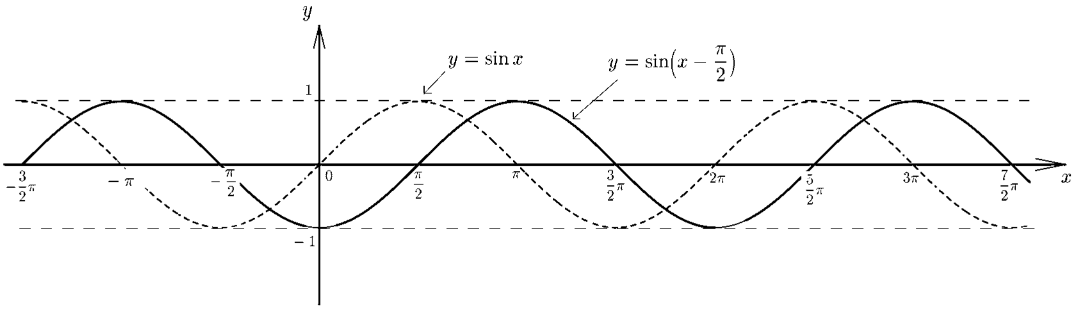


$y = 2\sin x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフ (点線) を y 軸方向に 2 倍した曲線 (実線) である。
中心軸 (x 軸) からの最大幅は 2 である。このようなとき，この正弦波の**振幅**は 2 であるという。

問　$y = 3\sin x$ と $y = 2\cos x$ のグラフを同じ座標軸上に描け。

< 正弦波 2 >

例



$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフ (点線) を x 軸方向に $+\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフ (実線) である。

問 1　$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描け。

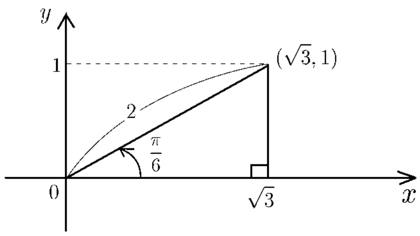
問 2　$y=2\sin(x-\pi)$ のグラフを描け。

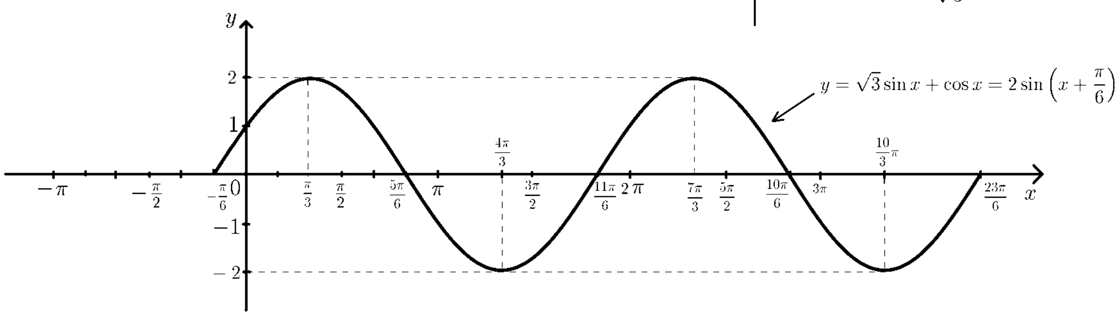
< 正弦波 3 >

例　$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ のグラフを描きたい。25 ページ例 1 より

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

と表されるので，グラフは下図のようになる。

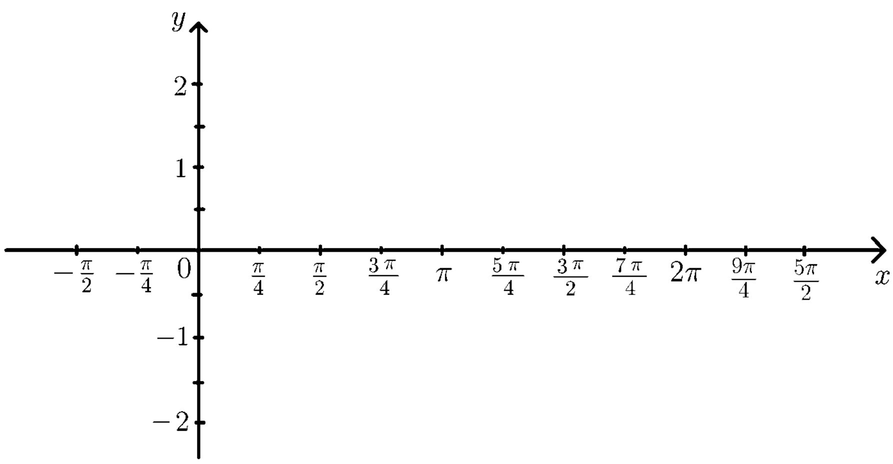




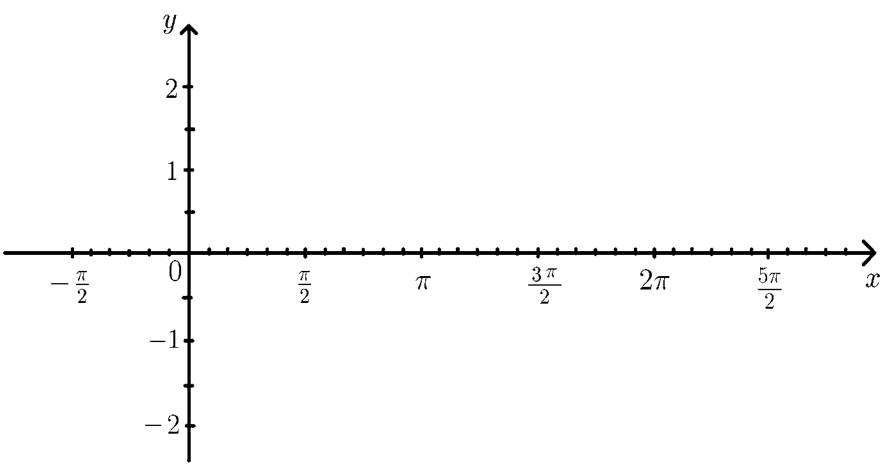
このグラフの振幅は 2 である。

問　次の関数のグラフを描き，振幅を求めよ。

(1) $y=\sin x+\cos x$



(2) $y=\sin(x)-\sqrt{3}\cos(x)$



< 三角関数の練習 >

問 1. 次の θ について $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$　　(2) $\theta = -\dfrac{3}{4}\pi$

問 2. 次の値を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}$　　(2) $\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\tan\dfrac{4}{3}\pi$

問 3. θ は第 1 象限の角 $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ で，$\sin\theta = \dfrac{1}{5}$ である。$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

問 4. $0 < \theta < \pi$ で　$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき　$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

問 5. 次の方程式を解け。ただし $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とする。

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

問 6. 次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ$　　(2) $\cos 165^\circ$　　(3) $\tan 15^\circ$

