< 付録 3 : ロピタルの定理 >

[1]　$f(x),\ g(x)$ は $x=a$ の近くで連続, a 以外で微分可能で $g'(x)\neq 0$ かつ $f(a)=g(a)=0$ とする。そのとき極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\bigl($$f(x),\ g(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ ならば同じことがいえる。$\bigr)$

[2]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=0$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[3]　$x\to a+0$(右極限) のとき $f(x)\to+\infty,\ g(x)\to+\infty$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[4]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=+\infty$ でかつ極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明の概略)

[1] は $Cauchy$ の平均値の定理 $\displaystyle\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\quad(a<c<x)$ より従う。

[2] は $F(x)=f(\frac{1}{x}),\ G(x)=g(\frac{1}{x})$ に対して [1] の結果を使う。

[3] は $a<x<x_1$ に対しコーシーの平均値定理より

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad(x<c<x_1)$$

と表されるので

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\times\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

と変形されることにより従う。

[4] は $F(x)=f(\frac{1}{x}),\ G(x)=g(\frac{1}{x})$ とおいて [3] の結果 を使う。