問 7. 加法定理を使って次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta + \sin(\theta + \dfrac{2}{3}\pi) + \sin(\theta + \dfrac{4}{3}\pi)$

問 8. 次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に表わせ。ただし r は正, $-\pi < \alpha \leqq \pi$ とする。

(1) $-\sin\theta + \cos\theta$　　(2) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

問 9. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = -\sin x + \cos x$　　(2) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

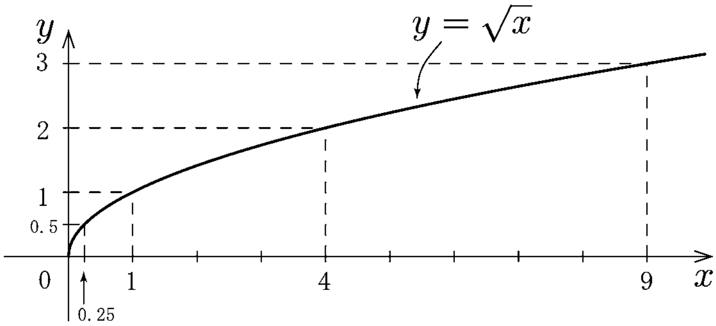
< 無理関数 1 >

$\sqrt{\quad}$ のついた関数を通常**無理関数**という。

例 1　$y = \sqrt{x}$ のグラフを描きたい。
$\sqrt{\quad}$ の中は負になってはいけないので x は 0 以上の数を考える。

x と y の対応表

x	0	0.25	1	4	9
y	0	0.5	1	2	3



よりグラフは右図のようになる。無理関数の場合は「$\sqrt{\quad}$ の中が負になってはいけない」という制限が自動的につく。このような x の範囲 $(x \geqq 0)$ を**定義域**という。なお $\sqrt{\quad}$ の値は常に 0 以上だから y の範囲は $y \geqq 0$ となる。y の範囲を**値域**という。

例 2　無理関数 $y = \sqrt{x+1}$ を考える。
$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$x + 1 \geqq 0 \ \Rightarrow \ x \geqq -1$

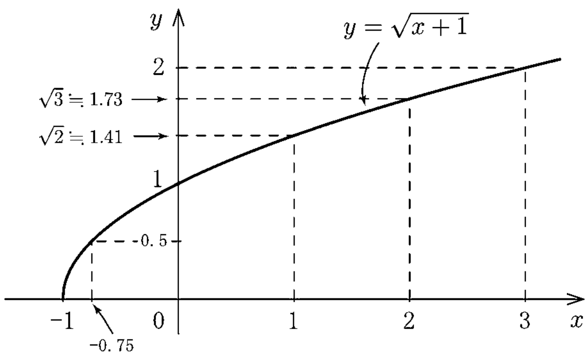
より

$\boxed{\text{定義域} : x \geqq -1}$

であり，値域は $\sqrt{\quad} \geqq 0$ だから

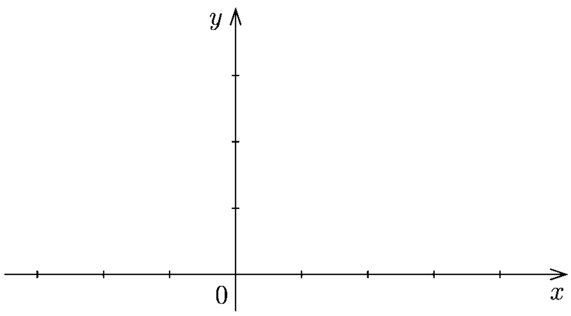
$\boxed{\text{値域} : y \geqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。



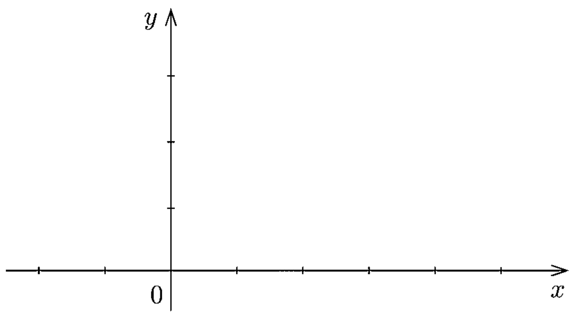
問　以下の無理関数の定義域と値域を求め，グラフを描け。

(1) $y = \sqrt{x+2}$



定義域 :　　　　　　　，値域 :

(2) $y = \sqrt{x-1}$



定義域 :　　　　　　　，値域 :

＜ 無理関数 2 ＞

例 1 無理関数 $y = \sqrt{3-x}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$3 - x \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \geqq x$

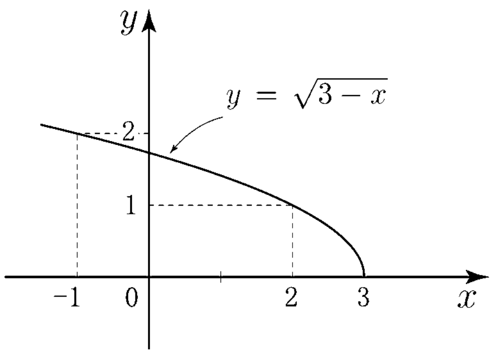
より

$\boxed{\text{定義域} : x \leqq 3}$

また $\sqrt{\quad} \geqq 0$ より

$\boxed{\text{値域} : y \geqq 0}$

である。グラフは右図のようになる。



例 2 無理関数 $y = -\sqrt{x-1}$ を考える。

$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$x - 1 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geqq 1$

より

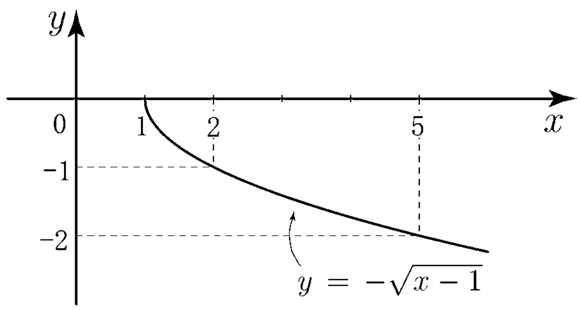
$\boxed{\text{定義域} : x \geqq 1}$

また $\sqrt{\quad} \geqq 0$ より $-\sqrt{\quad} \leqq 0$

だから

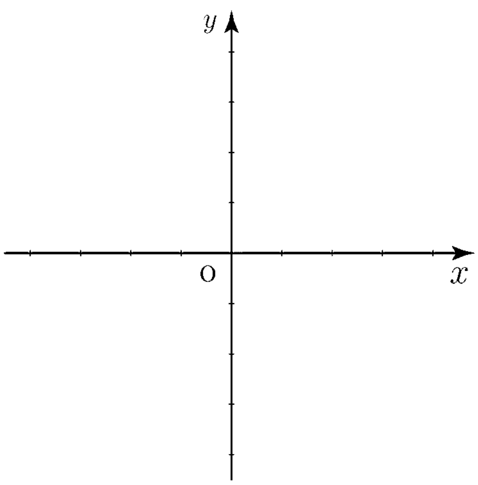
$\boxed{\text{値域} : y \leqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。



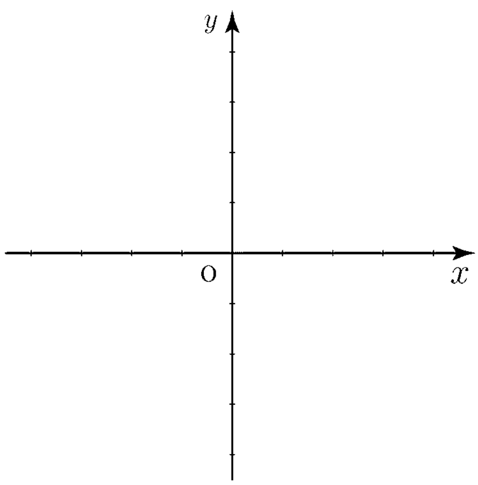
問 以下の無理関数の定義域と値域を求め，グラフを描け。

(1) $y = \sqrt{-x+1}$



定義域 : ______ , 値域 : ______

(2) $y = -\sqrt{x+2}$



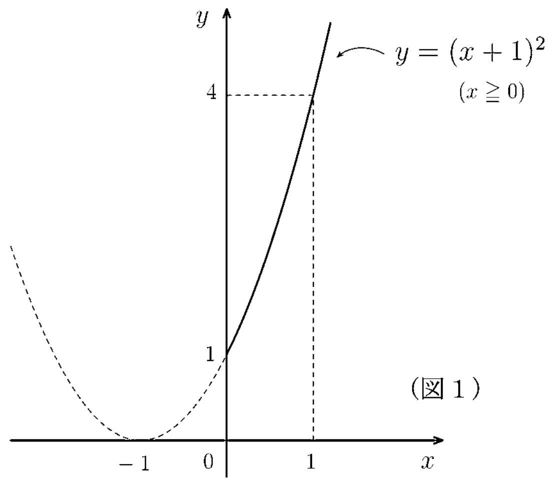
定義域 : ______ , 値域 : ______

＜ 定義域の制限 ＞

関数の通常の定義域をさらに制限する場合がある。
そのような場合の定義域に対応する値域を考える。

例 1　$y=(x+1)^2$ の通常の定義域は実数全体であり, 値域は $y \geqq 0$ である。

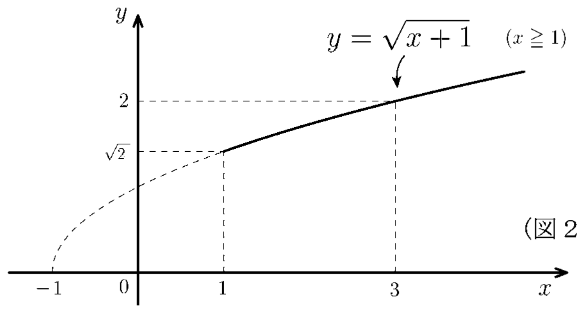
例 2　$y=(x+1)^2$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限する場合の値域は $y \geqq 1$ である。(図 1)



（図 1）

例 3　$y=\sqrt{x+1}$ の通常の定義域は $x \geqq -1$ であり値域は $y \geqq 0$ である。

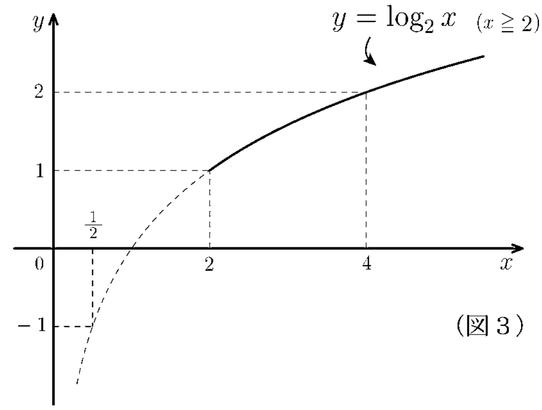
例 4　$y=\sqrt{x+1}$ の定義域を $x \geqq 1$ に制限する場合の値域は $y \geqq \sqrt{2}$ である。(図 2)



（図 2）

例 5　$y=\log_2 x$ の通常の定義域は $x>0$ であり値域は実数全体である。

例 6　$y=\log_2 x$ の定義域を $x \geqq 2$ に制限する場合の値域は $y \geqq 1$ である (図 3)



（図 3）

問　次の関数の (　) 内の定義域に対応する値域を求めよ。

(1) $y=(x-1)^2$　　$(x \geqq 2)$

(2) $y=\sqrt{x+3}$　　$(x \geqq 1)$

(3) $y=\log_3 x$　　$(x>0)$

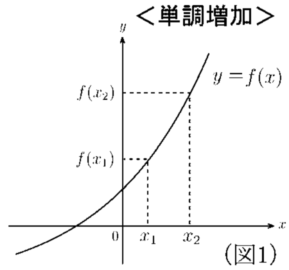
(4) $y=2^x$　　(実数全体)

(5) $y=\sin x$　　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(6) $y=\cos x$　　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

＜ 単調関数 ＞

＜単調増加＞



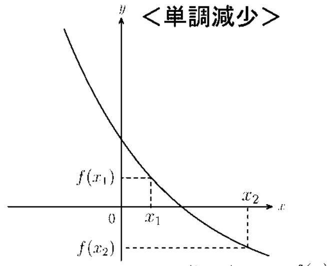
(図1)

図 1 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の
2 点 x_1, x_2 に対し，

$$x_1 < x_2 \quad ならば \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が常に成り立つとき， $f(x)$ は定義域内で**単調増加**という。

＜単調減少＞

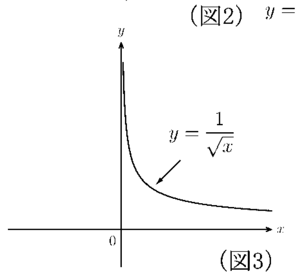


(図2)

図 2 のように関数 $f(x)$ の定義域内の任意の
2 点 x_1, x_2 に対し，

$$x_1 < x_2 \quad ならば \quad f(x_1) > f(x_2)$$

が常に成り立つとき，$f(x)$ は定義域内で**単調減少**という。
単調増加関数および単調減少関数をまとめて**単調関数**という。

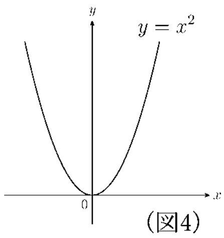


(図3)

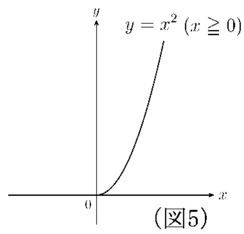
例 1 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ の定義域は $x>0$ である。
図 3 より定義域内で単調減少である。

例 2 $f(x)=x^2$ の定義域は実数全体である。
図 4 より単調関数ではない。

例 3 $f(x)=x^2$ $(x \geqq 0)$ は $y=x^2$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限した関数である。図 5 より定義域 $(x \geqq 0)$ 内で単調増加である。



(図4)



(図5)

問 次の関数が単調関数かどうか判断せよ。もし単調関数であれば， 単調増加か単調減少かを明記せよ。ただし ( ) 内は定義域である。

(1) $y=3x-2$

(2) $y=\dfrac{1}{x}$ $\quad (x \neq 0)$

(3) $y=-(x-1)^2$ $\quad (x \geqq 2)$

(4) $y=\sqrt{x+2}$ $\quad (x \geqq -2)$

(5) $y=\sin x$

(6) $y=\sin x$ $\quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

＜ 逆関数 1 ＞

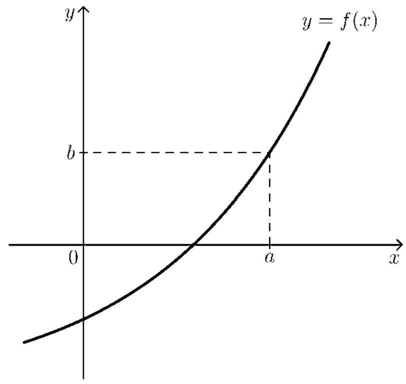
関数 $f(x)$ が単調関数であるとき、y の値 b に対して、

$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような x の値 a がただ 1 つ定まる。このとき

$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。



例 $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ のとき、

関数 $y = f(x)$ は単調関数である。

$$b = f(a)$$

とおくと、$f(a) = 2a - 1$ より

$$b = 2a - 1$$

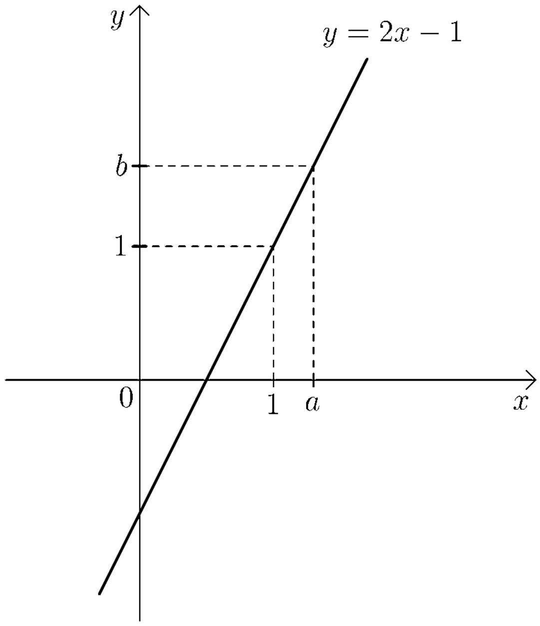
である。これを a について解くと

$$a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。$a = f^{-1}(b)$ であるから

$$\boxed{f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}}$$

となる。



問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて定義域内で単調関数である。

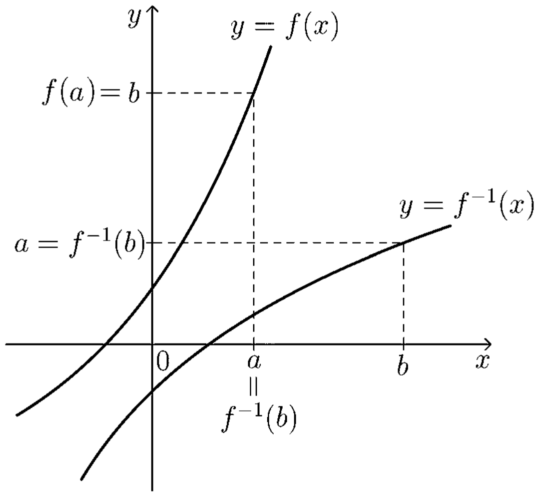
このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 2x + 1$　　(2) $f(x) = 3x - 2$　　(3) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(解)　　(解)　　(解)

＜ 逆関数 2 ＞

関数 $y = f(x)$ が単調関数のとき，y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して，関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という。



例　$f(x) = 2x + 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

$$b = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。

(別解)　$\underline{y = \ \ 2x + 1}$ とおく

$$\Downarrow$$

$$-2x + 1 = y$$

$$2x = y - 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

<u>ここで x と y を入れ替えて</u>

(答)　$\underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$　($y = 2x + 1$ の逆関数)

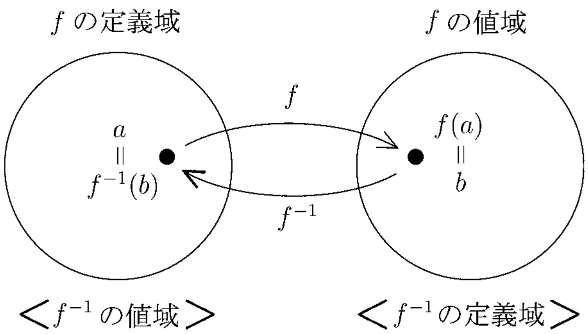
問　$f(x)$ が以下の場合に，逆関数を求めよ。

(1) $f(x) = 3x + 2$

(2) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

< 逆関数 3 >

関数 $y = f(x)$ が定義域内で単調であるとき，関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり，関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。



例題　$f(x) = x^2 + 1 \ (x \geqq 0)$ の逆関数を求めよ。

(解)　$\underline{y = x^2 + 1 \ (x \geqq 0) \text{ とおく}}$

　　$\underline{\text{値域は } y \geqq 1}$

　　$x^2 = y - 1$

　　$x = \pm\sqrt{y-1}$

　ここで　$\underline{x \geqq 0 \text{ だから}}$

　　$x = \sqrt{y-1}$

　つまり

　　$x = \sqrt{y-1} \quad \underline{(y \geqq 1)}$

　$\underline{x \text{ と } y \text{ を入れ替えて}}$

　(答) $y = \sqrt{x-1} \ (x \geqq 1)$　（求める逆関数）

問　$f(x) = (x+1)^2 \ (x \geqq -1)$ の逆関数を求めよ。

＜ 逆関数 4 ＞

例題　次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y = \sqrt{x+1}$　　　　(2)　$y = 3^x$

(解) (1)　$y = \sqrt{x+1}$ の定義域は $x \geqq -1$ であり，値域は $y \geqq 0$ である。

$y^2 = x + 1$

$\Downarrow$

$x + 1 = y^2$

つまり

$x = y^2 - 1 \quad (y \geqq 0)$

ここで x と y を入れ替えて

(答) $y = x^2 - 1 \quad (x \geqq 0)$　(逆関数は $y = x^2 - 1$，その定義域は $x \geqq 0$)

(2)　$y = 3^x$ の定義域は実数全体であり，値域は $y > 0$ である。

$\log_3 y = \log_3(3^x) = x$

$\Downarrow$

$x = \log_3 y \quad (y > 0)$

ここで x と y を入れ替えて

(答) $y = \log_3 x \quad (x > 0)$　(逆関数は $y = \log_3 x$，その定義域は $x > 0$)

問　次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x-1}$

(2) $y = 4^x$

(3) $y = \log_2 x$

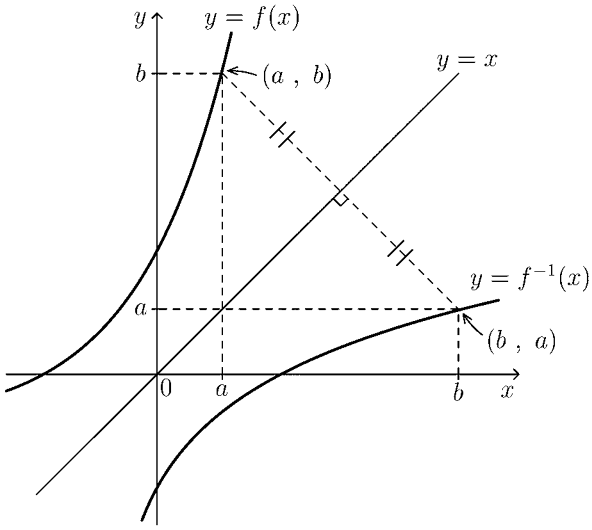
< 逆関数 5 >

関数 $y = f(x)$ が単調であるとき、$y = f(x)$ のグラフ上の点の座標を (a, b) とすると

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より、点 (b, a) は逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。

このことから、逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは, 元の関数 $y = f(x)$ のグラフを、直線 $y = x$ に関して、対称に折り返したものになっている。



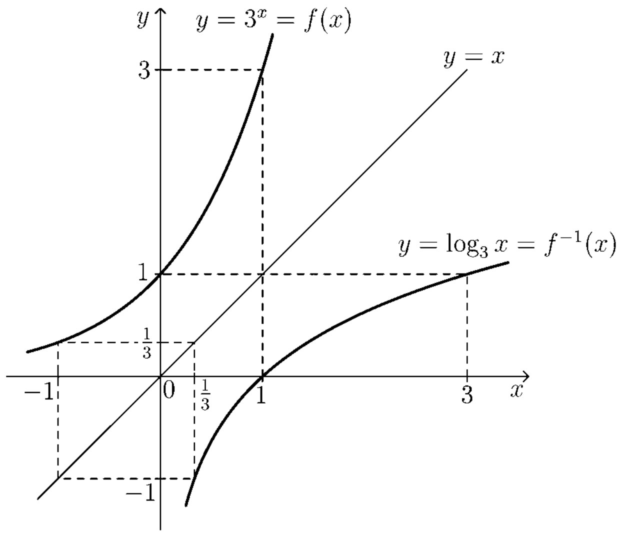
例　$f(x) = 3^x$ のとき、前ページの例題より

逆関数は

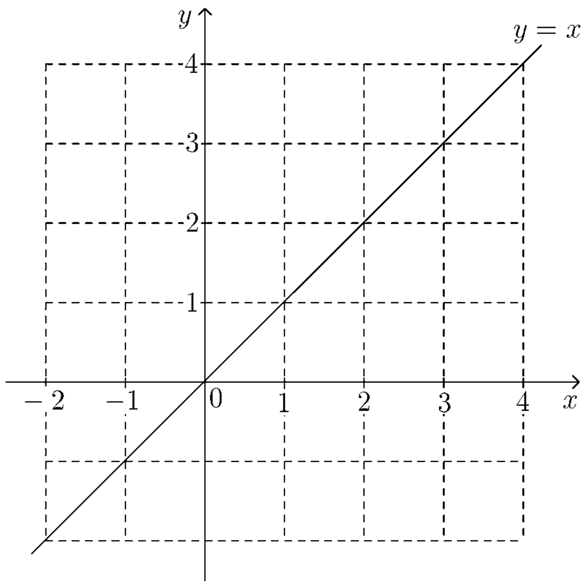
$$f^{-1}(x) = \log_3 x$$

である。

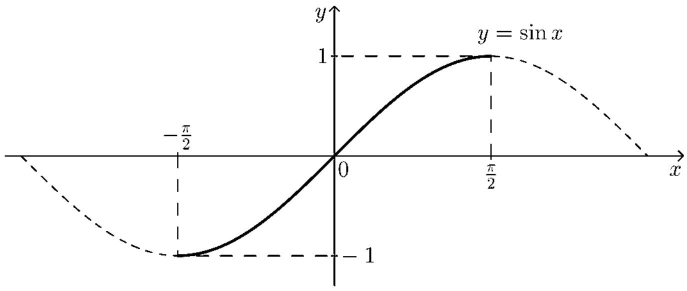
対数関数 $y = \log_3 x$ は指数関数 $y = 3^x$ の逆関数である。
$y = \log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y = 3^x$ のグラフを直線 $y = x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。



問　$f(x) = 2^x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め, 元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描け。



< 逆三角関数 1 >



正弦関数 $y=\sin x$ の通常の定義域は実数全体であり，値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，単調増加になる。このとき，関数

$$y=\sin x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して，これを，

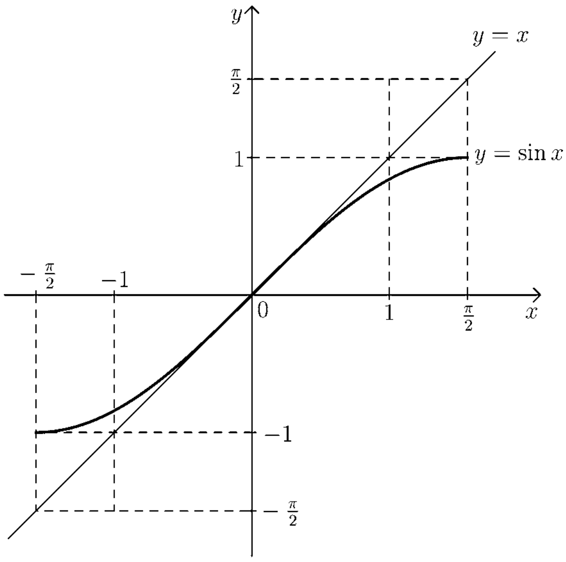
$$y=\sin^{-1} x \quad \text{又は} \quad y=\arcsin x \quad (\text{定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$

(インバースサイン)　(アークサイン)

と表す。$y=\sin^{-1} x$ のグラフは，$y=\sin x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\sin^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\sin x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x$ と書く。

問 1　右の座標平面上に $y=\sin^{-1} x$ のグラフを描け。



例　逆関数の定義より，

$$a=\sin^{-1} b \iff b=\sin a$$

である。例えば $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると，

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\sin\theta$$

より，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから (答)　$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

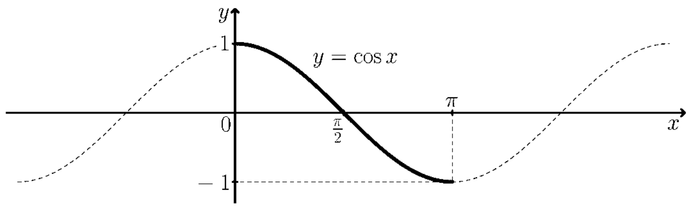
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$　　(2) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$　　(3) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

＜ 逆三角関数 2 ＞



余弦関数 $y = \cos x$ の通常の定義域は実数全体であり，値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると，単調減少になる。そのとき，関数

$$y = \cos x \quad (\text{定義域: } 0 \leqq x \leqq \pi,\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して，これを，

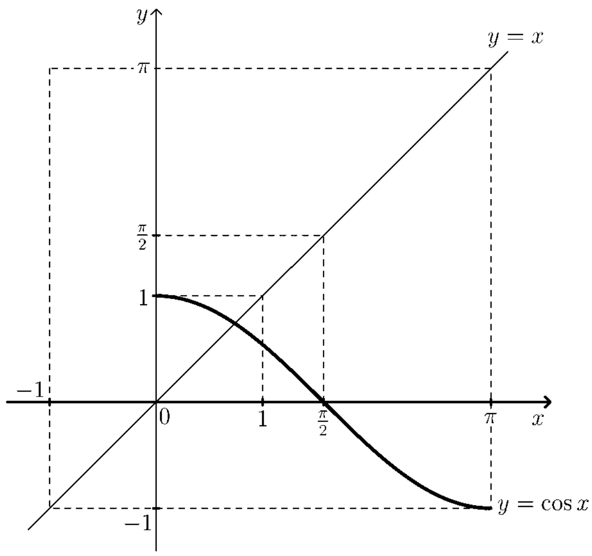
$$y = \cos^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arccos x \quad (\text{定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } 0 \leqq y \leqq \pi)$$

(インバースコサイン)　(アークコサイン)

と表す。$y = \cos^{-1} x$ のグラフは，$y = \cos x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\cos^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\cos x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\cos x} = \sec x$ と書く。

問 1　右の座標平面上に $y = \cos^{-1} x$ のグラフを描け。



例　逆関数の定義より，

$$a = \cos^{-1} b \iff b = \cos a$$

である。例えば $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると，

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \cos\theta$$

より，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\cos\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから (答)　$\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

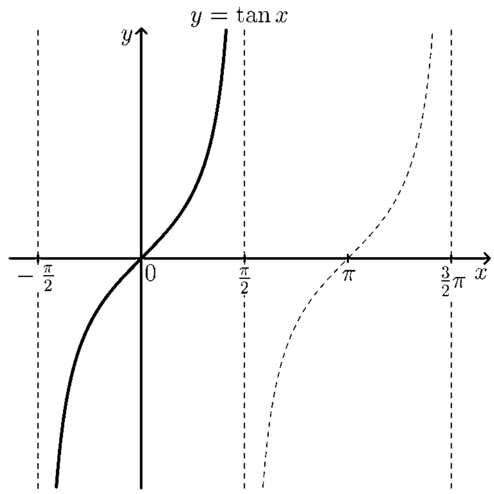
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$　　(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$　　(3) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$

＜ 逆三角関数 3 ＞



正接関数 $y = \tan x$ の通常の定義域は $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) 以外の実数であり，値域は実数全体である。この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，単調増加になる。そのとき，関数

$$y = \tan x \quad (\text{ 定義域: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\text{ , 値域: 実数全体})$$

の逆関数が存在して，これを,

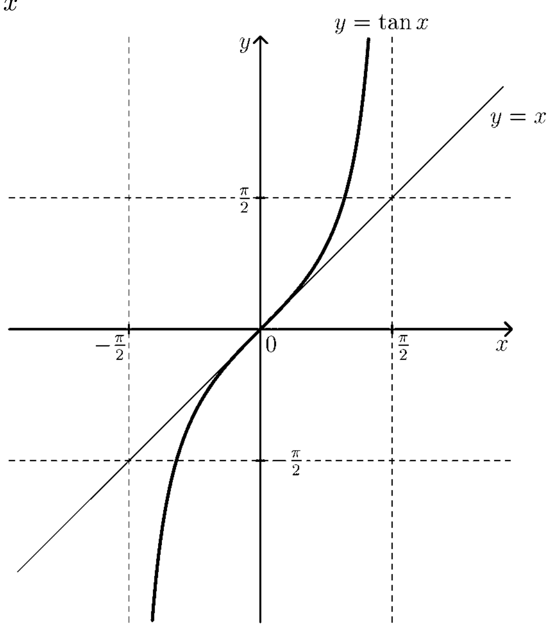
$$y = \tan^{-1} x \qquad \text{又は} \qquad y = \arctan x \quad (\text{ 定義域: 実数全体 , 値域: } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

(インバースタンジェント) (アークタンジェント)

と表す。$y = \tan^{-1} x$ のグラフは，$y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

(注) $\tan^{-1} x$ は $\dfrac{1}{\tan x}$ ではない。これを区別するため $\dfrac{1}{\tan x} = \cot x$ と書く。

問 1　右の座標平面上に $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描け。



例　逆関数の定義より，

$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。例えば $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ の値 θ を求めようとすると，

$$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \iff \sqrt{3} = \tan\theta$$

より，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan\theta$ が $\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

(答)　$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$				0			$\sqrt{3}$

問 2　表を完成させよ。
問 3　次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1}(1) =$　　(2) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$　　(3) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$

< 合成関数 1 >

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について，関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。これら関数を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という。

例 1　$f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

$$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問 1　関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に，合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(2) $f(x) = \tan x$, $g(x) = x + 2$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \log_2 x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

例 2　複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。
例えば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

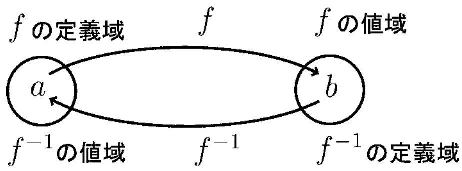
問 2　以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = (x^2 - x + 2)^7$, $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \cos(2x + 3)$, $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $f(x) =$, $g(x) =$

< 合成関数 2 >



問 1　関数 $f(x)$ が単調であれば逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在し，$f(a)=b$ ならば $f^{-1}(b)=a$ である。次式を a か b で表せ。

(1) $f^{-1}\left(f(a)\right)$　　(2) $f\left(f^{-1}(b)\right)$

問 2　関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に $g\left(f(x)\right)$ と $f\left(g(x)\right)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^4$,　$g(x)=\sqrt[4]{x}$　$(x \geqq 0)$

(2) $f(x)=2^x$,　$g(x)=\log_2 x$　$(x>0)$

(3) $f(x)=\sin x$,　$g(x)=\sin^{-1} x$　$(-1<x<1)$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{x^3}$

(2) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$

(3) $\log_3(3^x)$

(4) $3^{\log_3 x}$

(5) $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right)$

(6) $\tan\left(\tan^{-1}(1)\right)$

問 4　$f(x)$ と $g(x)$ が次の各場合に, 合成関数 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ を求めよ。

(1) $f(x)=\sin x$,　$g(x)=x^4$,　$f(g(x))=$　　$g(f(x))=$

(2) $f(x)=\cos x$,　$g(x)=x^5$,　$f(g(x))=$　　$g(f(x))=$

(3) $f(x)=x^5$,　$g(x)=3x+4$,　$f(g(x))=$　　$g(f(x))=$

(4) $f(x)=x^6$,　$g(x)=x^2+3x$,　$f(g(x))=$　　$g(f(x))=$

< 練習問題 >

問 1　次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x} + 1$　(2) $y = x^2 - 3$　(3) $y = \sqrt{x-1} + 2$

(4) $y = \sin x$　(5) $y = \cos x$　(6) $y = 2^x$

(7) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(8) $y = \log_4 x$　(9) $y = \log_{0.5} x$

問 2　$f(x)$ が次の各場合に逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。ただし ( ) 内は定義域である。

(1) $f(x) = 4x - 3$　(2) $f(x) = \sqrt{x-1} \quad (x \geqq 1)$

(3) $f(x) = x^2 - 1 \quad (x \geqq 0)$　(4) $f(x) = x^3 \quad (x \geqq 0)$

(5) $f(x) = 3^x$　(6) $f(x) = \log_5 x \quad (x > 0)$

問 3　$f(x)$ が次の場合に, 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め, 元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描け。ただし ( ) 内は定義域である。

(1) $f(x) = x^4 \quad (x \geqq 0)$　(2) $f(x) = 4^x$

問 4　次の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$　(4) $\log_3(3^5)$

(5) $3^{\log_3 5}$　(6) $\sin\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

問 5　$f(x) = x^5,\ \ g(x) = \tan x,\ \ h(x) = 3x + 4$ のとき, 次の関数を x の式で表せ。

(1) $f(g(x))$　(2) $h(g(x))$　(3) $g(f(x))$

＜ 極限 1 ＞

関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 A に限りなく近づくことを，$x \to a$ のとき，$f(x)$ は A に**収束する**といい，次のように表す。

$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = A}$　　または　　$\boxed{x \to a \text{ のとき，} f(x) \to A}$

このとき，A を，$x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という。

例 1　$\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{4x-5}{x+1} = 1$　$\left(\text{または}\quad x \to 2 \quad \text{のとき} \quad \dfrac{4x-5}{x+1} \to 1 \right)$

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x+5}{x+1}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{6x+7}$　　(3) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x+\pi)$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to \pi} \cos x$　　(5) $\displaystyle \lim_{x \to 3} 2^x$　　(6) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \log_2(5x+1)$

変数 x の値が限りなく大きくなることを，$\boxed{x \to \infty}$　または $\boxed{x \to +\infty}$ で表す。

また変数 x が負であって，絶対値が限りなく大きくなることを $\boxed{x \to -\infty}$ で表す。

記号 $\boxed{\infty}$ を**無限大** ($+\infty$ を**正の無限大**)，$\boxed{-\infty}$ を**負の無限大**という。

例 2　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$,　$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$,　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$,　$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

例 3　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2-2x+7}{5x^2+3x+6} = \lim_{x \to \infty} \frac{4-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{5+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}} = \frac{4}{5}$

問 2　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{2x-3}{x+1}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2-4x}{x^2+3}$　　(3) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+4x}{x^3+1}$

< 極限 2 >

極限値の性質として 次式が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\{hf(x)+kg(x)\} = hA+kB$ 　(ただし，h，k は定数)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ 　(ただし，$B \neq 0$)

(4) x が a の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば，$A \leqq B$

(5) x が a の近くで常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $A = B$ ならば

$$\lim_{x\to a} h(x) = A$$

(注) 上記極限の性質 (1)〜(5) は $x\to\infty$，$x\to-\infty$ のときにも成り立つ。

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(2\sin x + 4\cos x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2^x \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{\log_2 x}{x+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)\left(3+\frac{4}{x^2}\right)$

問 2　関数 $f(x)$ が $x=0$ の近くで常に $\cos x \leqq f(x) \leqq 1$ であるとき，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$

< 極限 3 >

関数 $f(x)$ において，$f(x) \to a$ のとき $f(x)$ の値が限りになく大きくなる場合，$f(x)$ は
正の無限大に発散するといい，次のように表す。

$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$ または $\boxed{x \to a \text{ のとき } f(x) \to \infty}$

$x \to a$ のとき，$f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなる場合，$f(x)$ は
負の無限大に発散するといい，次のように表す。

$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty}$ または $\boxed{x \to a \text{ のとき } f(x) \to -\infty}$

例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$

例 3 $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty$

例 4 $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (x^3 - x^4) = \lim_{x \to \infty} x^4 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\infty$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (x^2 - 10x)$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x^3 + 5x^2 + 7x)$

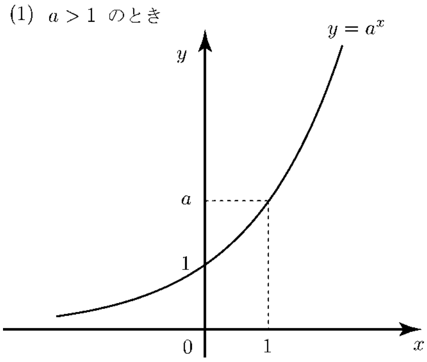
(3) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{x^3 + 1}$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{x}{(x-3)^2}$

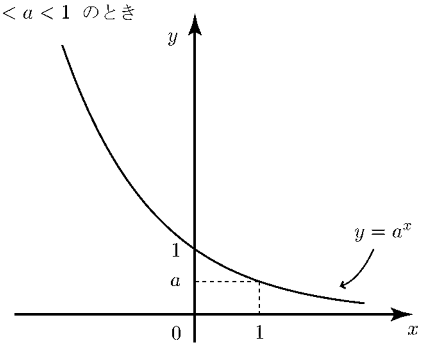
＜ 極限 4 ＞

指数関数 $y = a^x$ のグラフは次のようになる。

(1) $a > 1$ のとき



(2) $0 < a < 1$ のとき



このグラフから次の極限式が得られる。

(1) $a > 1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

(2) $0 < a < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$

例 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(4^x - 3^x) = \lim_{x\to\infty} 4^x \times \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right\} = \infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{4^x + 3^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^x + 1} = 1$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(0.99)^x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1.01)^x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 4^{-x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2^x - 3^x)$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{4^x + 3^x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x}{4^x + 3^x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

< 極限 5 >

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(x)}$ の値は、$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=0$ でも、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=0$ となるときは、

有限の値として定まることがある。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x-1}=12$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{x\times 3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}-\frac{1}{3x}=-\frac{1}{9}$

例 3 $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x})^2-(2)^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^2-9}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

＜ 極限 6 ＞

変数 x が、a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が A に限りなく近づくならば、A を x が a に近づくときの $f(x)$ の **右側極限** といい、

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = A} \quad \text{または} \quad \boxed{\lim_{x\to a+0} f(x) = A}$$

と表す。また変数 x が、a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が B に限りなく近づくならば、B を x が a に近づくときの $f(x)$ の **左側極限** といい、

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = B} \quad \text{または} \quad \boxed{\lim_{x\to a-0} f(x) = B}$$

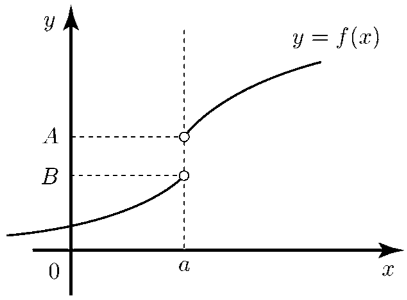
で表す。

例 1　$y = f(x)$ のグラフが (図 1) のような場合は

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = A \qquad \text{(右側極限)}$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = B \qquad \text{(左側極限)}$$

である。

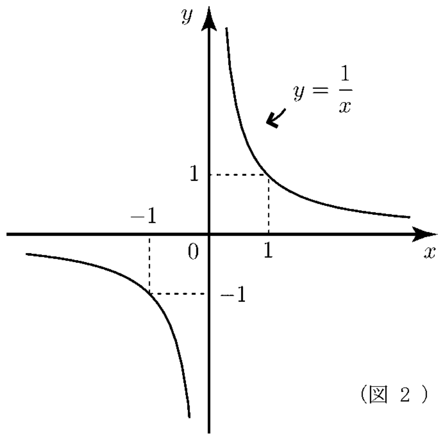


(図 1)

例 2　$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフ (図 2) より

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

である。



(図 2)

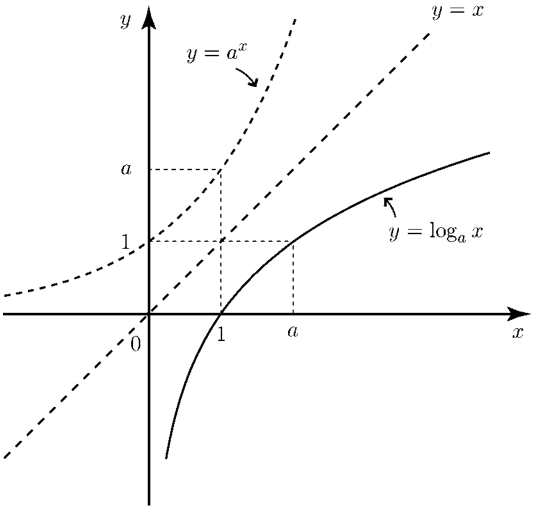
問　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} \frac{1}{x-1}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{1}{x-1}$

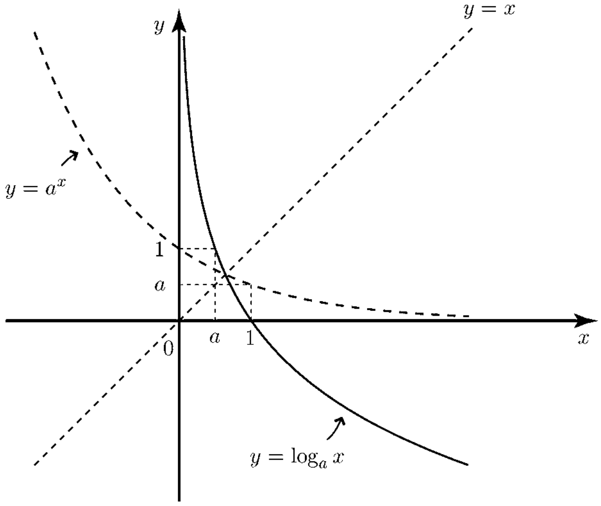
＜ 極限 7 ＞

対数関数 $y = \log_1 x$ は指数関数 $y = a^x$ の逆関数であるから、
グラフは直線 $y = x$ に関して対称になる。

[1] $a > 1$ のとき



[2] $0 < a < 1$ のとき



このグラフより次の極限式が得られる。

[1] $a > 1$ のとき	[2] $0 < a < 1$ のとき
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$	$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty$	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = \infty$

問　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 x$　　(2) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_3 x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$

(4) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_{0.1} x$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_4 \frac{1}{x}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_3 (0.9)^x$　　(8) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \log_{0.5}(3^x)$

＜ 極限の練習 ＞

問　次の極限値を求めよ。ただし a は正の定数である。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3x^2}{x^2+1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(0.99)^x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(4.5)^x$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x+3^x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{4^x+3^x}$

(9) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_{\frac{1}{2}}x$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_5\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\log_3(2^x)$

(12) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^2-a^2}{x}$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$

＜ 付録 1. 古代数学史年表 ＞

年表	数学史	一般史
BC600		
	ターレス (BC624〜BC542 頃) (ミレトス) (三角形の相似を用いてピラミッドの高さを測る、初等幾何)	
	ピタゴラス学派 (BC580〜BC500 頃) (サモス ⇒ クロトン) (三平方の定理、黄金比、正多面体、無理数の発見、天文学他)	
BC500		
	ゼノン (BC450 頃) 運動の逆理 (エレア) (空間と時間の無限分割から起こる矛盾)	ソクラテス (BC470〜BC399)
	デモクリントス (BC460〜BC370) (アブデラ) (原子論、錐の体積を無限小的方法で求める)	プラトン (BC427〜BC347)
BC400		
	エウドクソス (BC408〜BC355) (クニドス) (比例論 (分数の原理)、取り尽くし法、天文学)	アリエトテレス (BC384〜BC322)
		アレクサンダー大王 (BC323 没)
BC300	ユークリッド (BC300 頃) 原論 (アレクサンドリア) (幾何学を公理・公準から厳密に証明した最初の教科書)	アリスタルコス 天文学 (BC310〜BC230) (サモス) (太陽・地球・月の距離を測る, 地動説)
	アルキメデス (BC285〜BC212) (シラクサ) (てこの原理、浮力の原理、面積・体積の計算法、円周率 3.14)	
	エラトステネス (BC276〜BC194) (アレクサンドリア) (地球の半径を計る、素数のふるい分け)	
	アポロニュオス (BC270〜BC190) (ペルガ ⇒ アレクサンドリア) (円錐曲線論、円周率 3.1416)	
BC200		
	ヒッパルコス (BC180〜BC125) (ニカイア) (三角法の表を作る、星図作成)	
	プトレマイオス (BC127〜BC151 頃) (アレクサンドリア) (円を 360 度に分割、三角関数の加法定理)	